

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA *Gleb Wataghin*

F 590 INICIAÇÃO CIENTÍFICA I
RELATÓRIO PARCIAL

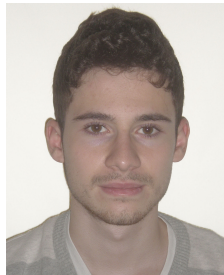
Estudo da Seção de Choque
 $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$

Aluno:

José Ángel Romero Jurado
jose_angel_986@hotmail.com

Orientador:

Prof. Dr. Arlene Cristina
Aguilar *aguilar@ifi.unicamp.br*



Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física *Gleb Wataghin*
Universidade Estadual de Campinas

Campinas-SP
Junho 2014

Sumário

Contents	i
1 Introdução	1
2 Fundamentação teórica	3
2.1 Eletromagnetismo como Teoria de Gauge	3
2.1.1 Covariância de Lorentz - Invariância de Gauge	4
2.1.2 Invariância de Gauge na Mecânica Quântica	5
2.2 Equação de Dirac e Matrizes Gamma	6
2.2.1 Equação de Dirac	7
2.2.2 Matrizes Gamma	8
2.2.3 Soluções de Equação de Dirac e Spin	10
2.3 Quantização de Campo Eletromagnético	12
2.3.1 Quantização Canônica em Teoria de Campos	12
2.3.2 Quantização do Campo Escalar Livre	13
2.3.3 Espaço de Fock e operadores de criação e aniquilação	14
2.3.4 Quantização do Campo Livre de Dirac	16
2.4 Cálculo dos Processos Elementares em Ordem mais Baixa da QED	18
2.4.1 A matriz S e amplitude de espalhamento para um campo livre	19
2.4.2 Teoria de perturbação	21
2.4.3 Diagramas de Feynman	23
2.4.4 Regras de Feynman	24
2.4.5 Largura de decaimento	26
2.4.6 Seção de Choque	27
3 Metodologia	29
3.1 Aniquilação de um par elétron-pósitron	29
3.2 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$	33
4 Conclusões	35
5 Apreciação de relatório pre-final	37

Capítulo 1

Introdução

Um dos principais objetivos da física de altas energias é decifrar as propriedades dos constituintes básicos da matéria e suas possíveis interações. Atualmente, todo o nosso conhecimento a respeito destas partículas fundamentais é descrito por um modelo teórico chamado *Modelo Padrão*.

Nesta teoria, os constituintes elementares da matéria são férmions de spin $1/2$. Estes férmions são chamados de *léptons* e *quarks* e, dentro das precisões atuais dos nossos experimentos, consideramos que estas partículas são pontuais. Além disso, sabemos que existem quatro tipos de forças atuando sobre estas partículas: a eletromagnética, a fraca, a forte e a interação gravitacional. Esta última força é tão fraca em comparação com as outras três, que seus efeitos são desprezíveis nos experimentos de altas energias, e portanto, a força gravitacional não faz parte do Modelo Padrão. Associados à cada uma destas interações, temos as chamadas partículas mediadoras que são bósons com spin 1. No caso do eletromagnetismo, o fóton (partícula sem massa) é o bóson responsável pela interação entre partículas carregadas eletricamente. Já a força eletrofraca é mediada pelos bósons massivos Z e W, enquanto que o bóson da força forte é o glúon (partícula sem massa). A diferença entre os léptons e os quarks é que os primeiros não sentem a força forte.

Neste projeto, nosso objetivo é estudar, em detalhes, a teoria das interações eletromagnética que é descrita pela *Eletrodinâmica Quântica* (QED), que é uma parte importante do modelo padrão. Mostraremos que as Equações de Maxwell são invariantes pelas chamadas transformações de gauge e que além disso, podem ser escritas de uma forma covariante.

Apresentaremos também, uma breve introdução à versão covariante da Equação de Schrödinger, conhecida como Equação de Dirac, que é responsável por descrever o comportamento das partículas de spin $1/2$. Em seguida, discutiremos como a Teoria de Campos clássica pode ser quantizada, e como podemos derivar, a partir deste procedimento, as *regras de Feynman*. Com estas regras em mãos, poderemos calcular as amplitudes de espalhamento que entram nas definições das seções de choque e das taxas de decaimento dos processos de espalhamento que acontecem na QED.

Como uma aplicação deste estudo, vamos estudar um dos espalhamentos mais simples, que ocorrem dentro do contexto da QED, que é o processo onde um par de elétron-pósitron se aniquilam criando um fóton que, por sua vez, produz na sequência um par de léptons e anti-léptons, *i.e.* $(e^+e^- \rightarrow l^+l^-)$ onde $l^- = \text{múons/táons}$. Apesar de ser um espalhamento simples, este processo é um dos mais importantes da QED, pois ele é amplamente utilizado para calibrar os aceleradores de partículas que colidem elétrons e pósitrons. Além disso, ele é importantíssimo para entender o processo $e^+e^- \rightarrow \text{hádrons}$ que foi utilizado para confirmar a existência da carga de cor prevista na *Cromodinâmica Quântica* (QCD).

Mais especificamente, vamos calcular a seção de choque não-polarizada do espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ em nível de árvore. A representação gráfica deste processo está mostrada na Fig. 1.1. Nosso objetivo é analisar a dependência desta seção de choque total com a energia do centro de massa, e comparar os resultados teóricos com os dados experimentais disponíveis na literatura [4]. Também iremos analisar um processo análogo cujo os léptons finais produzidos são $\tau^+ + \tau^-$.

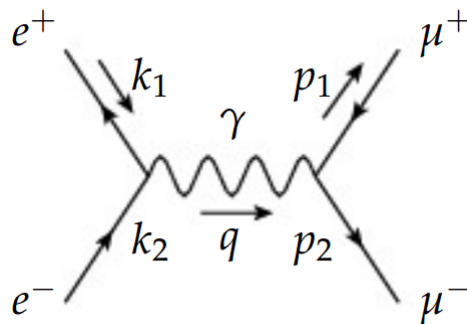


FIGURA 1.1: O diagrama de Feynman para o processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

2.1 Eletromagnetismo como Teoria de Gauge

Graças ao trabalho fundamental de Maxwell de 1864, sabemos que a interação eletromagnética pode ser descrita completamente através de um conjunto de quatro equações, que descrevem a dinâmica dos campos elétricos e magnéticos presentes na natureza. Embora saibamos que este conjunto de equações continua sendo válido, um dos principais sonhos da física dos séculos XX e XXI é a construção de uma teoria unificada, que seja capaz de descrever de uma maneira compacta as quatro interações fundamentais da natureza. Com este objetivo em mente, um dos conceitos que se tornou fundamental na construção deste tipo de teorias é o conceito de *simetria*.

A simetria é um conceito importante na física de partículas, porque além de estar relacionada com a dinâmica da teoria, sabemos que ela também está associada a leis de conservação [2, Cap. 4]. Podemos definir, matematicamente, transformações simétricas (ou invariantes) como sendo operações que deixam a magnitude de uma determinada grandeza física inalterada (*i.e.* invariante).

Podemos ter dois tipos de simetrias: (i) a global e (ii) a local. No primeiro tipo de simetria, a transformação que gera esta simetria é realizada simultaneamente em todo o espaço-tempo. Já no caso da simetria local, diferentes transformações são realizadas em diferentes pontos do espaço-tempo [1, Cap. 3].

Em geral, uma teoria que é invariante globalmente não é necessariamente invariante local. No entanto, introduzindo novos campos de força que interagem com as partículas originais podemos gerar uma invariância local na teoria [1, Cap. 3].

Nosso objetivo durante este capítulo é introduzir uma simetria interna conhecida como *invariância de gauge*, que deixa os campos magnéticos e elétricos medidos nos experimentos inalterados, mas que ao mesmo tempo nos permite escrever o eletromagnetismo como uma teoria de gauge.

2.1.1 Covariância de Lorentz - Invariância de Gauge

Nosso primeiro passo é expressar os campos elétrico, \vec{E} , e magnético, \vec{B} , em termos do potencial vetor, \vec{A} , e do potencial escalar, φ , da seguinte forma

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.1)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

O ponto crucial aqui é notar que os potenciais acima mencionados não são únicos, *i.e.* podemos escrever variações deles de tal forma que os campos \vec{E} e \vec{B} permanecem inalterados. A esta liberdade de escolha nos potenciais damos o nome de *invariância de gauge*.

Podemos verificar esta liberdade de escolha, mais facilmente, se trabalharmos com a notação quadrivetorial, onde o quadri-potencial é definido por

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}), \quad (2.3)$$

desta forma a transformação de gauge que deixa os campos inalterados é dada por

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda, \quad (2.4)$$

com o operador diferencial ∂^μ sendo

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (2.5)$$

Com o objetivo de expressar as equações de Maxwell de forma covariante, vamos também introduzir a quadri-corrente J_{em}^μ como sendo

$$J_{em}^\mu = (\rho_{em}, \vec{J}_{em}), \quad (2.6)$$

enquanto que o tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ [7, Cap. 11] é dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.7)$$

Na notação covariante, as equações de Maxwell podem ser expressadas como [7, Cap. 11]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J_{em}^\nu, \quad (2.8)$$

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.9)$$

Com esta notação fica evidente que, ao aplicar a transformação de gauge da Eq. (2.4), na definição do tensor eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, dado pela Eq. (2.7) sua forma permanece invariante, *i.e.*

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Esta invariância implica que as equações básicas da eletrodinâmica são covariantes em relação a transformações de Lorentz e portanto possuem a mesma forma em todos os sistemas inerciais.

Observe que a invariância do tensor eletromagnético requer que o quadri-potencial se transforme de uma maneira bastante específica para que ele seja invariante. Historicamente, o primeiro exemplo de teoria onde foi derivado do conceito de invariância local foi a teoria de Yang-Mills proposta em 1954. Teorias que são invariantes por transformações locais do quadri-potencial A^μ são chamadas de *Teorias de Gauge* [1, Cap. 3].

