Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’

Relatório Final de F590 – Iniciação Científica I
Primeiro semestre de 2010

Estudos sobre “O Método” de Arquimedes através da Construção de Balanças e Alavancas

Orientando: Vicente Lima Ventura Seco
RA: 046865
Email: vicenteventura2112@yahoo.com.br

Orientador: Prof. André Koch Torres de Assis
Email: assis@ifi.unicamp.br
Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Sumário:

1 – Introdução:

Arquimedes certamente é um dos mais famosos nomes da ciência, tendo contribuído enormemente para a matemática, física e engenharia. É famosa a história em que ele, ao solucionar o problema da composição de uma coroa proposto pelo rei Hierão, saiu de uma banheira completamente nu, gritando Eureka (descobri) pelas ruas de Siracusa. Esta história está relacionada ao princípio de Arquimedes para a hidrostática, a saber, a força de empuxo exercida verticalmente para cima sobre os corpos imersos em fluidos. Também são conhecidos seus trabalhos em geometria, suas máquinas de guerra, seus estudos sobre alavancas e sua frase: Dê me um ponto de apoio e moverei a Terra, [1]. Arquimedes viveu de 287 a 212 a.C., contribuindo brilhantemente sobre quase todos os assuntos ao qual fosse questionado, valendo-se de grande requinte matemático, semelhante ao utilizado atualmente, e propondo problemas intrigantes até os dias de hoje.

Mas como Arquimedes solucionava seus problemas, qual era o caminho que ele utilizava para obter suas respostas, elaborar teorias e deduzir equações? Infelizmente estas perguntas tardaram a ser respondidas completamente, pois até 1906 esteve perdido um dos trabalhos contendo as demonstrações mais impressionantes de Arquimedes: “O Método sobre os Teoremas Mecânicos,” [2]. Desde a sua descoberta esta obra foi publicada no original em grego, assim como traduzida para o inglês, alemão, francês e outros idiomas. Este trabalho estava perdido há mais de mil anos, só se conhecendo seu título. Ele contém demonstrações de como Arquimedes utilizou a lei da alavanca para obter áreas, volumes e centros de gravidade de diversas figuras geométricas.

1.1 – Descrição do Projeto de Pesquisa:

Este trabalho tem como objetivo implementar na prática alguns dos métodos apresentados por Arquimedes nesta sua obra *O Método*, [2]. Em particular, vamos construir algumas balanças e alavancas. Vamos também obter corpos planos e volumétricos correspondentes a algumas figuras descritas por Arquimedes neste trabalho, a saber: Parábolas, triângulos, esferas, cilindros e cones.

O objetivo principal deste projeto é mostrar na prática como os conceitos utilizados por Arquimedes correspondem a situações reais de equilíbrio destes corpos quando são colocados nas posições descritas por ele nesta obra extremamente interessante e original.

Na Proposição 1, por exemplo, Arquimedes obtém a quadratura da parábola, ou seja, o valor de sua área comparando-a com a área de um certo triângulo. Já na Proposição 2 Arquimedes obtém a área e o volume de uma esfera. Na notação moderna seus resultados podem ser expressos como $A = 4\pi R^2$ e $V = 4\pi R^3/3$. Nos dois casos estes resultados foram obtidos com a lei da alavanca.

Faremos algumas réplicas concretas das construções geométricas utilizadas por Arquimedes. A ideia principal é construir algumas alavancas e balanças similares àquelas apresentadas na série de televisão “Nova – Infinite Secrets: The Genius of Archimedes,” [3].

Para realizar nosso trabalho utilizaremos algumas partes já traduzidas para o português da obra “O Método” de Arquimedes, [4]. Utilizaremos ainda como referência histórica, matemática e metodológica o livro “Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca,” [1].

Com o trabalho desenvolvido ao longo deste semestre, esperamos ajudar os estudantes e leitores a compreender melhor o método experimental e matemático utilizado por Arquimedes.

1.2 – Importância do Trabalho na Formação do Aluno e na Compreensão do Fenômeno sendo Pesquisado:

A compreensão de conceitos como centro de gravidade, centro geométrico e simetria é de extrema importância para os estudantes das mais diversas áreas, sejam estas caracterizadas como exatas ou não. Tais conceitos são aplicáveis tanto em obras de arte, na elaboração de estruturas arquitetônicas, assim como no estudo de sistemas de múltiplas partículas. Infelizmente, durante o ensino fundamental e médio, o estudo destes conceitos limita-se frequentemente a casos bidimensionais e tridimensionais padrões, como polígonos regulares, esferas e paralelepípedos.

Durante o ensino superior, os casos mais complexos são geralmente analisados matematicamente, mas sem uma interpretação prática e qualitativa dos mesmos.

Desta forma, consideramos de extrema importância estudar os conceitos de centro de gravidade e centro geométrico com uma abordagem prática, de caráter experimental, trazendo diferentes significados e aplicações para o mesmo. Acreditamos que este trabalho não somente tornará tais conceitos mais claros e sólidos, como permitirá aos estudantes entrar em contato com um dos trabalhos mais importantes de um dos maiores nomes da ciência: *O Método sobre os Teoremas Mecânicos*, de Arquimedes. Esperamos com isto ilustrar como ele fez para obter áreas e volumes de diferentes figuras geométricas a partir da lei da alavanca.

2 – Arquimedes e Suas Obras:

Discorrer sobre a vida de Arquimedes deveria ser uma tarefa fácil visto a sua vasta produção literária e frequência com que é citado na obra de diversos autores de sua época. Mas como sabemos, estamos falando sobre alguém que viveu há mais de 2300 atrás, o que torna difícil atestar a veracidade das informações que chegaram até nós.

Acredita-se que Arquimedes viveu entre 287 e 212 a.C., tendo nascido e falecido em Siracusa – cidade onde passou a maior parte de sua vida. Seu pai, chamado Fídias, era um astrônomo dedicado e já havia encontrado uma aproximação para a relação entre os diâmetros do Sol e da Lua.

Arquimedes é considerado um dos fundadores da estática e da hidrostática. Tem contribuições notáveis em diversas áreas como a matemática, a física e a engenharia. De acordo com os relatos históricos que chegaram até nós, construiu diversas máquinas de guerra, além de sistemas de polias e de alavancas com os quais conseguia mover pesos enormes. Resolveu diversos problemas importantes de geometria envolvendo o cálculo de área, volume e centro de gravidade de diferentes corpos. Entre suas mais famosas histórias está o caso da coroa do rei Hierão, [1, pág. 14]. Ao solucionar o problema proposto pelo rei, Arquimedes saiu correndo pelas ruas de Siracusa, nu e gritando que havia descoberto a solução. Com suas máquinas de guerra, conseguiu defender a cidade de Siracusa por três anos diante dos ataques do general romano Marcelo, [1, pág. 17].

