Relatório pré-final: Dedução do Princípio de Fermat através das equações de Maxwell e Geodésicas em espaço-tempo Lorentzianos

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira
Orientanda: Renata Santos de Oliveira

r137466 arroba dac dot unicamp dot br

4 de julho de 2017

1 Resumo

Iremos partir das equações de Maxwell para ondas planas monocromáticas em meio de índice de refração variável. A partir da leitura das equações de Maxwell como função de onda trataremos da equação de Hamilton-Jacob, traçaremos o princípio de mínima ação para uma partícula e analogamente traçaremos o Princípio de Fermat.

2 Introdução

A partir do princípio variacional para descrever o movimento de partículas é possível minimizar a trajetória e o tempo de viagem da luz em qualquer meio, no que é chamado Princípio de Fermat, por isso partiremos das equações de Maxwell para fazer esse cálculo [2].

3 Equações de Maxwell e função de onda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{(Lei de Gauss)}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(Lei de Gauss para campo magnético)}, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Lei de Faraday da indução)}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Lei de Ampère)}. \tag{4}$$

A distribuição do campo no espaço está determinada, para onda monocromática, pela equação

$$\nabla f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \tag{5}$$

E sua solução é

$$f = \vec{A}_o e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} \;\Rightarrow\; \vec{A} = \Re e \,\{\vec{A}_o e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})}\} \tag{6}$$

Que chama-se Potencial A

$$\vec{A} = A_o e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} \; (\textit{Potencial A em uma dimensao}) \;\Rightarrow \tag{7}$$

$$\vec{A} = \vec{A_o} e^{-i\omega(t-\frac{\vec{r}}{c})} \Rightarrow \vec{A} = \vec{A_o} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \ (Potencial\ \vec{A}\ tridimensional) \tag{8}$$

Explicitamente $\vec{A}$ é

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \Rightarrow \tag{9}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_{ox}e^{i(k^1x+k^2y+k^3z-\omega t)}\hat{\imath} + A_{oy}e^{i(k^1x+k^2y+k^3z-\omega t)}\hat{\jmath} + A_{oz}e^{i(k^1x+k^2y+k^3z-\omega t)}\hat{k}, \tag{10}$$

com $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ (frequência angular), $\vec{k} = \frac{\omega\hat{n}}{c} \Rightarrow \vec{k} = (k^1, k^2, k^3)$, onde $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ (Vetor de onda), λ (comprimento da onda) e c (velocidade da luz).

Definição: o campo elétrico $\vec{E}$ é oposto da derivada do potencial $\vec{A}$ em função do tempo multiplicado pelo inverso da velocidade da luz, como descrito abaixo

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\vec{A_o}e^{i\frac{\omega\ (\vec{r}-t)}{c}})}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{A_o}\omega i}{c}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \tag{12}$$

e o campo magnético $\vec{B}$ é o rotacional do potencial $\vec{A}$, como descrito abaixo

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{13}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\imath} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\jmath} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{k} \Rightarrow \tag{14}$$

$$\Rightarrow (A_{oz}k^2 - A_{oy}k^3)ie^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{\imath} + (A_{ox}k^3 - A_{oz}k^1)ie^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{\jmath} + (A_{oy}k^1 - A_{ox}k^2)ie^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{k} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = (B_1\hat{\imath} + B_2\hat{\jmath} + B_3\hat{k})ie^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{16}$$

sendo $\vec{A_o} = (A_{ox}, A_{oy}, A_{oz})$ e $\vec{k}$ constantes.

3.1 Ótica geométrica e princípio variacional

A ação correspondente a uma partícula que se move em um campo eletromagnético dado se comporta de dois jeitos:

(i) a ação para a partícula livre; (ii)a ação da partícula com campo.

O último deve conter magnitudes que caracterizam a partícula e o campo.

As propriedades de uma partícula em um campo estão determinadas por um único parâmetro, da carga e partícula (esta proposição está baseada em dados experimentais, de forma que a ação de uma partícula em um campo eletromagnético não pode ser baseada apenas em considerações gerais, como a condição de invariância relativística).