2.1.2 Invariância de Gauge na Mecânica Quântica

Vamos agora mostrar que a equação de Schrödinger não é invariante sob uma transformação de gauge, e discutiremos quais são as modificações necessárias que devem ser implementadas na equação e na sua respectiva função de onda para que estas transformações continuem sendo válidas. Chegaremos à conclusão de que a função de onda transformada, apesar de ser diferente à original, possui o mesmo módulo, e portanto a sua densidade de probabilidade $|\psi|^2$ permanece inalterada, não causando mudanças nos resultados medidos físicos deste sistema.

Seja o Hamiltoniano de uma partícula livre com carga q e que se move com velocidade v [1, Cap. 3] dado por

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi. \quad (2.11)$$

Escrevendo a equação de Schrödinger para este hamiltoniano e aplicando às transformações de Gauge dada pela Eq. (2.4), chegamos à seguinte expressão

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\vec{\nabla} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) \right)^2 + q \left(\varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right) \right] \psi'(\vec{x}, t) = i \frac{\partial\psi'(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Como dissemos anteriormente, podemos observar que a Eq. (2.12) não reproduz a mesma equação de Schrödinger inicial após aplicarmos as transformações de gauge. Entretanto, podemos fazer com que a Eq. (2.12) seja equivalente à equação de Schrödinger. Para isso, o campo ψ deve-se transformar como

$$\psi(\vec{x}, t) \longrightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{iq\Lambda(\vec{x}, t)}\psi(\vec{x}, t). \quad (2.13)$$

Note que esta mudança no campo ψ , não altera os resultados físicos obtidos, já que a amplitude de probabilidade não varia com esta transformação, ou seja

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |\psi'(\vec{x}, t)|^2. \quad (2.14)$$

Portanto, chegamos a conclusão que as seguintes transformações devem ser aplicadas conjuntamente para que as equações de Maxwell e a equação de Schrödinger mantenham-se invariantes concomitantemente

$$\begin{aligned} \vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\ \varphi &\longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \\ \psi(\vec{x}, t) &\longrightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{iq\Lambda(\vec{x}, t)}\psi(\vec{x}, t), \\ \partial^\mu &\longrightarrow D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2 Equação de Dirac e Matrizes Gamma

Embora tenhamos mostrado na seção anterior que é possível alterar a função de onda que satisfaz a equação de Schrödinger de tal forma que ela se mantenha invariante sob transformações de gauge, infelizmente esta equação continua a ser inadequada para descrever partículas que se movam com velocidades relativísticas.

Primeiramente, devemos notar que a equação de Schrödinger não é covariante, pois trata o tempo e o espaço de maneiras desiguais, já que possui derivadas espaciais de segunda ordem, enquanto que a derivada temporal é somente de primeira ordem. Além disso, a expressão para energia é dada por

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V, \quad (2.16)$$

enquanto que a equação para energia relativística (em unidade naturais¹) [18, Cap. 7] é expressa por

$$E^2 = (\vec{p}^2 + m^2). \quad (2.17)$$

A primeira tentativa de escrever uma versão covariante para a equação de Schrödinger foi proposta por Klein-Gordon. Seu procedimento foi utilizar a prescrição quântica para substituir a energia e o momento que aparecem na Eq. (2.17) por seus respectivos operadores quânticos *i.e.* $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ o que nos leva à

$$(\nabla^2 + m^2) \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

No entanto, esta equação dá origem a energias negativas da seguinte forma

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (2.19)$$

O efeito colateral, mais preocupante nesta proposição, é o surgimento de uma densidade de probabilidade negativa que não é fisicamente aceitável. A solução para este problema foi proposta de Dirac, que escreveu a versão relativística (covariante) da equação de Schrödinger, que será estudada na próxima seção.

2.2.1 Equação de Dirac

Como podemos observar a equação de Klein-Gordon, Eq. (2.18), trata igualmente às coordenadas espaciais e temporárias, fazendo que ambas dependam de uma derivada segunda [1, Sec. 4.1]. Entretanto, como mencionamos anteriormente, esta estrutura para equação faz surgir um novo problema: existência de energias negativas que descrevem uma densidade de probabilidade ρ que não é positiva definida, invalidando desta forma, a interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Dirac, por sua vez, propôs que a dependência de ambas coordenadas fosse exclusivamente feitas por derivadas primeiras.

Vale a pena mencionar que na equação de Dirac, obtemos sempre densidades de probabilidade positivas, mas o aparecimento das energias negativas ainda persiste. Dirac interpretou estas energias negativas como sendo anti-partículas que preenchem completamente todos os estados de energia negativa presentes no sistema, formando assim o chamado mar Dirac [21].

¹ $\hbar = 1 \quad c = 1$

Tendo em conta a expressão da energia E e o momento \vec{p} em sua forma habitual na teoria não-relativística

$$E \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.20)$$

$$\vec{p} \longrightarrow -i \vec{\nabla}, \quad (2.21)$$

a equação proposta é uma função do tipo:

$$\left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.22)$$

onde $\vec{\alpha}$ e β são quatro matrizes.

Podemos também escrever a equação acima em notação covariante relativística, onde as matrizes α_i e β são redefinidas conhecidas como “matrizes gamma de Dirac”

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3), \quad (2.23)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{1})\psi = 0. \quad (2.24)$$

2.2.2 Matrizes Gamma

Podemos determinar as matrizes $\vec{\alpha}$ e β de maneira que o quadrado da Eq. (2.22) reproduza a equação de Klein-Gordon dada pela Eq. (2.18).

Dirac propôs que α_i e β fossem interpretados como matrizes $n \times n$, que atuam sobre a função de onda descrita por um vetor coluna composto por n componentes [1, Sec. 4.2]. Além disso, essas matrizes são hermitianas, e como são definidas em espaços de dimensão finita, podemos assegurar que as elas são iguais a suas transpostas conjugadas, *i.e.*

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^\dagger, \quad \beta = \beta^\dagger. \quad (2.25)$$

Para obter a relação entre as componentes das matrizes, temos que usar a equação de Dirac dada pela Eq. (2.22)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\alpha} + im\psi\beta = 0, \quad (2.26)$$

e sua hermitiana conjugada

$$\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} + \vec{\nabla} \psi^\dagger \cdot \vec{\alpha}^\dagger - im\psi^\dagger\beta^\dagger = 0. \quad (2.27)$$

Multiplicando a Eq. (2.26) por ψ^\dagger pela esquerda e somando ao produto da Eq. (2.27) por ψ , podemos chegar às seguintes relações das componentes

$$\begin{aligned}\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i &= 2\delta_{ik}\mathbf{1} \quad i, k = 1, 2, 3; \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= \mathbf{0} \quad i = 1, 2, 3; \\ \beta^2 &= \mathbf{1}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Conhecendo as relações anteriores, podemos concluir que a dimensão das matrizes é par. No entanto, só é possível encontrar três matrizes anti-comutativas de dimensão 2 que sejam linearmente independentes. Estas três matrizes são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{2.29}$$

Para que β possa ser linearmente independente às anteriores, devemos supor que as matrizes têm dimensão 4×4 .

A representação mais usual e compacta destas matrizes é a seguinte:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \sigma_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3,\tag{2.30}$$

onde as matrizes σ_i são as matrizes de Pauli, $\mathbf{1}$ é a matriz identidade de dimensão 2×2 e $\mathbf{0}_2$ a matriz nula de igual dimensão. Voltando à notação covariante, as matrizes gamma definidas anteriormente na Eq. 2.23 são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}.\tag{2.31}$$

Assim o conjunto das matrizes gamma se reduz a $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$.

Portanto a equação de Dirac em sua forma matricial é expressa por

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{1} & -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}.\tag{2.32}$$

Podemos definir a densidade de probabilidade como sendo

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^N \psi_i^\dagger \psi_i = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2 \geq 0.\tag{2.33}$$

Entretanto para que a equação de continuidade seja satisfeita, temos que definir o operador corrente de probabilidade como sendo

$$\vec{J} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi. \quad (2.34)$$

que em sua forma covariante é descrito por

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.35)$$

onde introduzimos a notação $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ que é conhecido como spinor adjunto de Dirac.

2.2.3 Soluções de Equação de Dirac e Spin

Vamos agora estudar a solução da Equação de Dirac para o caso mais simples que corresponde a descrição de uma partícula livre que não sofre nenhum tipo de interação. Como já é conhecido da mecânica quântica usual, estamos procurando soluções que se comporte como onda plana. Como havíamos mencionado, a função de onda agora é, na verdade, um bi-spinor que é definido como sendo um vetor coluna de 4 componentes (devido à dimensão das matrizes γ^i). Este bi-spinor pode ser escrito como

$$\psi = \omega e^{-ip^\mu x_\mu}, \quad (2.36)$$

onde p^μ é o quadri-vetor de momento $p^\mu = (E, \vec{p})$, x_μ o quadri-vetor espaço-temporal $x_\mu = (t, \vec{x})$ e ω é um spinor de 4 componentes.

É conveniente expressar o bi-spinor ω como sendo composto por dois spinores (ϕ e χ) de duas componentes cada, *i.e.*

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

o que nos leva à seguinte forma matricial para a equação de Dirac (2.32).

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Esta equação é equivalente a um sistema de duas equações matriciais acopladas cuja a solução é dada por

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Conhecendo os spinores, o passo seguinte é determinar a expressão final do bi-spinor ψ normalizado, onde o fator de normalização é dado por $\sqrt{E+m}$. Desta forma, as soluções que encontramos para as energias positiva e negativa são dadas por

$$\begin{aligned}\psi &= u_s(\vec{p}) e^{-ip_+^\mu x_\mu} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi^s \end{pmatrix} e^{-ip_+^\mu x_\mu} \quad s = 1, 2, \\ \psi &= v_s(\vec{p}) e^{-i(-p_+^\mu)x_\mu} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} e^{-i(-p_+^\mu)x_\mu}.\end{aligned}\quad (2.40)$$

onde veremos que s é o spin. Note que o spinor u_s representa os estados de energia positiva (veja o sinal da parte temporal do argumento da exponencial) enquanto que v_s representa os estados de energia negativa, *i.e* anti-partícula.