Acredita-se que Arquimedes morreu pelas mãos de um soldado romano enquanto estava concentrado nos seus problemas geométricos. Sua morte em 212 a.C. é um dos poucos fatos sobre a vida de Arquimedes do qual temos certeza, uma vez que esteve relacionado com o término da invasão da cidade de Siracusa.

Abaixo temos uma relação das obras de Arquimedes que chegaram até nós:

2.1 – Obras Completas:

• Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, ou Sobre o Centro de Gravidade das Figuras Planas. Livro I.

• Quadratura da Parábola.

• Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, ou Sobre o Centro de Gravidade das Figuras Planas. Livro II.

• O Método sobre os Teoremas Mecânicos, endereçado a Eratóstenes.

• Sobre a Esfera e o Cilindro, Livros I e II.

• Sobre as Espirais.

• Sobre Conóides e Esferóides.

• Sobre os Corpos Flutuantes. Livros I e II.

• Medida do Círculo.

• O Contador de Areia.

2.2 – Fragmentos e Obras Incompletas:

• O Problema Bovino.

• Livro de Lemas.

• Poliedros Semi-Regulares.

• Stomachion.

• Área do Triângulo.

• Sobre o Heptágono em um Círculo.

3 – A Descoberta da Obra "*O Método sobre os Teoremas Mecânicos*"

"O Método sobre os Teoremas Mecânicos," [2] e [4], é uma das obras mais importantes e diferenciadas de Arquimedes. Neste trabalho ele apresenta o caminho utilizado para obter resultados bastante complexos, tais como a quadratura de uma parábola, assim como o volume e a área de uma esfera. Até este trabalho ser redescoberto em 1906 não se sabia com certeza como estes resultados haviam sido obtidos por ele. Tamanha é a sua importância que, após ser encontrado, este trabalho que esteve perdido há mais de 1.000 anos já foi publicado no original em grego, assim como traduzido para o inglês, alemão, francês e italiano. Atualmente está sendo totalmente traduzido para o português, [4]. É nesta obra fundamental que Arquimedes mostra como utilizou a lei da alavanca para obter áreas, volumes e centros de gravidade de diversas figuras geométricas.

Até 1906 esta importante obra era conhecida apenas por causa das citações superficiais sobre ela que apareciam em outros livros. Ela foi encontrada em um palimpsesto do século IX ou X. Um palimpsesto é um pergaminho contendo um texto original que foi raspado para que se pudesse escrever um outro texto sobre o anterior. No caso do palimpsesto de Arquimedes sua obra era o texto original que por sorte não foi totalmente apagado. Sobre ele foi redigido um texto religioso do século XIII. Felizmente foi possível recuperar a maior parte do texto original que não havia sido completamente apagado. Ele continha as seguintes obras inéditas de Arquimedes:

Sobre os Corpos Flutuantes, Livros I e II (em grego). Até então só se conhecia uma tradução em latim feita por Mörbeke em 1269 a partir de um outro original em grego, atualmente perdido.

Stomachion (as duas primeiras proposições).

Método sobre os Teoremas Mecânicos.

Devemos a sua descoberta ao filólogo dinamarquês Johann Ludwig Heiberg (1854-1928) que dedicou grande parte de sua vida à pesquisa, tradução e publicação das obras de Arquimedes. Entre 1880 e 1881 ele havia publicado a primeira edição moderna de toda a obra de Arquimedes conhecida até aquela época. Depois da sua descoberta de *O Método* publicou uma segunda edição das obras completas de Arquimedes entre 1910 e 1915.

3.1 – Os Dois Primeiros Teoremas de *O Método*:

Os dois primeiros teoremas desta obra podem ser escritos modernamente como:

Teorema 1: A área do segmento parabólico ADB é equivalente a quatro terços do triângulo ADB nela inscrito, ver a Figura 1.

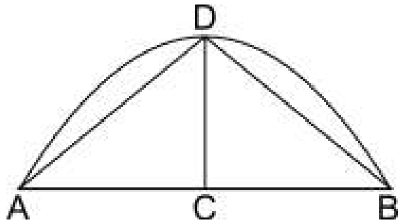

Figura 1: Triângulo ADB inscrito na parábola ADB.

Este teorema pode ser escrito matematicamente como:

$$\frac{\text{Área do segmento parabólico}}{\text{Área do triângulo inscrito}} = \frac{4}{3}.$$

Teorema 2: Toda esfera é o quádruplo do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e uma altura igual ao raio da esfera.

Ou seja, o volume de uma esfera ABCD é equivalente a quatro vezes o volume do cone inscrito ABD cuja altura é o raio da esfera e cuja base é o círculo máximo da esfera, ver a Figura 2.

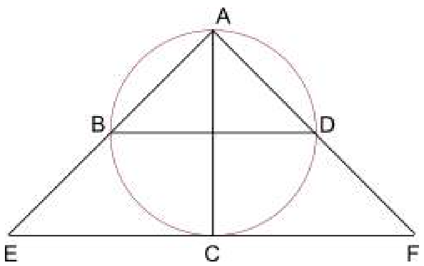

Figura 2: Esfera ABCD e cone inscrito ABD com vértice A.

Este teorema pode ser escrito matematicamente como:

$$\frac{\text{Volume da esfera ABCD}}{\text{Volume do cone inscrito ABD}} = \frac{4}{1}.$$

Vamos agora analisar como Arquimedes obteve estes resultados, [4].

4 – O Método de Arquimedes:

4.1 – Elementos Principais do Método:

O método descoberto por Arquimedes e usado neste seu tratado para determinar áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas aparece claramente a partir do primeiro teorema. Ele tem como base os seguintes princípios:

1 – Por meio de considerações puramente geométricas, determina-se a razão existente entre certas distâncias e certas grandezas pertencentes às figuras. Estas grandezas podem ser os comprimentos de algumas linhas, as áreas de algumas superfícies, ou os volumes de alguns sólidos.

2 – Atribui-se um peso às figuras geométricas, supondo-se que ele está distribuído homogeneamente nas figuras. Ou seja, Arquimedes vai considerar que os segmentos lineares, as áreas e os volumes possuem pesos proporcionais a estes comprimentos, áreas e volumes, respectivamente.

3 – Estas grandezas são colocadas em equilíbrio de acordo com a lei da alavanca. Arquimedes deduziu esta lei em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas*. Esta obra encontra-se traduzida para o português em [1]. Ele apresentou-a nas seguintes palavras:

"Proposição 6: Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos." [1, pág. 227].