A função ação é solução da equação de continuidade $\nabla_\mu T^{\nu\mu} = 0$ e é dada por

$$-\frac{e}{c}\int A_i dx^i, \tag{17}$$

com e: carga da partícula e A_i é um quadrivetor que a rigor seria um tensor energia-momento T^{ik}.

A função ação correspondente a uma carga em um campo eletromagnético tem a forma

$$S = \int(-mc \cdot ds - \frac{e}{c}A_i dx^i) \tag{18}$$

As três componentes espaciais de A_i formam um vetor de três dimensões $\vec{A}$, chamado *vetor potencial* do campo. A componente temporal tem a forma $A_0 = \phi$ e se chama *potencial escalar* do tempo $\Rightarrow A_i = (\phi, \vec{A})$.

$$S = \int (-mc \cdot ds + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot d\vec{r} - e\phi dt) \tag{19}$$

com velocidade da partícula $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

$$\Rightarrow \ S = \int (-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi)dt \tag{20}$$

$$\Rightarrow \ L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}A\vec{\cdot}\,\vec{v} - e\phi \tag{21}$$

Esta Lagrangeana se difere de uma em um sistema de uma partícula livre nos termos $\frac{e}{c}A\vec{\cdot}\,\vec{v} - e\phi$ que descreve a interação da carga com o campo.

O momento generalizado $\vec{P}$ é definido por

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}} = \vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \text{ com } \vec{p}\text{: momento.} \tag{22}$$

Da Lagrangeana se deduz a Hamiltoniana correspondente a uma partícula em um campo mediante

$$H = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L \tag{23}$$

Substituindo a eq.(21) na eq.(23), temos

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi \tag{24}$$

Como a Hamiltoniana deve ser expresa em função do momento generalizado $\vec{P}$:

$$H - e\phi \text{ e } \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \ \Rightarrow \ H \text{ e } \vec{P} \tag{25}$$

$$\Rightarrow \ (\frac{H - e\phi}{c})^2 = m^2c^2 + (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 \tag{26}$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\phi \tag{27}$$

Para pequenas velocidades a Lagrangeana fica

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi \tag{28}$$

Nesta aproximanção, temos

$$\vec{P} = m\vec{v} = \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{29}$$

Então a Hamiltoniana torna-se

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\phi \tag{30}$$

Subistituindo $\vec{P}$ por $\frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{r}}$ e H por $-\frac{\partial S}{\partial t}$, temos a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula em um campo eletromagnético

$$(\nabla S - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{1}{c^2}(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi)^2 + m^2c^2 = 0 \tag{31}$$

Com ϕ sendo o potencial escalar do campo e m sendo a massa da partícula.

A aproximação ótica é $\lambda \to 0$.

O campo de uma onda plana e monocromática, seja ele elétrico $\vec{E}$ ou magnético $\vec{B}$, pode ser descrito na forma da função

$$f = a \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = a \cdot e^{i\psi} \tag{32}$$

E o argumento chamamos de fase

$$\psi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t \quad \text{(Fase)} \tag{33}$$

Expandindo a fase em Taylor até primeira ordem, temos

$$\psi = \psi_o + \vec{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t} \Rightarrow \tag{34}$$

$$\Rightarrow \ \vec{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}} \equiv \nabla\psi, \ \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \ \text{com } \vec{k}\text{(vetor de onda) e } \omega\text{(frequência angular).} \tag{35}$$

Na forma quadrimensional, a relaçao acima pode ser descrita como

$$k^i = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \ \text{(Quadrivetor de onda, com } i = 0, ..., 3) \tag{36}$$

$$k^0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_0} = -\frac{\partial\psi}{\partial t} = -(-\omega) = \omega \tag{37}$$

$$k^1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -k^1, \ k^2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -k^2, \ k^3 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_3} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = -k^3 \tag{38}$$

$$\vec{k} = \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial\vec{r}}, \ H = \omega = -\frac{\partial S}{\partial t,} \tag{39}$$

e $k = \omega/\text{c} \equiv p = \varepsilon/\text{c}$, o vetor de onda é análogo ao momento da partícula, ε: energia de uma partícula de massa nula