As quatro componentes do bi-spinor são ortonormais entre si e formam uma base completa, no espaço de Hilbert, de estados de uma única partícula livre [9, Sec. 7.1].

É interessante observar que já no caso de uma partícula livre, temos a existência de partículas u_s associadas com energias positiva e anti-partículas v_s , associadas com os estados de energia negativa que carregam cada uma spins diferentes.

Spin

Podemos definir um operador \hat{S} [11, Sec. 2.2]

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = -i\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha}.\quad (2.41)$$

que quando aplicado aos spinores obtidos anteriormente $u_s(\vec{p})$ e $v_s(\vec{p})$ da Eq. (2.40), nos leva aos seguintes resultados:

$$\hat{S}_z u_1 = \frac{1}{2} u_1 \quad \hat{S}_z u_2 = -\frac{1}{2} u_2,\quad (2.42)$$

$$\hat{S}_z v_1 = -\frac{1}{2} v_1 \quad \hat{S}_z v_2 = \frac{1}{2} v_2.\quad (2.43)$$

Portanto, podemos assegurar que \hat{S} é o operador de spin, pois seus auto-valores são os valores possíveis do spin de uma partícula com spin 1/2. Portanto, a equação de Dirac descreve partículas e anti-partículas de spin 1/2, e seus estados de spin estão organizados da seguinte forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

2.3 Quantização de Campo Eletromagnético

Na seção anterior, deduzimos a equação de Dirac e discutimos as soluções de onda plana para uma partícula livre. Como a equação de Dirac foi construída tendo como base a prescrição quântica podemos dizer que esta equação que descreve campos quantizados.

Já no caso dos campo eletromagnético clássico derivado através das equações de Maxwell, nenhum caráter quântico foi incorporado na análise.

Nosso objetivo, nesta seção, é discutir a unificação da Teoria Clássica de Campos e a Mecânica Quântica, para desta forma, sermos capazes de definir um procedimento válido para quantizar o campo eletromagnético.

Para compreender os próximos conceitos, é preciso ter em mente os conceitos mencionados nos capítulos anteriores. Vimos que ao acoplar a interação electromagnética na equação de Schrödinger e verificar a invariância de gauge desta equação, somos obrigados a introduzir simultaneamente uma mudança de fase função de onda dada pela Eq.(2.13).

Além disso, derivamos a existência das antipartículas Eq. (2.40) previstas pelo mar de Dirac [21], e como toda partícula e seu antipartícula possuem a mesma massa, é conveniente que os campos que as representem sejam complexos para podemos distinguí-las. Na próxima seção, toda vez que quisermos nos referir ao um operador (campo) quantizado vamos utilizar o símbolo $\hat{}$ para distinguir do operador (campo) clássico usual.

2.3.1 Quantização Canônica em Teoria de Campos

Vamos agora definir os conceitos de Teoria de Campos de maneira análoga a Mecânica Clássica. Os campos escalares $\phi(x^\mu)$ são os homólogos às coordenadas generalizadas x_i , enquanto que os campos definidos como

$$\pi(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi(x^\mu)}, \quad (2.45)$$

seriam os análogos aos momentos conjugados p_i , onde $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; t)$ é a densidade lagrangiana.

Já a densidade de hamiltoniana \mathcal{H} pode ser definida como

$$H = \int \mathcal{H} d^3 \vec{x} = \int [\pi(x_0, \vec{x}) \partial_0 \phi(x_0, \vec{x}) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)] d^3 \vec{x}. \quad (2.46)$$

O próximo passo para quantizar esta teoria é atribuímos a cada variável dinâmica da Teoria Clássica de Campos $\phi(x^\mu)$ e $\pi(x^\mu)$, um operador Hermitiano $\hat{\phi}(x^\mu)$ e $\hat{\pi}(x^\mu)$ que atua sobre um espaço de Hilbert dos estados quânticos do sistema [9, Sec. 4.2]. O espaço de Hilbert onde agem estes operadores é chamado de espaço de Fock $\mathcal{F}(H)$.

O funcional do campo de configuração é definido como

$$\hat{\phi}(x^\mu) | \{ \{ \phi(x^\mu) \} \} \rangle = \phi(x^\mu) | \{ \{ \phi(x^\mu) \} \} \rangle. \quad (2.47)$$

De agora em diante, os estados ou funções de onda deixam de ser representados por vetores e passam a ser representados por funcionais. Sabemos que quando aplicamos um operador a um estado, obtemos como resposta um auto-valor cuja magnitude representa o valor do operador. Agora ao aplicarmos o funcional sobre um estado, temos como resposta um campo que representa o funcional.

Ao juntar a Teoria Clássica de Campos com a Mecânica Quântica, nosso objetivo é que o campo que seja obtido quando um funcional é aplicado em um determinado estado, seja também discreto.

2.3.2 Quantização do Campo Escalar Livre

Por definição, chamamos de *campos livres* aqueles campos onde não há nenhum tipo de interação. Em particular, este campo não estará sujeito a presença de cargas que são conhecidas como “fontes” em teoria de campos.

Nosso principal objetivo aqui é expressar os campos livres em termos de suas transformada de Fourier. Desta forma ao impormos a condição que sua transformada seja hermitiana, é possível re-expressar este campo em função dos operadores quânticos de criação e aniquilação. Para fazer isto, vamos primeiramente escrever a lagrangiana para este campo escalar como sendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.48)$$

de maneira análoga a Eq. (2.46) a densidade hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(x^\mu) + \frac{1}{2} \left(\nabla \hat{\phi}(x^\mu) \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2(x^\mu). \quad (2.49)$$

Podemos calcular a variação temporal dos operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$ usando o comutador². A equação de movimento resultante para este campo é da forma

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}(x^\mu) = 0. \quad (2.50)$$

Para resolvê-la, aplicamos a transformada de Fourier

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \hat{\phi}(x_0, \vec{k}) e^{ik^\mu \cdot x_\mu}, \quad (2.51)$$

com $k^\mu \cdot x_\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$.

Finalmente, podemos mostrar que as soluções são dos operadores hermitianos que satisfazem a mesma relação que os operadores de criação e aniquilação possuem Mecânica Quântica, *i.e*

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.52)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (2.51) podemos expressar o operador $\hat{\phi}$ como

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega(\vec{k})}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})x_0 + i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{i\omega(\vec{k})x_0 - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right]. \quad (2.53)$$

De maneira semelhante, podemos obter as expressões de $\hat{\pi}(x^\mu)$ e H em função dos operadores criação e aniquilação.

2.3.3 Espaço de Folk e operadores de criação e aniquilação

Todos os estados físicos possíveis de um espaço-tempo são representados mediante vetores no espaço de Folk. É necessário representar os estados por sua magnitude k_i e seu spin s , mas também temos que representar suas anti-partículas e o vácuo. Quando o espaço não contém nenhuma partícula, representamos este estado de vácuo por $|0\rangle$, que é definido como sendo

$$\hat{a}(k)|0\rangle = 0, \quad (2.54)$$

² $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

por outro lado, caso ele contenha N partículas podemos representá-lo por

$$|k_1, s_1; k_2, s_2; \dots; k_N, s_N\rangle. \quad (2.55)$$

O espaço de Folk divide-se em dois sub-espacos, o de vetores simétricos, que representam os bósons e o de vetores anti-simétricos que representam férmions. Sabemos que quando há N partículas no espaço, os vetores anti-simétricos não permitem que duas ou mais partículas ocupem o mesmo estado k_i . Já no caso do vetores simétricos, este tipo de ocupação é permitido.

Vimos através da Eq. (2.52) que os operadores criação e aniquilação são comutativos, desta forma quando aplicamos em um estado obtemos respectivamente

$$\hat{a}_\alpha |n_1; \dots; n_\alpha; \dots\rangle = \sqrt{n_\alpha} |n_1; \dots; n_\alpha - 1; \dots\rangle, \quad (2.56)$$

$$\hat{a}_\alpha^\dagger |n_1; \dots; n_\alpha; \dots\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1} |n_1; \dots; n_\alpha + 1; \dots\rangle, \quad (2.57)$$

sendo n_α o número de partículas que há em mesmo estado k_i . Portanto, n_α pode ser igual a 0, 1, 2, ... para bósons e somente 0 e 1 para férmions.

Mas se quisermos obter uma representação numérica para os férmions, temos que modificar o nosso procedimento. Para isso, faremos que os operadores, quando são aplicados aos estados de férmions se comportem da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{a}_\alpha |n_1; \dots; n_\alpha; \dots\rangle &= (-1)^{\tilde{N}_{1\alpha}} \delta_{n_\alpha, 1} \sqrt{n_\alpha} |n_1; \dots; n_\alpha - 1; \dots\rangle, \\ \hat{a}_\alpha^\dagger |n_1; \dots; n_\alpha; \dots\rangle &= (-1)^{\tilde{N}_{1\alpha}} \delta_{n_\alpha, 0} \sqrt{n_\alpha + 1} |n_1; \dots; n_\alpha + 1; \dots\rangle, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde

$$\tilde{N}_{1\alpha} = \sum_{\alpha\alpha'}^{\alpha'-1} n_{\alpha''}.$$

Não é difícil mostrar que o operador \hat{N} definido como

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.59)$$

tem como autovalor o número de partículas num estado

$$\hat{N} |k_i, s_i\rangle = n_i |k_i, s_i\rangle. \quad (2.60)$$

Além disso, pode-se mostrar que estes operadores anti-simétricos satisfazem uma relação de anti-comutação³ análoga à de comutação que satisfazem para os bósons, ou seja

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta]_+ = [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger]_+ = 0 \quad [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.61)$$

Combinando as relações dadas pelas Eqs. (2.52) e (2.61) chegamos em

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta]_\eta = [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger]_\eta = 0 \quad [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger]_\eta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.62)$$

Assim, utilizando a Eq. (2.54) fica fácil mostrar que

$$\hat{a}_s^\dagger(k_i)|0\rangle = |k_i; s\rangle. \quad (2.63)$$

Entretanto os operadores criação e aniquilação não são suficientes para descrever os férmions, pois a existência de anti-partículas nos obriga a definir outro par de criação e aniquilação $c_s(k)$ e $d_s(k)$. Interpretamos \hat{c}_s^\dagger como operador que cria uma partícula de momento k e spin s e \hat{c}_s aniquila tal partícula. Analogamente, \hat{d}_s^\dagger cria a anti-partícula de momento k e spin s , enquanto que \hat{d}_s a aniquila.