"Proposição 7: Da mesma maneira, se as grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas." [1, pág. 229].

Sejam P_A e P_B os pesos das grandezas A e B colocados às distâncias d_A e d_B do fulcro, respectivamente. A lei da alavanca pode ser escrita matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A} .$$

4 – As figuras planas são consideradas como sendo constituídas pela soma de todos os segmentos de linha nelas traçados em uma determinada direção. Analogamente, as figuras sólidas são considerados como sendo constituídas por todas as intersecções nelas determinadas por planos com uma inclinação definida.

5 – Pelo equilíbrio físico estabelecido pela lei da alavanca e pelas razões matemáticas existentes entre os segmentos de uma certa figura, pode-se assim determinar a correlação existente entre as áreas ou os volumes desta figura. Da mesma forma, pode-se determinar a localização do centro de gravidade de uma figura, conhecendo-se o centro de gravidade de uma outra.

Os princípios acima descritos estão amplamente desenvolvidos nas referências [1] e [4]. Vejamos agora como Arquimedes obteve a quadratura de um segmento parabólico e o volume de uma esfera.

5 – Área de um Segmento Parabólico:

A determinação da área de uma parábola é uma tarefa complexa se deixarmos de lado as ferramentas proporcionadas pelo cálculo diferencial e integral. Uma vez que Arquimedes era um excelente geômetra e que a área dos triângulos já lhe era familiar, ele relaciona a área de uma parábola com a área de dois triângulos específicos utilizando para isto a lei da alavanca.

Vamos ilustrar seu procedimento. Inicialmente apresentamos as figuras abaixo:

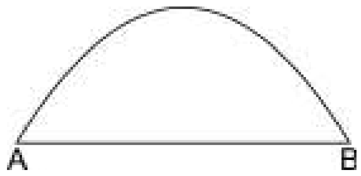

Figura 3.1: parábola cuja área pretende-se obter.

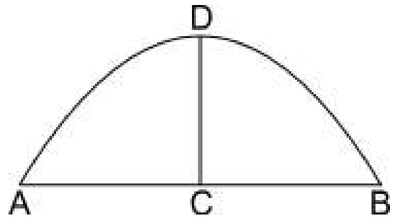

Figura 3.2: segmento CD perpendicular a AB, onde AC = CB.

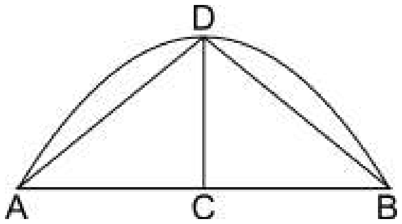

Figura 3.3: triângulo ADB inscrito na parábola ADB.

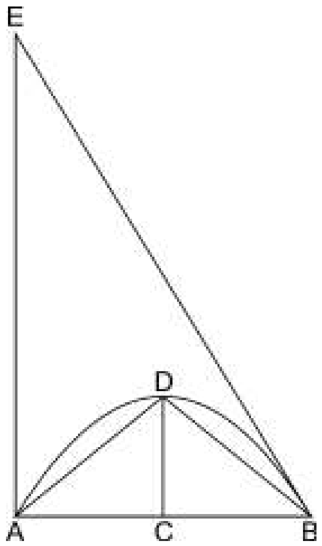

Figura 3.4: parábola ADB circunscrita ao triângulo ABE. Temos EB tangente à parábola em B, sendo AE paralelo a CD.

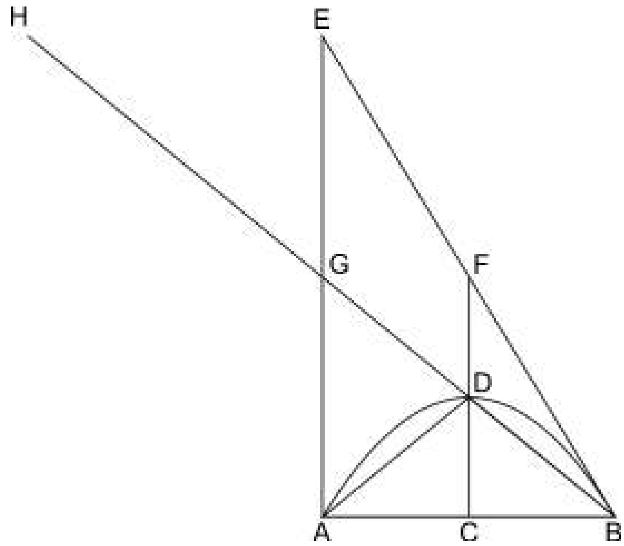

Figura 3.5: Temos EG = GA, CD = DF e BG = HG.. O segmento HB corresponderá a uma alavanca com fulcro em G..

As Figuras 3.1 até 3.5 representam a construção da alavanca e dos triângulos AEB e ADB que serão relacionados com a área da parábola. Uma vez construída a Figura 3.5, Arquimedes traça segmentos de reta paralelos ao segmento AE, delimitados pelo triângulo AEB, como ilustrado na Figura 4. Cada um destes segmentos MP está a uma distância arbitrária AP ao longo do segmento AB.

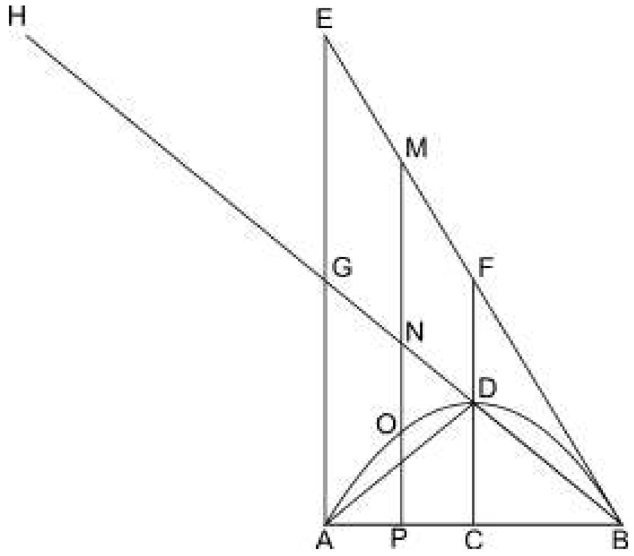

Figura 4: Diversos segmentos como MP preenchem o triângulo AEB.