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial\vec{r}} \ \equiv \ \dot{k} = -\frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}}, \tag{40}$$

$$\vec{v} = \frac{\partial H}{\partial\vec{p}} \ \equiv \ \dot{r} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}. \tag{41}$$

Suponhamos uma onda que é superposição de ondas monocromáticas com frequências pertencentes a um pequeno intervalo e que ocupam uma certa região no espaço. Com a relação entre quadrivetor do tipo energia-momento e o tensor energia-momento, temos,

$$p^i = Ak^i, \ \text{onde } A \text{ é um escalar} \tag{42}$$

Na forma tridimensional a relação é

$$\vec{p} = A\vec{k}, \ \varepsilon = A\omega \tag{43}$$

Aqui aplicaremos o princípio de mínima ação da mecânica na ótica geométrica, mas não aplicaremos a Lagrangeana análoga, pois ela não existe. O sistema de ótica geométrica é análoga ao sistema de partícula sem massa. Se $\omega =$ constante, equação iconal se torna:

$$\psi = -\omega t + \psi_o(x, y, z). \ \text{onde } \psi_o \text{ depende apenas das coordenadas.} \tag{44}$$

A direção da onda está determinada por $\nabla\psi_0$.

Quando a energia é constante em um sistema de partícula, o pricípio de mínima ação é chamado princípio de Maupertuis (onde também o momento $\vec{p}$ é expresso em função da energia e das derivadas coordenadas.

$$\delta S = \delta\int \vec{p}\cdot d\vec{l} = 0 \ \text{(integração ao longo da trajetória da partícula entre 2 pontos dados)} \tag{45}$$

Analogamente, em um sistema ondulatório, temos o que se chama princípio de Fermat

$$\delta\psi = \delta \int \vec{k} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ com } \vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n} \Rightarrow d\vec{l} \cdot \hat{n} = dl \Rightarrow \delta \int dl = 0, \tag{46}$$

que corresponde a propagação retilínea da luz.

4 Dedução da Equação das Geodésicas de um Espaço-Tempo Lorentziano.

Seja $(M, \boldsymbol{g}, D, \tau_{\boldsymbol{g}}, \uparrow)$ um espaço-tempo Lorentziano[1] que é modelo de um dado campo gravitacional de acordo com a teoria da Relatividade Geral (**TRG**). Nesta teoria, partículas massivas e fotons são supostos corpos de prova que não alteram a métrica

Sejam $\{\boldsymbol{x}^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ funções coordenadas cobrindo $U \subset M$ e seja

$$\sigma : \mathbb{R} \to M, \quad \lambda \mapsto \sigma s(\lambda) \tag{47}$$

uma curva em M. Escreveremos para simplificar a notação

$$\boldsymbol{x}^\mu \circ \sigma(\lambda) = x^\mu(\lambda). \tag{48}$$

O campo vetorial tangente a curva (i.e., sua velocidade) é

$$\sigma_{*\lambda} = \dot{\sigma}(\lambda) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{49}$$

Em uma variedade Lorentziana temos três tipos de curvas dependendo do sinal de

$$\boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda}, \sigma_{*\lambda}) = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \tag{50}$$

Temos:

$$\begin{cases} \text{tipo tempo} & \boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda}, \sigma_{*\lambda}) > 0, \\ \text{tipo luz (ou nula)} & \boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda}, \sigma_{*\lambda}) = 0, \\ \text{tipo espaço} & \boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda}, \sigma_{*\lambda}) < 0. \end{cases} \tag{51}$$

Para curvas tipo tempo que modelam as linhas de universo de partículas massivas é usual tomar-se o parâmetro λ como sendo o tempo próprio denotado por s e neste caso.

$$\boldsymbol{g}(\sigma_{*\tau}, \sigma_{*\tau}) = 1. \tag{52}$$

Definição 1 *O comprimento de arco entre os eventos $\mathfrak{e}_1 = \sigma(a)$ and $\mathfrak{e}_2 = \sigma(b)$ $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in M)$ ao longo da curva σ, tal que para todo $\lambda \in I$, $\boldsymbol{g}(\sigma_{*u}, \sigma_{*u})$ tem o mesmo sinal em todos os pontos de $\sigma(\lambda)$ é a quantidade*

$$\int_a^b du \left[|\boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda}, \sigma_{*\lambda})|\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{53}$$