Agora podemos comprovar a importância de definir os operadores de comutação e anti-comutação para os bósons e férmions respectivamente. Aplicando o comutador da Eq. (2.52) nos dois estados com partículas trocadas $|k_1, s_1; k_2, s_2\rangle$ e $|k_2, s_2; k_1, s_1\rangle$ obtemos que

$$\hat{a}_{s_1}^\dagger(k_1)\hat{a}_{s_2}^\dagger(k_2)|0\rangle = \hat{a}_{s_2}^\dagger(k_2)\hat{a}_{s_1}^\dagger(k_1)|0\rangle, \quad (2.64)$$

e portanto, os estados anteriores são simétricos, como esperado para bósons. Por outro lado, se aplicamos o anti-comutador da Eq. (2.62) nos mesmos estados anteriores obtemos

$$\hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)|0\rangle = -\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)\hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)|0\rangle, \quad (2.65)$$

o que significa que os estados são anti-simétricos, como é esperado para férmions. Esta propriedade também impede que dois ou mais férmions idênticos ocupem o mesmo estado.

2.3.4 Quantização do Campo Livre de Dirac

Vamos agora aplicar o mesmo procedimento de quantização que derivamos para o campo escalar $\hat{\phi}^\mu$ para as soluções de onda ψ dadas pela Eq. (2.40).

³ $\{\hat{A}, \hat{B}\} = [\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

O resultado são duas soluções que dependem dos operadores criação e aniquilação da partícula e da anti-partícula de forma que a função de onda seja expressa por

$$\psi(x^\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left[c_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \right]. \quad (2.66)$$

enquanto que seu adjunto é dado por

$$\bar{\psi}(x^\mu) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left[c_s^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} + d_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \right], \quad (2.67)$$

onde $\bar{u}_s(\vec{p}) = u_s^\dagger(\vec{p})\gamma^0$, $\bar{v}_s(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})\gamma^0$.

É importante mencionar que as quatro componentes u_1, u_2, v_1, v_2 formam uma base natural do espaço de Hilbert [9, Sec. 7.1], e o operador c_s^\dagger (c_s) cria (destrói) um elétron de spin s e momento \vec{p} , enquanto que d_s^\dagger (d_s) cria (destrói) um pósitron com as mesmas características.

Analogamente, usando as regras de anti-comutação, chegamos a expressão do hamiltoniano para campos de Dirac livres

$$\hat{H}_D = \int dx^\mu \bar{\psi} i \partial_0 \psi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p \sum_{s=1,2} \left[\hat{c}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{c}_s(\vec{p}) + \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{d}_s(\vec{p}) \right], \quad (2.68)$$

onde a energia é medida em relação ao vácuo que foi definida como zero.

Para facilitar a quantização do quadri-potencial A^μ é conveniente aproveitar o grau de liberdade de Eq. (2.15) e fazer a seguinte escolha de gauge

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.69)$$

Utilizando a condição acima e lembrando que o quadri-vetor de corrente J^μ é nulo por definição para o campo livre, podemos concluir

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.70)$$

Podemos notar que há uma certa analogia entre a lagrangiana do campo escalar livre Eq. (2.48) e a Lagrangiana para o quadri-potencial

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (2.71)$$

As soluções da Eq. (2.70) são tipo

$$\hat{A}^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left[\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \hat{a}_\lambda(k) e^{-ik^\mu x_\mu} - \epsilon^{*\mu}(\vec{k}, \lambda) \hat{a}_\lambda^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu} \right], \quad (2.72)$$

onde $\hat{a}_\lambda^\dagger(k)$ é um operador de criação, que no vácuo cria um fóton com momento $p^\mu = \hbar k^\mu$ e polarização ϵ^μ , enquanto que $\hat{a}_\lambda(k)$ o destrói.

Já o vetor de polarização, ϵ^μ , satisfaz

$$\epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda') = -\zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1, \quad (2.73)$$

definido $\epsilon_\mu(\vec{k}, 0)$ como vetor de polarização temporal, $\epsilon_\mu(\vec{k}, 3)$ longitudinal, e $\epsilon_\mu(\vec{k}, 1)$ e $\epsilon_\mu(\vec{k}, 2)$ são os transversais.

Além disso, em qualquer sistema de referência, os vetores polarização devem satisfazer a seguinte expressão

$$g^{\mu\nu} = - \sum_{\lambda=0}^3 \zeta_\lambda \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\vec{k}, \lambda). \quad (2.74)$$

2.4 Cálculo dos Processos Elementares em Ordem mais Baixa da QED

Nesta seção, vamos primeiramente introduzir a matriz de espalhamento S , que quando aplicada aos estados iniciais e finais, de um determinado processo elementar, nos leva à *amplitude de espalhamento*. Essa amplitude de espalhamento é um ingrediente importante, pois quando quadrada ela nos fornece a probabilidade de transição entre estes estados iniciais e finais. Entretanto, quando tratamos de teorias que possuem interação, a equação que obtemos como resposta é extremamente complexa e difícil de tratar sem a aplicação de aproximações. Essa equação é conhecida na literatura como *fórmula de redução de LSZ*.

Mas, se essa interação for suficiente fraca, podemos utilizar a *teoria da perturbação* para simplificar o grau de complexidade da fórmula LSZ. A validade da teoria de perturbação foi amplamente confirmada para QED, já que várias predições teóricas, obtidas através do emprego deste método, estão em concordância com uma série de dados experimentais. Além disso, sabemos que a teoria de perturbação também é uma ferramenta apropriada para descrever a interação fraca [4, Sec. 1.1].

Depois de aplicar a *teoria da perturbação* juntamente com o chamado *Teorema de Wick* à *formula LSZ*, obtemos como resultados expressões que podem ser descritas através de

um conjunto de regras propostas primeiramente por Feynman em sua publicação de 1949. A este conjunto de regras damos o nome de *regras de Feynman*.

Uma vez obtidas este conjunto de regras, vamos aplicá-las para alguns processos elementares da QED a fim de derivar a chamada amplitude de espalhamento. Essa amplitude é calculada tendo em conta todas as contribuições dos diferentes diagramas/processos onde os estados iniciais e finais são os mesmos. Com a amplitude de espalhamento em mãos, podemos calcular a *seção de choque* deste processo que é o objetivo final deste trabalho.

2.4.1 A matriz S e amplitude de espalhamento para um campo livre

Para isso, vamos primeiramente supor que uma teoria de campos interagente pode ser descrita pelo seguinte hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (2.75)$$

onde \hat{H}_0 contém os termos cinéticos do hamiltoniano e \hat{H}_{int} os termos de interação.

Para obter a probabilidade de transição entre dois estados quaisquer, vamos supor que $|i(t_i)\rangle = |i\rangle$ seja o estado inicial em tempo inicial t_i , cujo autovalor descreve o spin e momento desta partícula inicial, e que $|f(t_f)\rangle = |f\rangle$ seja o estado depois da colisão, cujo autovalor reproduz o spin e o momento desta partícula final produzida. A amplitude de probabilidade para que o estado $|i\rangle$ se transforme no estado $|f\rangle$ é dada pela equação seguinte:

$$\langle f|i(t_i)\rangle = \langle f|e^{-iH(t_f-t_i)}|i\rangle. \quad (2.76)$$

A matriz S é o operador evolução temporal $e^{-iH(t_f-t_i)}$ no limite $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$. Neste limite, a amplitude de probabilidade é chamada amplitude de espalhamento, *i.e.*

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle f|e^{-iH(t_f-t_i)}\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle f;t_f|i;t_i\rangle. \quad (2.77)$$

Nosso objetivo final é calcular a amplitude de espalhamento para uma teoria com interação. Entretanto, por simplicidade, vamos começar a calcular esta quantidade para o caso de uma teoria livre, para depois aplicar o resultado obtido aos campos de Maxwell, onde faremos uso da teoria de perturbação para incluir a interação.

A matriz S definida entre os estados iniciais e finais cujos momentos são respectivamente k_i e p_i é dada por

$$\langle \vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n | S | \vec{k}_1; \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m \rangle = \langle \vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n; t_f | \vec{k}_1; \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m; t_i \rangle, \quad (2.78)$$

onde $t_i \rightarrow -\infty$ e $t_f \rightarrow +\infty$.

É comum, por simplicidade, ver os termos anteriores em função da matriz T , definida da seguinte forma

$$S = \mathbf{1} + iT. \quad (2.79)$$

O método para calcular a matriz S é conhecido como *fórmula de redução de LSZ* [3, Sec. 7.2]. Vamos apresentar com detalhes o derivação desta fórmula para o caso dos campos escalares, e discutiremos de uma maneira mais abreviado os resultados para campos fermiônicos.

Nosso ponto de partida é a expressão da quantização do campo escalar dada pela Eq. (2.53). Se chamarmos $\hat{\phi}^{(in)}$ o campo antes da interação, e $\hat{\phi}^{(out)}$ ao mesmo campo, após a interação temos

$$\hat{\phi}(x^\mu) \xleftrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \hat{\phi}^{(in)}(x^\mu) \quad \hat{\phi}(x^\mu) \xleftrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \hat{\phi}^{(out)}(x^\mu), \quad (2.80)$$

onde Z é um fator de renormalização da função de onda.