Arquimedes demonstra matematicamente a seguinte proposição para todo segmento MP ao longo da base AB:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{HG}{GN} \ .$$

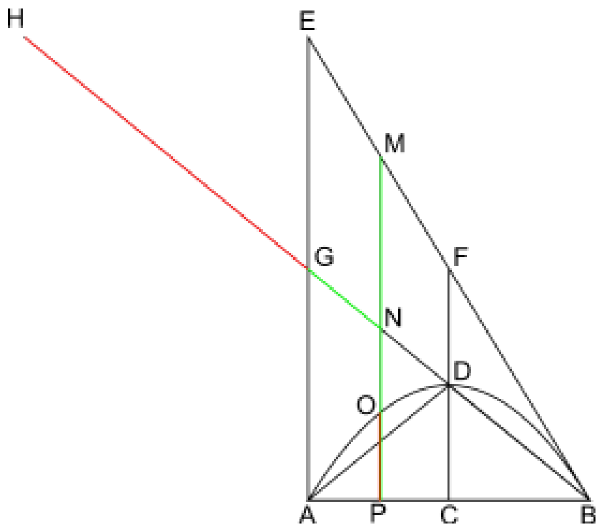

Figura 5: Segmentos de reta MP, OP, HG e GN considerados por Arquimedes.

Arquimedes supõe então segmentos MP e OP com pesos proporcionais a seus comprimentos. Supõe ainda uma alavanca BH com seu fulcro colocado no seu ponto médio G. A equação anterior é equivalente à lei da alavanca. Ou seja, se deslocarmos o segmento PO e o prendermos pelo seu ponto médio na extremidade H da alavanca, enquanto que o segmento MP for mantido onde está ficando preso por seu ponto médio no ponto N da alavanca, teremos uma alavanca em equilíbrio como mostra a Figura 6.

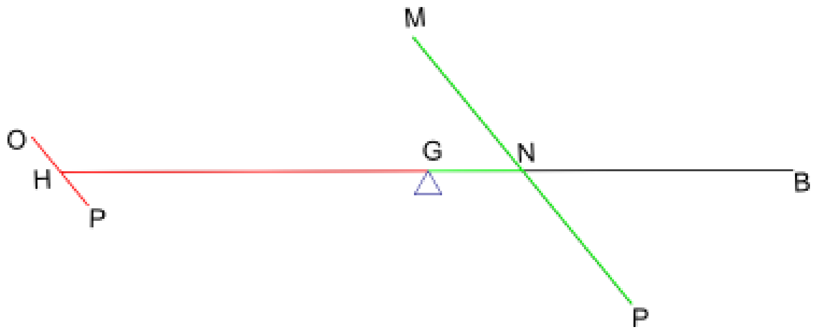

Figura 6: Alavanca HB em equilíbrio ao redor de seu fulcro localizado em G..

Uma vez que os pontos N e H corresponderiam aos centros de gravidade das barras MP e OP, respectivamente, poderíamos orientá-las verticalmente que o sistema continuaria em equilíbrio, como mostra a Figura 7:

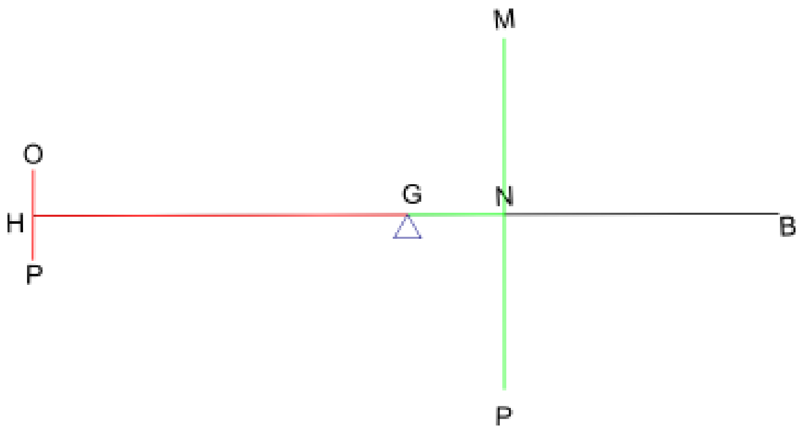

Figura 7: Alavanca em equilíbrio.

Esta relação de equilíbrio vale para todos os segmentos de reta MP e OP. Arquimedes desloca então todos os segmentos de reta OP entre AB para a extremidade H da alavanca. Com isto ele reconstitui a área parabólica ADB, estando ela dependurada em H. Ao considerar todos os segmentos MP entre AB, com cada um deles preso na posição em que se encontra, Arquimedes reconstitui o triângulo AEB. Como a alavanca estava em equilíbrio para cada segmento MP e OP entre AB, ela continuará em equilíbrio ao considerar todos os segmentos entre A e B. Com isto teremos a situação de equilíbrio mostrada na Figura 8. Ou seja, Arquimedes demonstra que se todo o triângulo fosse preenchido com segmentos de reta, o braço GB da alavanca suspenderia o triângulo AEB enquanto que o ponto H suspenderia a parábola, com a alavanca permanecendo em equilíbrio ao redor de seu fulcro G.

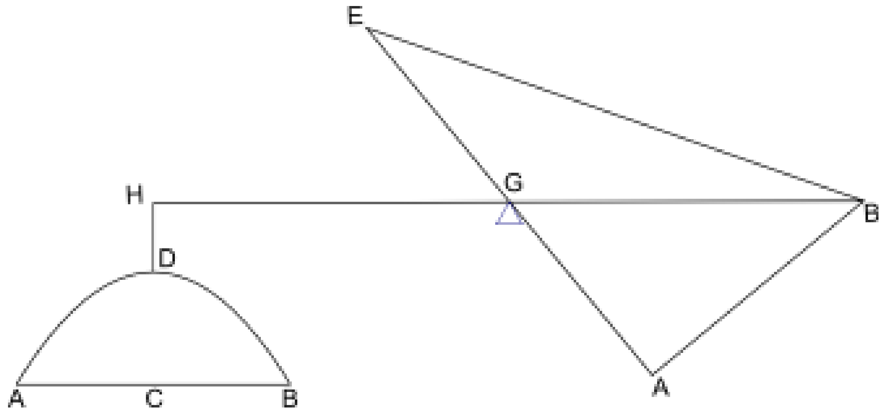

Figura 8: Após "varrer" o triângulo AEB, teremos o equilíbrio entre o triângulo AEB dependurado ao longo do braço GB da alavanca, e a parábola ADB dependurada em H.