Observe que usando o evento $\sigma(a)$ como ponto de referência podemos usar a Eq.(53) para definir uma função com domínio $\sigma(I)$ por

$$\mathtt{s} : \sigma(I) \to \mathbb{R}, \ \mathtt{s}(\sigma(\lambda)) = s(\lambda) = \int_r^\lambda d\lambda u' \left[|\boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda'}, \sigma_{*\lambda'})|\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{54}$$

Com a Eq.(54) podemos calcular a derivada da função s (após introduzir funções coordenadas $\{\boldsymbol{x}^\mu\}$ para $U \subset M$ (o domínio de interesse). Temos

$$\frac{ds}{d\lambda} = \left[|\boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda'}, \sigma_{*u'})|\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left|g_{\mu\nu}\frac{d\boldsymbol{x}^\mu \circ \sigma}{d\lambda}\frac{d\boldsymbol{x}^\nu \circ \sigma}{du\lambda}\right|\right]^{\frac{1}{2}} \tag{55}$$

[1] $\boldsymbol{g} \in \sec T_0^2 M$ é uma metrica Lorentzina em M, D é a conexão de Levi-Civita de $\boldsymbol{g}$ A variedade 4-dimensonal M é orientada por $\tau_{\boldsymbol{g}} \in \sec \bigwedge^4 T^*M$ e orientada no tempo por $\uparrow$. Detalhes em [8]

Dada a Eq.(55) livros antigos de geometria diferencial e a maioria dos textos sobre a TRG escrevem a equação

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{56}$$

que é suposto representar o quadrado do elemento infinitesimal de arco determinado pela variação de coordenadas

$$\boldsymbol{x}^\mu \circ \sigma(r) \mapsto \boldsymbol{x}^\mu \circ \sigma(\lambda) + \frac{d\boldsymbol{x}^\mu \circ \sigma}{d\lambda}(\lambda)\varepsilon, \tag{57}$$

onde $\varepsilon << 1$.

Definição 2 *Um curva $\sigma : \mathbb{R} \to M, \quad \lambda \mapsto \sigma(\lambda)$ em $(M, \boldsymbol{g}, D, \tau_{\boldsymbol{g}}, \uparrow)$ é dita uma geodésica se for a curva que torna um extremo a ação*

$$\mathcal{A} = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda = \int \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\lambda \tag{58}$$

Observação 3 *Pode-se mostrar que a TRG implica que as linhas de universos de partículas massivas são geodésicas tipo-tempo*[2] *e é um postulado da TRG que as linhas de universo de fotons (partículas de massa nula) são representados por geodesicas nulas, i.e., além de tornar $\mathcal{A}$ um extremo, devem ser curvas tipo luz, e portanto satisfazerem também*

$$\boldsymbol{g}(\sigma_{*\lambda}, \sigma_{*\lambda}) = 0. \tag{59}$$

Observação 4 *Note que para uma partícula massiva parametrizada pelo tempo próprio, o tempo próprio total entre os eventos $\mathfrak{e}_1$ e $\mathfrak{e}_2$ é:*

$$\tau_{\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2} = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} ds \tag{60}$$

e portanto vemos que uma geodésica extremiza o comprimento da curva, i.e., o tempo próprio registrado por um relógio padrão carregado pela partícula.

4.1 Dedução da Equação das Geodésicas

Temos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right) ds \\ &= \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right|_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} + \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right] \delta x^\mu ds \end{aligned} \tag{61}$$

e como $\delta x^\mu(\mathfrak{e}_1) = \delta x^\mu(\mathfrak{e}_2) = 0$, $\delta\mathcal{A} = 0$ implica nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \tag{62}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{1}{2\mathcal{L}} (\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} &= \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\mu\alpha} \dot{x}^\alpha \end{aligned} \tag{63}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left(g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \frac{d g_{\mu\alpha}}{d\lambda} \dot{x}^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left(g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \partial_\beta g_{\mu\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left(g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\mu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right). \end{aligned} \tag{64}$$

[2]Ver e.g., [8].