Agora aplicamos os operadores de criação $a_{k_\alpha}^{\dagger(in)}$ e aniquilação $a_{p_\beta}^{(out)}$ para eliminar todas as partículas dos estados iniciais e finais, deixando somente combinações de campos agindo sobre o vácuo de tal forma que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n; t_f | \hat{\phi}(x^\mu) | \vec{k}_1; \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{k_1}} \langle \vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n; t_f | a_{k_1}^{\dagger(in)} \hat{\phi}(x^\mu) | \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m; t_i \rangle, \\ \langle \vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n; t_f | \hat{\phi}(x^\mu) | \vec{k}_1; \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{p_1}} \langle \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n; t_f | a_{p_1}^{(out)} \hat{\phi}(x^\mu) | \vec{k}_1; \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m; t_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Após repetir este procedimento até eliminar as todas as partículas, obtermos a seguinte fórmula

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{i=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \right) \langle \vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots; \vec{p}_n | iT | \vec{k}_1; \vec{k}_2; \dots; \vec{k}_m \rangle = \\ &\int \left(\prod_{i=1}^m d^4 x_i^\mu e^{-ik_i^\mu x_{\mu i}} \right) \int \left(\prod_{j=1}^n d^4 y_j^\mu e^{+ip_j^\mu y_{\mu j}} \right) \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1^\mu) \dots \hat{\phi}(x_m^\mu) \hat{\phi}(y_1^\mu) \dots \hat{\phi}(y_n^\mu) \} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde $T\{\hat{\phi}(y^\mu)\hat{\phi}(x^\mu)\}$ é o produto ordenado temporalmente definido como

$$T\{\hat{\phi}(y^\mu)\hat{\phi}(x^\mu)\} = \begin{cases} \hat{\phi}(y^\mu)\hat{\phi}(x^\mu), & y^0 > x^0 \\ \hat{\phi}(x^\mu)\hat{\phi}(y^\mu), & y^0 < x^0 \end{cases}. \quad (2.83)$$

Observe que a Eq. (2.82) só pode ser aplicada aos campos escalares, *i.e.* bósons. A fórmula de redução LSZ para férmions poder ser mostrada de maneira equivalente partindo das soluções quantizadas dos campos de Dirac livres dadas pelas Eqs. (2.66) e (2.67). Aplicando o mesmo procedimento chegamos à

$$\mathcal{P}\langle\vec{p}_1; \dots; \vec{p}_n|iT|\vec{k}_1; \dots; \vec{k}_m\rangle = \int\left(\prod_{i=1}^m d^4x_i^\mu e^{-ik_i^\mu x_{\mu i}}\right)\int\left(\prod_{j=1}^n d^4y_j^\mu e^{+ip_j^\mu y_{\mu j}}\right)\prod_{i=m_f+1}^m \bar{v}_{s_i}(\vec{k}_i)\prod_{j=1}^{n_f} \bar{u}_{s'_j}(\vec{p}_j) \times \langle 0|T\{\mathcal{S}\}|0\rangle, \quad (2.84)$$

onde definimos na equação acima as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left(\prod_{i=1}^{m_f} \frac{i\sqrt{Z}}{k_i - m}\right) \left(\prod_{i=m_f+1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i + m}\right) \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{i\sqrt{Z}}{p_j - m}\right) \left(\prod_{j=n_f+1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j + m}\right) \\ \mathcal{S} &= \prod_{i=m_f+1}^m \psi(x_i^\mu) \prod_{i=1}^{m_f} \bar{\psi}(x_i^\mu) \prod_{j=n_f+1}^m \psi(y_j^\mu) \prod_{j=n_f+1}^n \bar{\psi}(y_j^\mu) \prod_{i=1}^{m_f} u_{r_i}(\vec{k}_i) \prod_{j=n_f+1}^n v_{r'_j}(\vec{p}_j) \end{aligned} \quad (2.85)$$

com m sendo o número de partículas de entrada, sendo m_f o número de férmions com spin r_i e os restantes são anti-férmions de spin s_i . O número de partículas de saída é n , n_f partículas com spin r'_j e $n - n_f$ anti-partículas com spin s'_j . Além disso, utilizamos a notação compacta \not{A} que é definido por $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$.

2.4.2 Teoria de perturbação

Para descrever a evolução temporal dos sistemas quânticos fazemos uso da representação de Interação. Esta representação combina as vantagens das representações de Schrödinger e Heisenberg. Essencialmente, vamos tratamos a dependência temporal associada ao operador \hat{H}_0 na representação de Heisenberg, enquanto que a induzida pelo operador \hat{H}_{int} é tratada na representação de Schrödinger.

Nosso objetivo é expressar o último termo da Eq. (2.82) em função do campo de interação $\hat{\phi}^{(I)}(x^\mu)$ ⁴ e da densidade de hamiltoniano de interação $\mathcal{H}^{(I)}(x^\mu)$, para assim poder calcular ordem a ordem em teoria de perturbação a amplitude de espalhamento.

O campo de interação $\hat{\phi}^{(I)}(t, \vec{x})$ é definido nesta representação como sendo

$$\hat{\phi}^{(I)}(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \hat{\phi}^{(H)}(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (2.86)$$

que coincide com $\hat{\phi}^{(H)}(t, \vec{x})$ somente no tempo de referencia $t = t_0$.

Desta forma $\hat{\phi}^{(I)}$ é um campo escalar livre que através da definição da Eq. (2.53) se

⁴A notação (I) indica que o campo é descrito na representação de interação. Enquanto que (S) ou (H) indica que é descrito na de Schrödinger ou Heisenberg, respectivamente.

reduz a

$$\hat{\phi}^{(I)} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip^\mu x_\mu} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip^\mu x_\mu}). \quad (2.87)$$

Partindo da evolução temporal na representação de Heisenberg que é dada por

$$\hat{\phi}^{(H)}(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \hat{\phi}^{(H)}(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (2.88)$$

e substituindo $\hat{\phi}^{(H)}(t_0, \vec{x})$ da Eq. (2.88) na Eq. (2.86) chegamos

$$\hat{\phi}^{(H)}(t, \vec{x}) = \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) \hat{\phi}^{(I)}(t, \vec{x}) \mathcal{U}(t, t_0), \quad (2.89)$$

onde $\mathcal{U}(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)}$. Podemos obter um seguinte expressão partindo da Eq. (2.82)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}(x_1^\mu) \dots \hat{\phi}(x_m^\mu) | 0 \rangle &= \quad (2.90) \\ \langle 0 | \mathcal{U}^\dagger(t_1, t_0) \hat{\phi}^{(I)}(x_1^\mu) \mathcal{U}(t_1, t_0) \mathcal{U}^\dagger(t_2, t_0) \hat{\phi}^{(I)}(x_2^\mu) \mathcal{U}(t_2, t_0) \dots \mathcal{U}^\dagger(t_m, t_0) \hat{\phi}^{(I)}(x_m^\mu) \mathcal{U}(t_m, t_0) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Tendo em conta que, por definição, $\mathcal{U}(t_i, t_k) \mathcal{U}^\dagger(t_j, t_k) = \mathcal{U}(t_i, t_j)$, e assumindo que as coordenadas x_i^μ são ordenadas temporalmente $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_m \geq -t$, podemos chegar à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}(x_1^\mu) \dots \hat{\phi}(x_m^\mu) | 0 \rangle &= \langle 0 | \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) \mathcal{U}(t, t_1) \hat{\phi}^{(I)}(x_1^\mu) \mathcal{U}(t_1, t_2) \dots \mathcal{U}(t_{m-1}, t_m) \hat{\phi}^{(I)}(x_m^\mu) \mathcal{U}(t_m, -t) \mathcal{U}(-t, t_0) | 0 \rangle, \\ &= \langle 0 | \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) T \{ \hat{\phi}^{(I)}(x_1^\mu) \dots \hat{\phi}^{(I)}(x_m^\mu) \} \mathcal{U}(t, t_1) \mathcal{U}(t_1, t_2) \dots \mathcal{U}(t_m, -t) \mathcal{U}(-t, t_0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Utilizando a equação de Heisenberg, finalmente obtemos uma expressão de $\mathcal{U}(t, t')$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t') = \hat{H}^{(I)}(t) \mathcal{U}(t, t') \implies \mathcal{U}(t, t') = T \{ e^{[-i \int_{t'}^t dt' \hat{H}^{(I)}(t')] } \}, \quad (2.92)$$

e fazendo $t_0 = -t$ tender a $t \rightarrow \infty$, chegamos à expressão final

$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1^\mu) \dots \hat{\phi}(x_m^\mu) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}^{(I)}(x_1^\mu) \dots \hat{\phi}^{(I)}(x_m^\mu) e^{[i \int d^4 x^\mu \hat{H}^{(I)}(x^\mu)]} \} | 0 \rangle}{|0 \langle T \{ e^{[i \int d^4 x^\mu \hat{H}^{(I)}(x^\mu)]} \} | 0 \rangle|}. \quad (2.93)$$

Desenvolvendo a Eq. (2.93) em série as exponenciais e utilizando o teorema de Wick, que permite expressar o produto ordenado temporalmente em função de um produto simples [4, Sec. 6.3], podemos calcular ordem a ordem a amplitude de espalhamento, a partir da *fórmula LSZ* [5, Sec. 4.6]. Mas este processo é tedioso e precisa de ferramentas matemáticas avançadas, fazendo que seja pouco prático na hora de operar.

Contudo, os cálculos de perturbação ficam operacionalmente simplificados quando utilizamos as *regras de Feynman*, que reproduzem cada termo da série de perturbação a partir da identificação de certos ingredientes básicos que aparecem repetidas vezes durante o processo de expansão da fórmula LSZ.