E finalmente, ao suspender o triângulo AEB por um fio pelo seu centro de gravidade, a alavanca permanecerá em equilíbrio. Em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas*, Arquimedes havia mostrado que o centro de gravidade de todo triângulo é ponto de encontro das medianas. Cada mediana é a reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Seja V um dos vértices de um triângulo e M o ponto médio do lado oposto. O centro de gravidade CG deste triângulo é um ponto ao longo de VM tal que o segmento ligando V a CG é o dobro do segmento ligando o CG ao ponto médio M, ou seja, VCG = 2CGM. No caso da Figura 8 podemos considerar B como sendo o vértice do triângulo ABE e G como sendo o ponto médio do lado oposto AE. O centro de gravidade será um ponto X ao longo de AG tal que BX = 2XG. Com isto temos então a situação de equilíbrio mostrada na Figura 9:

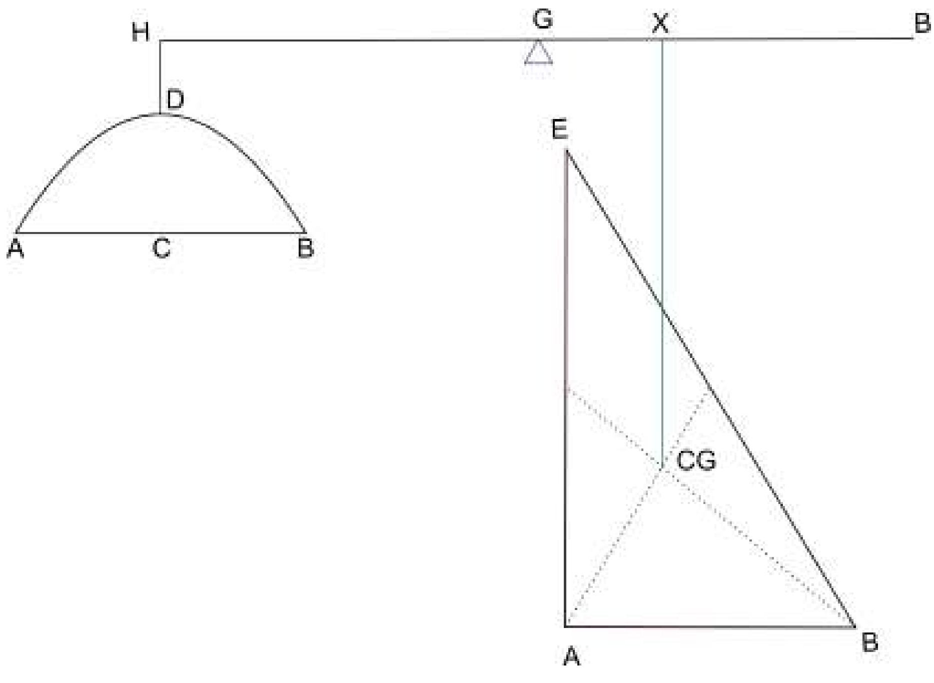

Figura 9: Alavanca em equilíbrio com a parábola ADB dependurada em H, enquanto que o triângulo AEB está dependurado por um ponto X tal que GX = 2XB.

Na Figura 9 temos a parábola ADB dependurada em H equilibrando o triângulo AEB colocado em X. O ponto X divide o segmento BG tal que:

$$\frac{GX}{XB}=\frac{1}{2}\ .$$

Ou seja,

$$\frac{GH}{GX}=\frac{3}{1}\ .$$

Considerando então os pesos da parábola e do triângulo como sendo proporcionais às suas áreas, a lei da alavanca e a relação anterior levam à seguinte relação:

$$\frac{\text{Área do segmento parabólico ADB}}{\text{Área do triângulo AEB}}=\frac{1}{3}\ .$$

Como o triângulo AEB tem o quádruplo da altura do triângulo ADB, sendo que ambos possuem a mesma base AB, temos que:

$$\frac{\text{Área do triângulo AEB}}{\text{Área do triângulo ADB}}=\frac{4}{1}\ .$$

Combinando as duas relações anteriores obtemos então o primeiro teorema de Arquimedes, a saber:

$$\frac{\text{Área do segmento parabólico ADB}}{\text{Área do triângulo inscrito ADB}}=\frac{4}{3}\ .$$

Esta relação está representada na Figura 10 em termos de uma alavanca em equilíbrio. Temos a parábola ADB dependura em um ponto I e o triângulo ADB dependurado em outro ponto J. A alavanca BH fica em equilíbrio ao redor do fulcro G quando vale a seguinte relação:

$$\frac{\text{Área do segmento parabólico ADB}}{\text{Área do triângulo inscrito ADB}}=\frac{GJ}{IG}=\frac{4}{3}\ .$$

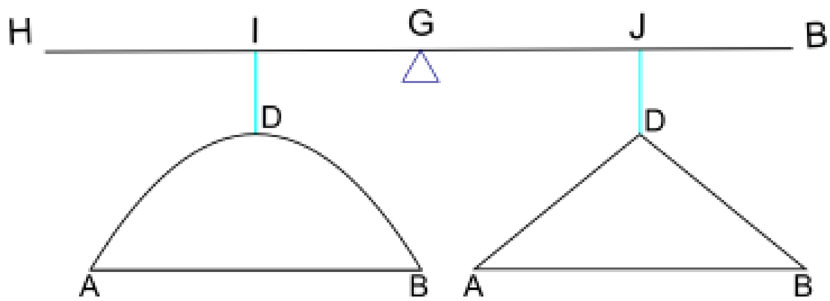

Figura 10: Alavanca em equilíbrio

Esta última proporção corresponde ao primeiro teorema da obra *O Método* de Arquimedes. Um aspecto muito importante deste teorema é que Arquimedes está obtendo a área de um figura curva como uma parábola em termos da área de um triângulo conhecido. Como é sempre possível encontrar um quadrado de área equivalente a um certo triângulo, o que Arquimedes está obtendo é a quadratura de uma figura curva como uma parábola em termos de uma área conhecida.

6 – Volume de uma Esfera:

De forma semelhante ao método utilizado para determinar a área da parábola, Arquimedes utiliza figuras geométricas como cones e cilindros para determinar o volume da esfera. Para isto subdivide estas figuras volumétricas em vários planos paralelos. Considera que a soma destes infinitos planos corresponderá aos volumes das figuras tridimensionais.

Apresentamos na Figura 11 os elementos desta proposição de Arquimedes.

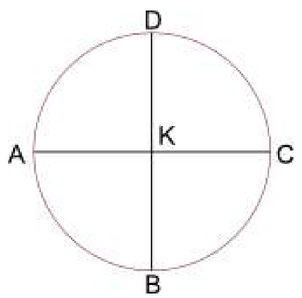

Figura 11.1: Esfera ABCDE de raio r.