Portanto a Eq.(62) fornece

$$g_{\mu\alpha}\ddot{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\beta}g_{\mu\alpha}+\partial_{\alpha}g_{\mu\beta}-\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\right)\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} \tag{65}$$

e multiplicando-se esta equação por $g^{\iota\mu}$ (e somando em μ) temos:

$$\ddot{x}^{\alpha}+\Gamma_{\cdot\alpha\beta}^{\iota\cdot\cdot}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=0 \tag{66}$$

onde

$$\Gamma_{\cdot\alpha\beta}^{\iota\cdot\cdot}=\frac{1}{2}g^{\iota\mu}\left(\partial_{\beta}g_{\mu\alpha}+\partial_{\alpha}g_{\mu\beta}-\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\right) \tag{67}$$

são os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita de $\boldsymbol{g}$, i.e.,

$$D_{\partial_{\alpha}}\partial_{\beta}=\Gamma_{\cdot\alpha\beta}^{\iota\cdot\cdot}\partial_{\iota}. \tag{68}$$

Exercício 5 *Mostre que a* Eq.(66) é a representação em coordenadas da equação da equação

$$D_{\sigma_*}\sigma_*=0 \tag{69}$$

que define o transporte paralelo de σ_* ao longo da curva σ.

5 Geodésicas Nulas em Um Espaço-tempo Estático

Seja $(M,\boldsymbol{g},D,\tau_{\boldsymbol{g}},\uparrow)$ um espaço-tempo Lorentziano. Ele será dito estático se $\boldsymbol{g}$ é dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}&=g_{\mu\nu}dx^{\mu}\otimes dx^{\nu},\\ \boldsymbol{g}&:=dx^0\otimes dx^0-k^2dx^1\otimes dx^1-k^2dx^2\otimes dx^2-k^2dx^3\otimes dx^3.\end{aligned} \tag{70}$$

onde denotando $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$ temos

$$k:\mathbf{x}\mapsto k(\mathbf{x})\in\mathbb{R}. \tag{71}$$

Temos a

Proposição 6 *Em um espaço tempo Lorentziano com métrica estática (como na Eq.(70)) as projeções no espaço (i.e., uma variedade 3-dimensional N) dos raios de luz são geodésicas espaciais da métrica Riemanniana*

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{g}}=-g_{ij}dx^i\otimes dx^j, \tag{72}$$

i.e., elas extremizam a integral

$$\boldsymbol{\tau}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{-g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}d\lambda \tag{73}$$

Note bem que sobre uma curva nula (em M) τ é o parâmetro que denota a duração do percurso.
Proof. Provaremos a proposição (visto a aplicação que desejamos fazer sobre a "geometria do camelo") para o caso particular onde a aplicação k depende somente das variáveis x^1 e x^3.

A geodésicas correspondentes a métrica $\boldsymbol{g}$ são dadas pela Eq.(66). Para tal métrica tem-se imediatamente que