2.4.3 Diagramas de Feynman

Para ilustrar como podemos aplicar as regras de Feynman, vamos olhar o seguinte diagrama do processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ em nível de árvore (*i.e.* sem loops)

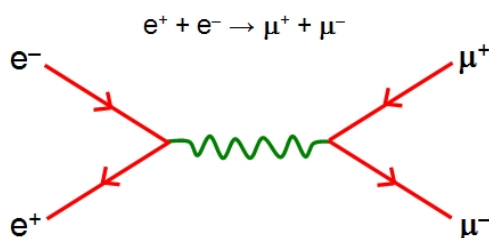


FIGURA 2.1: Representação diagramática (Diagrama de Feynman) do processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ em nível de árvore.

1. Por convenção, os diagramas mostram a evolução temporal do sistema a partir da esquerda para a direita, se não for mencionado o contrário. Portanto as partículas da esquerda são os estados iniciais (entrada) enquanto que as da direita representam os estados finais (saída).
2. As linhas retas com setas representam férmions ou anti-férmions. Se a seta aponta no sentido positivo do eixo temporal temos uma partícula, caso contrário temos representada uma anti-partícula.
Já as linhas onduladas representam bósons. No caso da QED esta linha representaria o bóson de gauge da teoria que é o fóton.
3. As linhas externas (vermelhas) representam as partículas iniciais e finais.
4. As linhas internas (verdes) representam a propagação das partículas que causam a interação, ou seja as que provoca a transição entre o estado inicial e final.
5. Os vértices são os pontos em que a interação acontece, onde uma partícula é acoplada com outra produzindo assim a interação correspondente. O número de vértices indica o ordem n dos diagramas, ou seja a que potência a constante de acoplamento será elevada.

Há diversos diagramas de diferentes ordens representando o mesmo processo, cada um produzindo uma contribuição para amplitude total. Contudo, nos restringiremos aos processos como o mostrado na Fig. 2.1, ou seja, processos de ordem mais baixa onde não há a presença de loops de partículas.

2.4.4 Regras de Feynman

As regras de Feynman permitem calcular a amplitude de probabilidade sem ter que lidar com os operadores de campo ou de criação e aniquilação.

Aplicando as regras aos diferentes diagramas podemos calcular a amplitude de Feynman associado ao diagrama \mathcal{M}_{if} . Tal grandeza nos permite calcular a amplitude de espalhamento a partir das Eqs. (2.77) e (2.79)

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \left[(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i^n p_i^\mu - \sum_j^m k_j^\mu \right) \right] i\mathcal{T}_{fi}, \quad (2.94)$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \prod_{j=1}^{n+m} \sqrt{2E_j V} \mathcal{T}_{fi}, \quad (2.95)$$

onde p_i^μ e k_j^μ são os quadri-momentos dos estados iniciais e finais respectivamente, ou seja, os momentos que são representados pelas linhas externas. A delta de kronecker δ_{fi} apresenta o caso em que o sistema permanece no mesmo estado inicial sem interagir.

A amplitude de Feynman, \mathcal{M}_{fi} é dada por

$$\mathcal{M}_{fi} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{fi}^{(n)}, \quad (2.96)$$

onde \mathcal{M}_{fi}^n é a contribuição de ordem n.

As amplitudes $\mathcal{M}_{fi}^{(n)}$ estão associadas a todos os diagramas de Feynman que são topologicamente diferentes e conexos, que contem n vértices, *i.e.*, $\mathcal{M}_{fi}^{(i)}$ é a soma das contribuições de todos os diagramas diferentes e conexos que tem i vértices.

Dois diagramas são topologicamente iguais se deformando as linhas, podemos converter um no outro. Por outro lado, um diagrama é conexo se entre os estados iniciais e finais não pode-se traçar nenhuma linha reta que não corte alguma linhas do diagrama [10, Sec. 6.2].

Apesar de estarmos interessados em estudar a aniquilação do par elétron-anti-elétron em ordem mais baixa. Por completeza, vamos enunciar aqui as regras de Feynman que são válidas para qualquer ordem n. A regras são:

1. Para cada vértice escrevemos um fator

$$ie\gamma^\alpha.$$

2. Temos que impor conservação do quadri-momento (it i.e. conservação de energia e momento linear) em cada vértice.

3. Para cada linha interna escrevemos seu respectivo propagador, que pode ser:

(a) Bóson escalar (spin 0), representado por linhas retas descontínuas:

$$iD_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

(b) Férmion (spin 1/2), representado por linhas retas contínuas:

$$iS_F(p) = i \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

(c) Bóson vetorial (spin 1) sem massa, representado por linhas onduladas ⁵:

$$iD_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left[g^{\mu\nu} + (1 - \zeta) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right],$$

onde $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lembramos que o único bóson conhecido com spin 0 (escalar) é o bóson de Higgs.

4. Para cada linha externa

(a) Para um férmion inicial:

$$u_s(\vec{p}).$$

(b) Para um férmion final:

$$\bar{u}_s(\vec{p}).$$

(c) Para um anti-férmion inicial:

$$\bar{v}_s(\vec{p}).$$

(d) Para um anti-férmion final:

$$v_s(\vec{p}).$$

(e) Para um bóson inicial:

$$\epsilon_s^\mu(k, \lambda).$$

⁵ O parâmetro ζ é o chamado parâmetro de gauge para $\zeta = 1$ temos o gauge t'Hooft-Feynman; $\zeta = 0$ gauge de Landau e $\zeta = \infty$: gauge unitário

(f) Para um bóson final:

$$\epsilon_s^{*\mu}(k, \lambda).$$

5. Os fatores espinoriais, matrizes γ , funções S_F e quadri-spinores que obedecem a álgebra matricial (4×4) estão ordenados de modo que, quando lemos a expressão da direita à esquerda, aconteçam na mesma ordem que quando seguimos a linha fermiônica na direção da sua seta.
6. Para cada loop fermiônico fechado, devemos escrever seu traço e multiplicar por um fator (-1) .
7. Para cada momento interno q^μ do loop temos que integrar

$$\int \frac{d^4 q^\mu}{(2\pi)^4}$$

8. Multiplicar por $+1$ ou -1 se é necessário fazer um número par ou ímpar de permutações de operadores fermiônicos vizinhos para escrever os operadores fermiônico no ordenamento normal.

Especificamos que não é necessário escrever os propagadores externos para escalares ou férmions, pois eles são cancelados na *fórmula LSZ*. Além disso, não temos em conta os fatores $(\sqrt{Z})^{n+m}$, porque são irrelevantes nos cálculos em ordem mais baixa.

2.4.5 Largura de decaimento

A *largura de decaimento* é a probabilidade de que uma partícula inicial $|i\rangle = |\vec{P}\rangle$ se desintegre em n partículas $|f\rangle = |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \dots, \vec{p}_n\rangle$ com $|f\rangle \neq |i\rangle$ por unidade de tempo. Na Fig. 2.2 representamos o decaimento de uma partícula inicial com momento P e massa M em duas partículas de momentos p_1 e p_2 e massas m_1 e m_2 respectivamente.

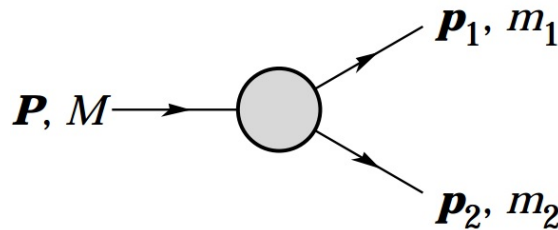


FIGURA 2.2: Representação diagramática do decaimento de uma partícula com momento P e massa M em duas partículas de momentos p_1 e p_2 e massas m_1 e m_2 respectivamente.

De acordo com a Eq. (2.94) a probabilidade de transição deste processo fica

$$d\omega = \left| (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i^n p_i^\mu - P^\mu \right) i T_{fi} \right|^2 dN_f, \quad (2.97)$$

onde N_f é o número de estados de n partículas com momentos entre \vec{p}_i e $\vec{p}_i + d\vec{p}_i$ definido como

$$dN_f = \prod_{i=1}^n \frac{V d^3 p_i^\mu}{(2\pi)^3}. \quad (2.98)$$

Conhecendo a Eq. (2.95) obtemos a *largura de decaimento*⁶ como sendo :

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_P} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n, \quad (2.99)$$

onde $d\Phi_n$ é o espaço fase de n corpos definido como sendo o produto

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i^n p_i^\mu - P^\mu \right) \prod_{i=1}^n \frac{V d^3 p_i^\mu}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (2.100)$$

2.4.6 Seção de Choque

A *seção de choque* σ é o área efetiva de uma partícula (alvo) vista por um projétil (do feixe incidente).

Na Fig. 2.3 supomos que no alvo há N_A partículas, e que a superfície de colisão é dado por uma área A .

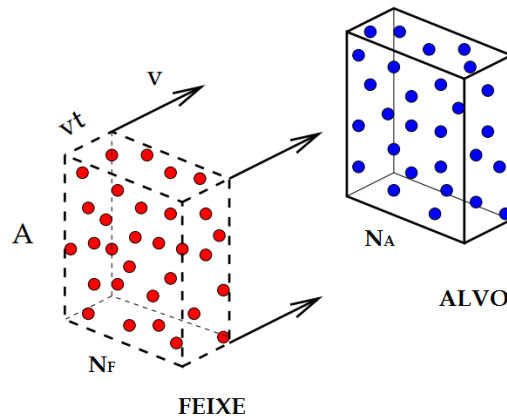


FIGURA 2.3: Representação esquemática da colisão de um feixe de partículas com uma alvo.