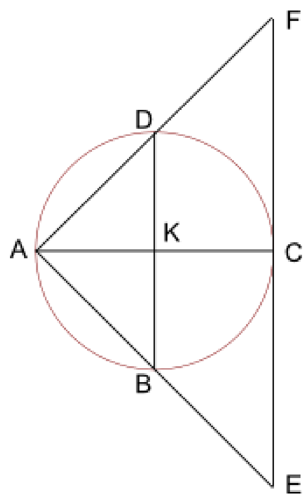

Figura 11.2: Temos dois cones ABD e AEF com vértices em A. A altura do primeiro cone é r, enquanto que a altura do segundo cone é 2r. A base do primeiro cone é um círculo de raio r, enquanto que a base do segundo cone é um círculo de raio 2r.

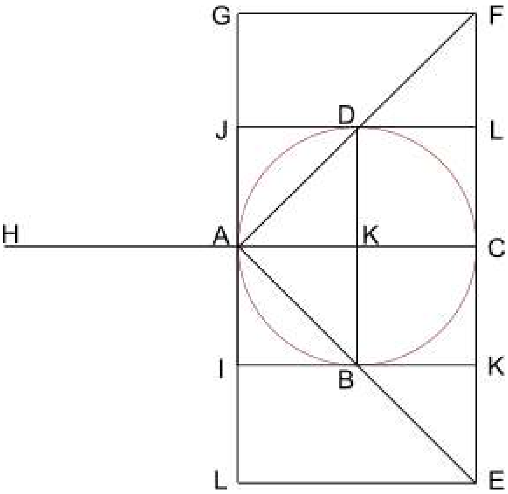

Figura 11.3: Retângulos IJKL e LGFE geradores dos cilindros com alturas iguais a 2r e bases como círculos centrados em A de raios r e 2r, respectivamente. Marca-se H ao longo do prolongamento de CA tal que CA = AH = 2r.

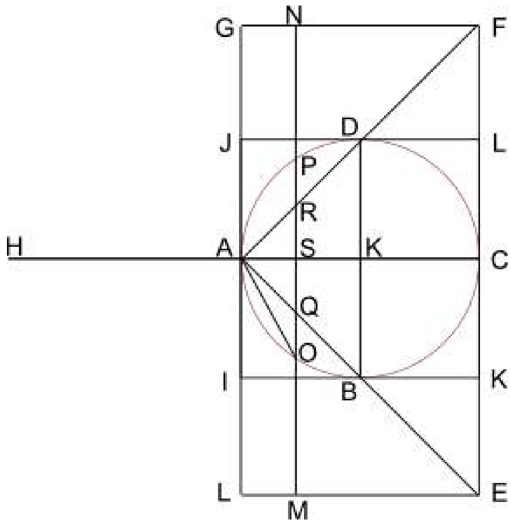

Figura 11.4: O plano MN é ortogonal à reta HAC.

As figuras 11.1 até 11.4 representam a construção das figuras que serão utilizados para determinar o volume da esfera. O plano MN da Figura 11.4 é ortogonal ao segmento HAC e está a uma distância AS arbitrária a partir do ponto A. Ele corta o cone AEF em um círculo QR de raio SR, corta a esfera ABCD em um círculo OP de raio SP, corta o cilindro LGFE em um círculo de raio SN.

A representação tridimensional desta situação é representada na Figura 12:

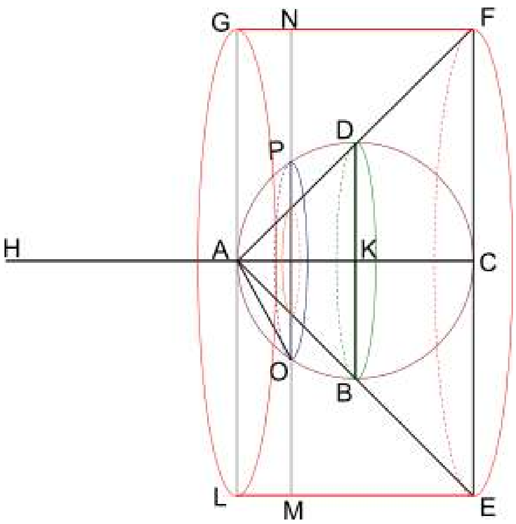

Figura 12.1: Representação tridimensional das figuras desenhadas.

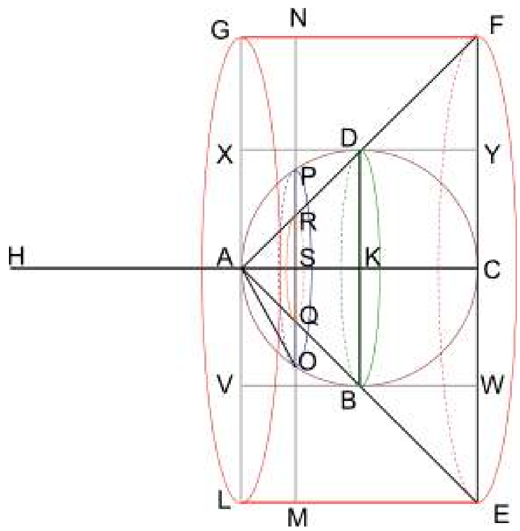

Figura 12.2: O plano ortogonal ao segmento HAAC e passando por MN vai cortar o cone, a esfera e o grande cilindro em três círculos de raios crescentes.

Em nossa notação vem que Arquimedes inicialmente demonstra matematicamente que

$$\frac{MN^2}{OP^2 + QR^2} = \frac{HA}{AS} \ .$$

Ele então considera os planos como tendo pesos proporcionais às suas áreas. Esta relação pode então ser escrita como:

$$\frac{(\text{círculo de raio MN})^2}{(\text{círculo de raio OP})^2 + (\text{círculo de raio QR})^2} = \frac{HA}{AS} \ .$$

O segmento HC será considerado como sendo a alavanca para esta situação, com seu fulcro no ponto médio A.

A última equação é então equivalente à lei da alavanca com o círculo de raio MN ficando em seu lugar e os dois outros círculos transportados para o ponto H. Ou seja, a alavanca vai ficar em equilíbrio ao redor do fulcro A quando os círculos de raios OP e QR estão dependurados em H, com o círculo de raio MN permanecendo preso à alavanca por seu centro colocado no ponto S. Ficamos então com a situação da Figura 13.