$$\begin{gathered}\Gamma_{\cdot00}^{0\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot10}^{0\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot01}^{0\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot20}^{0\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot02}^{0\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot30}^{0\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot03}^{0\cdot\cdot}=0,\\ \Gamma_{\cdot ij}^{0\cdot\cdot}=0\text{ para todo }i,j=1,2,3\text{ e }i\neq j,\\ \Gamma_{\cdot01}^{1\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot10}^{1\cdot\cdot}=0,\quad,\Gamma_{\cdot11}^{1\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot12}^{1\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot21}^{1\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot13}^{1\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot31}^{1\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_3k,\\ \Gamma_{\cdot00}^{1\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot22}^{1\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_1k,\quad\Gamma_{\cdot33}^{1\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_1k,\quad\Gamma_{\cdot ij}^{1\cdot\cdot}=0,\text{para todo }i,j=1,2,3\text{ e }i\neq j,\\ \Gamma_{\cdot02}^{2\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot20}^{2\cdot\cdot}=0,\quad,\quad\Gamma_{\cdot12}^{2\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot21}^{2\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_1k,\quad\Gamma_{\cdot22}^{2\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot23}^{2\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot32}^{2\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_3k,\\ \Gamma_{\cdot00}^{2\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot11}^{2\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot33}^{2\cdot\cdot}=0\text{ e }\Gamma_{\cdot ij}^{2\cdot\cdot}=0\text{ para todo }i,j=1,2,3\text{ e }i\neq j,\\ \Gamma_{\cdot03}^{3\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot30}^{3\cdot\cdot}=0,\quad,\quad\Gamma_{\cdot13}^{3\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot31}^{3\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_1k,\quad\Gamma_{\cdot23}^{3\cdot\cdot}=\Gamma_{\cdot32}^{3\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot33}^{2\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_3k,\\ \Gamma_{\cdot00}^{3\cdot\cdot}=0,\quad\Gamma_{\cdot11}^{3\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_3k,\quad\Gamma_{\cdot22}^{3\cdot\cdot}=-\frac{1}{k}\partial_3k\text{ e }\Gamma_{\cdot ij}^{2\cdot\cdot}=0\text{ para todo }i,j=1,2,3\text{ e }i\neq j.\end{gathered} \tag{74}$$

Portanto, a Eq.(66) fornece para $x^i(t)$, $i = 1, 2, 3$

$$\ddot{x}^i + \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot lm}\dot{x}^l\dot{x}^m = 0 \tag{75}$$

com $l, m = 1, 2, 3$. A proposição fica demonstrada uma vez que observemos (trivialmente) que

(i) sendo $\overset{(3)}{D}$ a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana $\overset{(3)}{\boldsymbol{g}}$ temos

$$\overset{(3)}{D}_{\partial_l}\partial_m = \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot lm}\partial_i \tag{76}$$

i.e., $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot lm}$ são também os símbolos de Christoffel da métrica Riemanniana $\overset{(3)}{\boldsymbol{g}}$ (Eq.(72)) e que

(ii) a Eq.(75) é portanto a equação das geodesicas da estrutura $(N, \overset{(3)}{\boldsymbol{g}}, \overset{(3)}{D})$, onde $\overset{(3)}{D}$ onde N é uma variedade 3-dimensional definida como a subvariedade obtida de M para $t = cte$. ■

5.1 Passos futuros

O assunto geodésica e relatividade ainda será aprofundado em relatório posterior que estará disponível. O atraso da realização do projeto como um todo se deu por conta do falecimento do antigo orientador e idealizador do projeto, Prof. Waldyr Rodrigues, a quem homenageio hoje e dedico o trabalho.

5.2 Comentário do orientador

A sua redação não está boa: Várias frases incompletas do ponto de vista de Física, de Matemática ou até mesmo em termos de frase, mas não será fácil corrigir isso. É um pouco do seu jeito de escrever pra você mesmo. De qualquer forma, a ideia da IC é também aprimorar os conhecimentos e isso acontece aos poucos.

Referências

[1] Landau, L., Lifshitz, *Teoria clasica de los campos*, vol. 2, Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1992.

[2] Thornton, Marion - *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*, Cengage Learning, 201 - 240, São Paulo , 2016.

[3] Aldrovandi, R. and Pereira, J. G., *Teleparallel Gravity. An Introduction*, Fundamental Theories of Physics **173,** Springer, Heidleberg, 2013.

[4] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Deillard-Bleick, M., *Analysis, Manifolds and Physics* ((revised edition), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.

[5] Dodson, C. T. J. and Poston, *Tensor Geometry. The Geometric Wievpoint and its Uses* (second edition), Springer-Verlag, Heidelberg,1990.

[6] Misner, C. M., Thorne, K. S. and Wheeler,J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Co. San Francisco, 1973.

[7] O' Neill, B. T., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1996.

[8] Rodrigues, W. A. Jr. and Capelas de Oliveira, E., T*he Many Faces of Maxell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach* (seconfd revised and enlarged edition), Lecture Notes in Physics **922**, Springer, Heidelberg, 2016.

[9] Thorne, K., *The Science of Interstellar* , W.W. Norton & Co., New York, 2014.