⁶ $\tau = \Gamma^{-1}$ é a vida média

A probabilidade de colisão de uma partícula do feixe com o alvo é dada por:

$$P = \frac{N_A \sigma}{A}. \quad (2.101)$$

Se há N_F partículas no feixe, então o número de sucessos é $N_F P$

$$(\#sucessos) = N_F \frac{N_A \sigma}{A}, \quad (2.102)$$

assim a seção de choque é dada por

$$\sigma = \frac{\#sucessos}{\rho v t N_A}. \quad (2.103)$$

σ expressa a probabilidade de transição por unidade de tempo entre o fluxo incidente. A probabilidade de transição é equivalente à *largura de decaimento* dada pela Eq. (2.99), pois é igual ao número de desintegrações se o estado inicial consiste só em uma partícula. Por outro lado, o fluxo incidente, se consideramos que colidem uma partícula do feixe com outra do alvo, com massas m_1 e m_2 , e supondo que são colineares, e o seguinte:

$$\rho v = \frac{1}{V} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \frac{1}{V} \left| \frac{\vec{k}_1}{E_F} - \frac{\vec{k}_2}{E_A} \right| = \frac{[(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2]}{V E_F E_A}. \quad (2.104)$$

Finalmente, obtemos a fórmula da *seção de choque*:

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_n. \quad (2.105)$$

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Aniquilação de um par elétron-pósitron

Consideramos a aniquilação de um elétron e um pósitron para criar um múon e um anti-múon. Em QED este processo é descrito em ordem mais baixo de *teoria de perturbação* pelo diagrama da Fig. 3.1.

Lembramos que o múon tem a mesma carga que o elétron, $Q_\mu = Q_e = -1$, entretanto, sua massa é 200 vezes maior que a de um elétron, $m_\mu \approx 200m_e$.

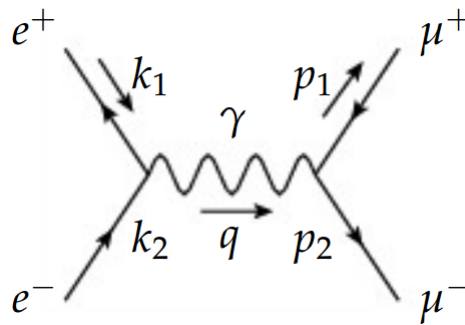


FIGURA 3.1: O diagrama de Feynman para o processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Vamos calcular a amplitude $i\mathcal{M}$ do diagrama fazendo uso das *regras de Feynman* e supondo que as partículas estão não-polarizadas, ou seja o spin das partículas podem apontar para qualquer direção permitada.

O primeiro passo é atribuir quadri-momentos a todas as partículas que compõem o processo que está representado diagramaticamente na Fig. 3.1. Além disso, vamos dizer que os elétrons carregam spins r_1, r_2 enquanto que os múons s_1, s_2 .

Impomos a conservação do quadri-momento em cada vértice, como descrito pela regra

de Feynman (2), obtemos

$$k_1^\mu + k_2^\mu = q^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu. \quad (3.1)$$

Percorrendo cada linha fermiônica no sentido contrário ao fluxo fermiônico (Regra de Feynman (5)), podemos escrever a amplitude como sendo

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2)]_{\{4b\}} [ie\gamma^\nu]_{\{1\}} [v_{s_1}(\vec{p}_1)]_{\{4d\}} \left[i \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \right]_{\{3c\}} [\bar{v}_{r_1}(\vec{k}_1)]_{\{4c\}} [ie\gamma^\mu]_{\{1\}} [u_{r_2}(\vec{k}_2)]_{\{4a\}}.$$

onde utilizamos o gauge de 't Hooft-Feynman, $\zeta = 1$, e operando o tensor métrico obtemos ¹

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2) \gamma^\nu v_{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}_{r_1}(\vec{k}_1) \gamma_\nu u_{r_2}(\vec{k}_2). \quad (3.2)$$

Agora temos que determinar $|\mathcal{M}|^2$, para isso devemos lembrar que

$$(\bar{u}\gamma^\alpha v)^* = v^\dagger \gamma^{\alpha\dagger} \bar{u}^* = v^\dagger \gamma_\alpha (u^\dagger \gamma^0)^* = v^\dagger \mathbf{1} \gamma_\alpha \gamma^0 u = v^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 u = \bar{v} \gamma^\alpha u, \quad (3.3)$$

o que nos leva a

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2) \gamma^\mu v_{s_1}(\vec{p}_1) \bar{v}_{s_1}(\vec{p}_1) \gamma^\nu u_{s_2}(\vec{p}_2) \bar{v}_{r_1}(\vec{k}_1) \gamma_\mu u_{r_2}(\vec{k}_2) \bar{u}_{r_2}(\vec{k}_2) \gamma_\nu v_{r_1}(\vec{k}_1). \quad (3.4)$$

A partir da definição dos spinors da Eq. (2.40) pode-se calcular os seguintes produtos [3, Sec. 3.3]:

$$\begin{aligned} \sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) &= (\not{p} + m), \\ \sum_s v_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) &= (\not{p} - m). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Então, calculando a média sobre todos os spins obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum_r \sum_s} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{r_i=1,2} \sum_{s_i=1,2} |\mathcal{M}|^2, \\ &= \frac{e^4}{4q^4} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p}_1 - m_\mu) \gamma^\nu (\not{p}_2 + m_\mu) \right] Tr \left[\gamma_\mu (\not{k}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{k}_1 - m_e) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

¹ $\gamma_\nu = g_{\nu\mu} \gamma^\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu$

Podemos aplicar na expressão anterior as propriedades das matrizes gamma que vimos na Eq. (2.31) [14, Sec. 3.5] *i.e.*

$$\text{Tr} \left[\# \text{ impar de } \gamma' s \right] = 0, \quad (3.7)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (3.9)$$

de tal forma que os traços se reduzem a

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_1 - m_\mu) \gamma^\nu (\not{p}_1 + m_\mu) \right] &= \text{Tr} \left[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \right] - m_\mu^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu], \\ &= 4(p_1^\mu p_1^\nu - (p_1^\mu p_{2\mu}) g^{\mu\nu} + p_1^\nu p_1^\mu) - 4m_\mu^2 g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_\mu (\not{k}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{k}_1 - m_e)] &= \text{Tr} [\gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu \not{k}_2] - m_e^2 \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta], \\ &= 4(k_{1\mu} k_{2\nu} - (k_1^\mu k_{2\mu}) g_{\mu\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) - 4m_e^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo e simplificando na Eq. (3.6) obtemos

$$\widetilde{\sum}_r \sum_s |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[(p_1^\mu k_{1\mu})(p_2^\mu k_{2\mu}) + (p_1^\mu k_{2\mu})(p_2^\mu k_{1\mu}) + m_e^2 (p_1^\mu p_{2\mu}) + m_\mu^2 (k_1^\mu k_{2\mu}) + 2m_\mu^2 m_e^2 \right]. \quad (3.12)$$

O passo seguinte é escolher o sistema de coordenadas. Por simplicidade escolhemos o centro de massa. Neste sistema, definimos θ o ângulo entre o momento do μ^+ com o momento do e^+ de tal forma que

$$k_1^\mu = E(1, 0, 0, \beta_i), \quad (3.13)$$

$$k_2^\mu = E(1, 0, 0, -\beta_i), \quad (3.14)$$

$$p_1^\mu = E(1, \beta_f \sin\theta, 0, \beta_f \cos\theta), \quad (3.15)$$

$$p_2^\mu = E(1, -\beta_f \sin\theta, 0, -\beta_f \cos\theta), \quad (3.16)$$

onde $\beta_i = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}$ e $\beta_f = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}$.

Lembramos que os quadri-momentos k_1^μ e k_2^μ são colineares pela equação de conservação expressada na Eq. (3.1).

Então, tendo em conta o produto quadri-vetorial², cada termo da Eq. (3.12) se reduz a

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2 = (2E)^2, \quad (3.17)$$

$$(p_1 \cdot k_1) = (p_2^\mu k_{2\mu}) = E^2(1 - \beta_i \beta_f \cos\theta), \quad (3.18)$$

$$(p_1 \cdot p_2) = E^2(1 + \beta_f^2) = E^2\left(2 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right), \quad (3.19)$$

$$(k_1 \cdot k_2) = E^2(1 + \beta_i^2) = E^2\left(2 - \frac{m_e^2}{E^2}\right). \quad (3.20)$$

Assim a amplitude para este processo se torna

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum}_r \sum_s |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2E^4} [2E^4(1 + \beta_i^2 \beta_f^2 \cos^2\theta) + 2E^2(m_e^2 + m_\mu^2)] \\ &= e^4 \left[1 + 4 \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E_{cm}^2} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{E_{cm}^2}\right) \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}\right) \cos^2\theta \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A seção de choque diferencial do processo é definida a partir da Eq. (2.3), particularizando para um processo de espalhamento $2 \rightarrow 2$ temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} |\mathcal{M}|^2. \quad (3.22)$$

Substituindo a amplitude de espalhamento dada pela Eq. (3.21) obtemos que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{\frac{E_{cm}^2 - 4m_\mu^2}{E_{cm}^2 - 4m_e^2}} \left[1 + 4 \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E_{cm}^2} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{E_{cm}^2}\right) \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}\right) \cos^2\theta \right]. \quad (3.23)$$

onde α é a *constante de estrutura fina* definida como $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

A expressão pode ser simplificada se desprezamos a massa do elétron, m_e , com respeito à massa do múon m_μ , que sabemos que é 200 vezes menor, desta forma chegamos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right]. \quad (3.24)$$

Finalmente, integrando no ângulo sólido $d\Omega$ a seção de choque total é dada por

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \quad (3.25)$$

² $A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$

Este resultado se interpreta como a probabilidade de que um elétron e um pósitron que colidem e se aniquilem para dar origem a um par múon e um anti-múon por unidade de tempo e fluxo incidente.