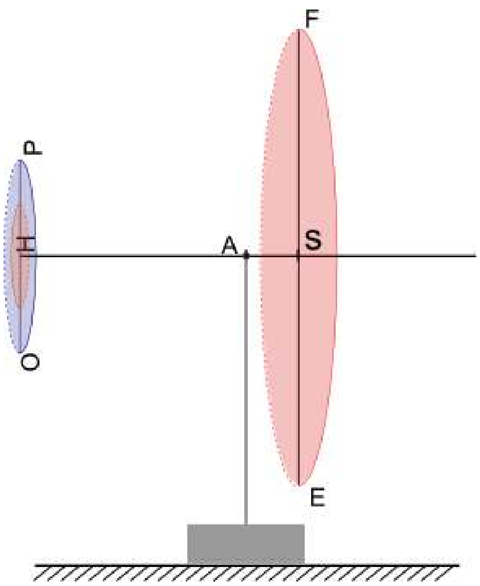

Figura 13.1: Representação tridimensional da alavanca em equilíbrio.

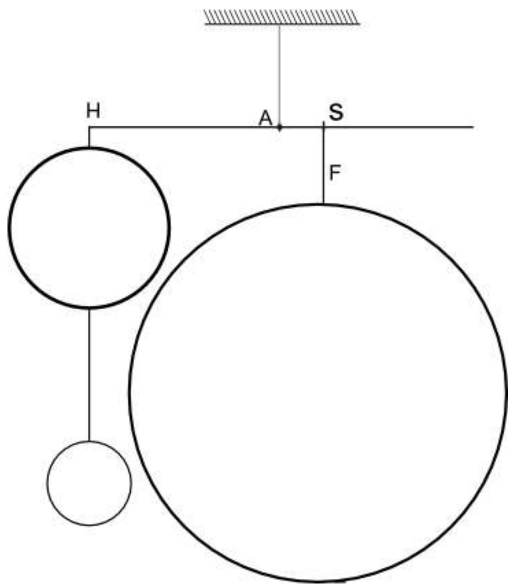

Figura 13.2: Representação bidimensional da alavanca em equilíbrio.

Esta relação de equilíbrio vale para todos os círculos cortados por planos MN que estão a distâncias arbitrárias AS do ponto A. Arquimedes faz então uma varredura com os planos MN indo de A até C. Ou seja, ele desloca então todos os círculos de raios OP e QR para o ponto H, mantendo os círculos de raio MN em seus lugares. Com isto ele reconstrói a esfera ABCD dependurada em H, juntamente com o cone AEF dependurado em H, enquanto que o cilindro LGFE fica colocado ao longo do braço AC da alavanca. Nesta situação a alavanca permanece em equilíbrio ao redor do fulcro A, Figura 14.

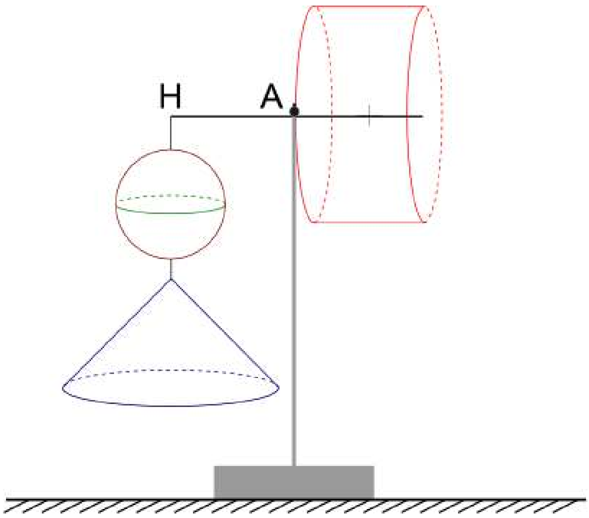

Figura 14: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro A com a esfera ABCD e o cone AEF dependurados em H, enquanto que o cilindro LGFE está dependurado ao redor do braço AKC.

A alavanca vai permanecer em equilíbrio ao dependurar o cilindro LGFE por seu centro de gravidade que está no ponto K, que é o ponto médio do segmento AC. Com isto obtemos a situação de equilíbrio da Figura 15.

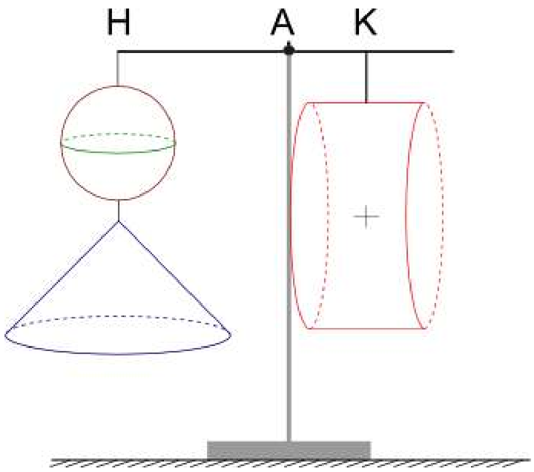

Figura 15: Alavanca em equilíbrio.

Pela lei da alavanca temos então:

$$\frac{\text{cilindro}_{\text{LGFE}}}{\text{esfera}_{\text{ABCD}} + \text{cone}_{\text{AEF}}} = \frac{HA}{AK} = \frac{2}{1}\ .$$

Mas o volume de todo cilindro é equivalente ao triplo do volume do cone inscrito no cilindro:

$$\text{cilindro}_{\text{LGFE}} = 3 \cdot \text{cones}_{\text{AEF}}\ .$$

Combinando estas duas equações obtém-se então:

$$2 \cdot \text{esferas}_{\text{ABCD}} = \text{cone}_{\text{AEF}} .$$

Como o cone AEF tem o dobro da altura do cone ABD e sua base tem o dobro do diâmetro da base do cone ABD vem que:

$$\text{cone}_{\text{AEF}} = 8 \cdot \text{cones}_{\text{ABD}} .$$

Combinando estas duas equações obtém-se finalmente o resultado anunciado por Arquimedes, a saber:

$$\text{esfera}_{\text{ABCD}} = 4 \cdot \text{cones}_{\text{ABD}} .$$

Este resultado pode ser colocado de uma forma mais conhecida para nós observando que o volume de um cone é um terço de sua base vezes sua altura. Como a base do cone ABD tem o mesmo raio r que a esfera, sua base tem como área πr^2 . Com isto obtemos finalmente:

$$\text{volume de uma esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Outra maneira de expressar o equilíbrio é em termos do cilindro IJLK circunscrito à esfera ABCD. Este cilindro é o dobro do cilindro IJDB. Já o cilindro IJDB vale o triplo do cone ABD. Logo o cone ABD vale um sexto do cilindro IJDB. Como a esfera ABCD vale o quádruplo do cone ABD, obtemos que

$$\frac{\text{esfera}_{\text{ABCD}}}{\text{cilindro}_{\text{IJDB}}} = \frac{2}{3} .$$

Esta relação configura uma nova situação de equilíbrio de uma alavanca ao redor de seu fulcro A quando o braço da esfera vale 3 unidades de comprimento e o braço do cilindro circunscrito a esta esfera vale 2 unidades de comprimento. Esta situação de equilíbrio é mostrada na Figura 16 com a esfera dependurada em H e o cilindro circunscrito dependurado em T.