Se comparamos os dados experimentais com a predição teórica, podemos assegurar que a validade da expressão (3.25), como vemos na Fig. 3.2, onde representamos a seção choque em função da energia do centro de massa $E_{cm} = 2E$. Observe que este gráfico foi feito para energias muito maiores que a energia do limiar de produção dois múons que $E_{cm} = 2m_\mu$. Portanto este gráfico representa o limite assintótico da Eq. (3.25) que é dado por

$$\sigma \longrightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}. \quad (3.26)$$

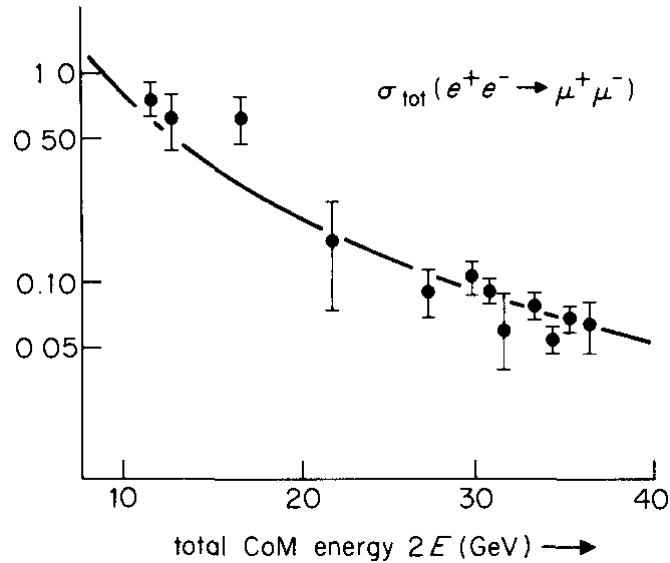


FIGURA 3.2: Representação da seção de choque total do processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ para energias muito maiores que o limiar de produção do par de múons.

3.2 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$

O outro processo que vamos considerar consiste na aniquilação de um elétron e um pósitron para criar, neste caso, um tau e um anti-tau. Este processo é análogo ao anterior, como vemos no diagrama da Fig. 3.3.

A carga do tau também é a mesma que a do elétron e múon, $Q_\tau = Q_e = -1$, enquanto que sua massa é ainda maior, tendo um valor quase 3500 vezes maior que a de elétron, $m_\tau \approx 3500m_e$.

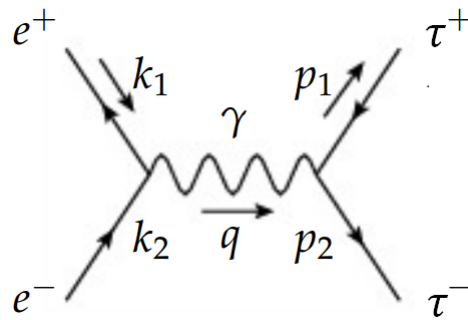


FIGURA 3.3: O diagrama de Feynman para o processo $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$.

Podemos utilizar os mesmos cálculos da seção choque do processo anterior dado pela Eq. (3.25), pois a única diferença entre os dois é a massa das partículas do estado final, desta forma temos que

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\tau^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\tau^2}{E^2}\right). \quad (3.27)$$

Se representamos de novo a seção choque dada pela equação acima para energias muito maiores que as necessárias para a produção do par tau e anti-tau, *i.e.* $E_{cm} \gg 2m_\tau$, obtemos o gráfico da Fig. 3.4.

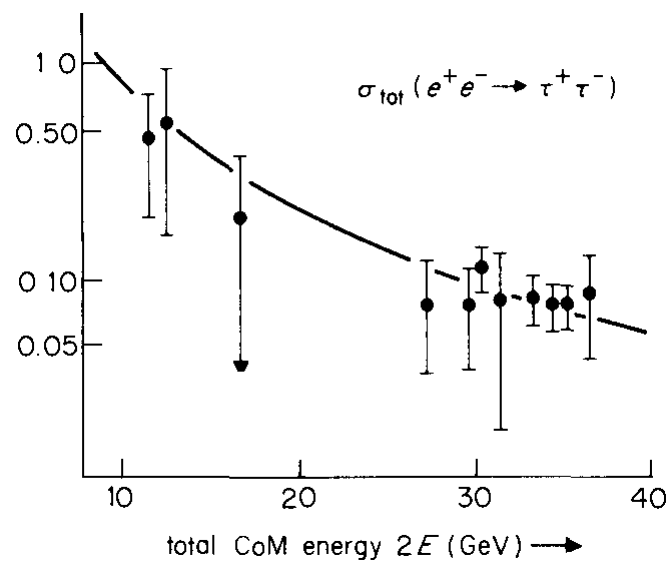


FIGURA 3.4: Representação da seção choque total do processo $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ no limite de $E_{cm} \gg 2m_\tau$.

Capítulo 4

Conclusões

Apresentamos uma introdução básica e sucinta à *Teoria Quântica de Campos* onde supusemos que o leitor não tinha nenhum conhecimentos prévios sobre este tópico.

Começamos explicando o conceito de invariância de gauge e mostramos como o Eletromagnetismo clássico pode ser considerado uma Teoria de Gauge. Depois quantizamos os campos eletromagnéticos, para que desta forma estes campos tenham validade tanto no âmbito do mundo quântico como relativístico. Além disso, escrevemos a versão covariante da equação de Schrödinger que é conhecida como equação de Dirac que prediz a existência de partículas com energia negativas que são as anti-partículas.

Uma vez quantizado o campo eletromagnético, definimos a matriz de espalhamento S e mostramos explicitamente como podemos determinar, a partir dela, a amplitude de espalhamento que é necessária para determinar a seção de choque dos processos de espalhamento de partículas em geral.

O passo seguinte foi a introdução das regras de Feynman que formam um conjunto de relações que ajudam a escrever a amplitude de espalhamento de qualquer processo físico de uma maneira mais simples, evitando assim o uso da fórmula LSZ.

Como exemplo de aplicação das regras de Feynman, calculamos a seção de choque para os processos elementares em nível de árvore da QED. Os dois processos considerados foram $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ e $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$. Os resultados teóricos obtidos para essas duas seções de choque foram comparados com os dados experimentais disponíveis na literatura. Vimos que a QED em ordem mais baixa, já descreve com bastante precisão os dados experimentais para ambos espalhamentos.

Finalmente, vale ressaltar que o processo de espalhamento analisado tem extrema importância para a física de partículas elementares, já que ele é a base para entender processos mais complexos. Um exemplo é quando a aniquilação de elétron e um pósitron

gera um par quark e anti-quark que posteriormente se hadroniza. Infelizmente devido a sua complexidade, o estudo deste processo não foi considerado aqui neste trabalho. Mas, com certeza o entendimento deste processo e suas consequências para a física de partículas seria a continuação natural do estudo apresentado aqui.

Capítulo 5

Apreciação de relatório pre-final

Neste segundo relatório, o estudante apresenta de maneira sucinta uma descrição do cálculo da seção de choque de processos de aniquilação elétron-pósitron gerando como estados finais um par de lepton e anti-léptons. O estudante encontrou uma série de dificuldades para fazer a comparação final com os dados experimentais e precisaria de mais tempo para solidificar o conteúdo do estudo apresentado aqui. Entretanto, considero que para um estudo inicial do Teoria de Campos o desempenho do estudante foi razoável.

Referências Bibliográficas

- [1] I. J.R. Aitchison and A. J.G. Hey. Gauge Theories in Particle Physics (3rd ed.). Tylor & Francis Group, New York, 2003.
- [2] D. J. Griffiths (2nd ed.). Introduction to Elementary Particles (2nd ed.). WILEY-VCH, Portland, 2008.
- [3] M. E. Peskib and D. V. Schroeder. An Introduction To Quantum Field Theory (1st ed.). Westview Pr, Massachussets, 1995.
- [4] F. Mandl and G. Shaw. Quantum Field Theory (1st ed.). John Wiley & Sona, Manchester, 1984.
- [5] J. I. Illana. Teoría Cuántica de Campos. Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, Granada, 2013.
- [6] H. Goldstein. Classical Mechanics (2nd ed.). Addison-Wesley, New York, 1980.
- [7] J. D. Jackson. Electrodinâmica Clássica (2nd ed.). Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1983.
- [8] D. J. Griffiths. Introduction to Electrodynamics (3rd ed.). Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [9] E. Fradkin. General Field Theory. University of Illinois at Urbana-Champaign, Physics 582, Urbana, 2013.
- [10] A. J. Sarsa Apuntes de Teoría Cuántica de Campos. Universidad de Córdoba, Córdoba, 2010.
- [11] J. Forshaw. An Introduction to QED and QCD. School for Young High Energy Physicists, Rutherford Appleton Laboratory, Manchester, 1997.
- [12] D. P. Barber. Test of universality of charged leptons. Phys.Rev.Lett. 43 (1979) 1915.
- [13] W. Bacino. Measurement of the Threshold Behavior of $\tau^+ \tau^-$ Production in $e^+ e^-$ Annihilation. Phys.Rev.Lett. 41 (1978) 13.

- [14] M. Kaku. Quantum Field Theory. A Modern Introduction. Oxford University Press, Inc., New York, 1993.
- [15] S. Carroll. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison-Wesley, San Francisco, 2004.
- [16] J. Vanderlinde. Classical Electromagnetic Theory (2nd ed.). Springer, Dordrecht, 2004.
- [17] B. Thaller. The Dirac Equation Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [18] E. F. Taylor and J. A. Wheeler. Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity (2nd ed.). W. H. Freeman and Company, New York, 1992.
- [19] T. Ohlsson. Relativistic Quantum Physics: From Advanced Quantum Mechanics to Introductory Quantum Field Theory (1st ed.). Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [20] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Dover Publication, New York, 1993.
- [21] P. A.M. Dirac. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. Proc. Roy. Soc., A 133, 60, 1931.
- [22] D. J. Miller. Relativistic Quantum Mechanics. SUPA Graduate School, Glasgow, 2008.
- [23] P. R. Halmos. Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity. Chelsea Publishing Company, New York, 1951.