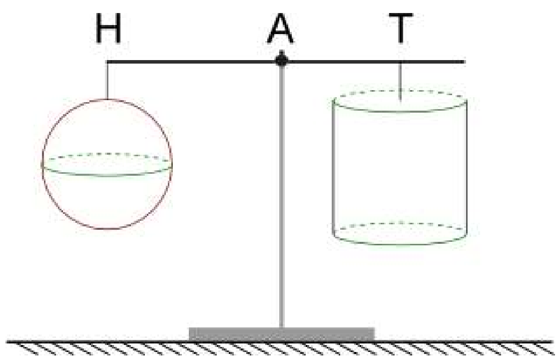

Figura 16: Alavanca em equilíbrio com uma esfera e o cilindro circunscrito a esta esfera.

Arquimedes considerava estes teoremas os mais importantes que obteve em sua vida. Por este motivo solicitou que em seu túmulo fosse colocada uma figura da esfera com o cilindro circunscrito. Embaixo desta figura foi colocado o teorema relacionando os volumes destes dois objetos.

7 – Construindo as Réplicas:

O objetivo principal deste projeto de iniciação científica foi o de construir balanças e alavancas que reproduzissem na prática as condições de equilíbrio obtidas por Arquimedes em seu trabalho *O Método*.

7.1 – Materiais Utilizados:

Todas as montagens foram feitas buscando ao máximo utilizar materiais de baixo custo e de fácil aquisição. A escolha por tais tipos de materiais foi feita para que todos os estudantes interessados possam reconstruir as montagens sem que o material torne-se um fator limitante. Outras sugestões de montagens podem ser encontradas ao longo da referência [1].

As ferramentas utilizadas ao longo do trabalho foram:
Lápis.
Réguas (30cm e 60 cm).
Compasso.
Tesoura.
Furadeira elétrica.
Alavanca.

Os materiais utilizados ao longo do trabalho foram:
Papel perflex (semelhante à cartolina, mas com um lado bastante liso e de maior espessura).
Fita crepe.
Ganchos pequenos.
Borracha de alta densidade.
Barras de ferro (espeto de churrasco cortado).
Cola de sapateiro.
Velcro.
Gesso.
Esferas ocas com 2,5 cm de raio.
Barbante.

7.2 – Triângulos e Parábolas:

Após a determinação do trabalho que seria desenvolvido, iniciamos com a impressão da Figura 3.5 com as proporções desejadas para o trabalho. Com isto nos familiarizamos com as dimensões das figuras utilizadas. Ficou determinado que para fins demonstrativos, seria interessante construir uma alavanca com 60 cm de comprimento.

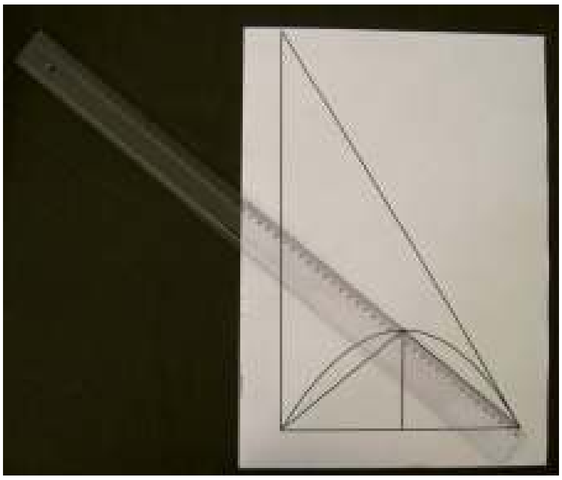

Figura 17: Impresso na escala utilizada na construção das réplicas.

A partir da figura impressa, foram cortados os triângulos e a parábola, como representado nas figuras a seguir:

Figura 18.1.

Figura 18.2.

Figura 18.3.

Observação: uma vez que a proporção de massa esperada entre as figuras é conhecida, foram feitos ajustes utilizando uma alavanca e o desgaste das figuras para que esta proporção fosse mantida.

Em seguida colamos o velcro no triângulo maior com a cola de sapateiro, assim como na régua de 60 cm que seria utilizada como alavanca:

Figura 19: Preparativos para a aplicação da cola.

Figura 20: Triângulo com o velcro colado.

Por fim, recortamos duas tiras de borracha e duas tiras de uma barra de ferro para representar os segmentos de reta formados pela reta MP na Figura 4.

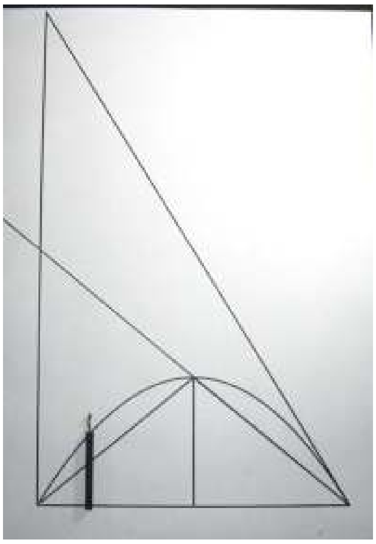

Figura 21.1: Segmento de reta OP.

Figura 21.2: Segmento de reta MP.

Uma vez que as figuras planas estavam prontas, finalizamos a alavanca furando o fulcro da mesma na marca de 30 cm e furando dois pontos de suspensão nas marcas de 0 cm e 60 cm.

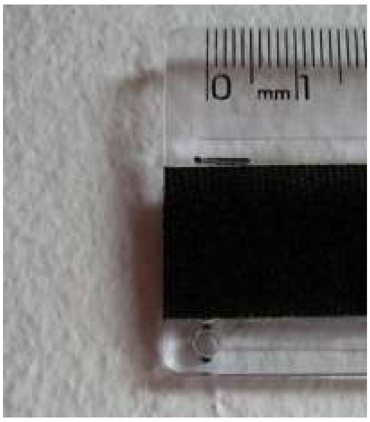

Figura 22.1: Detalhes da alavanca.

Figura 22.2: Detalhes adicionais da alavanca.

Com a alavanca pronta, suspendemos a mesma pelo fulcro e constatamos que esta estava “desequilibrada” com relação à horizontal.

Figura 23: Alavanca desequilibrada.

Isto pode ter sido devido a alguma inomogeneidade na régua. Então utilizamos um par de ímãs para equilibrar a alavanca na horizontal.

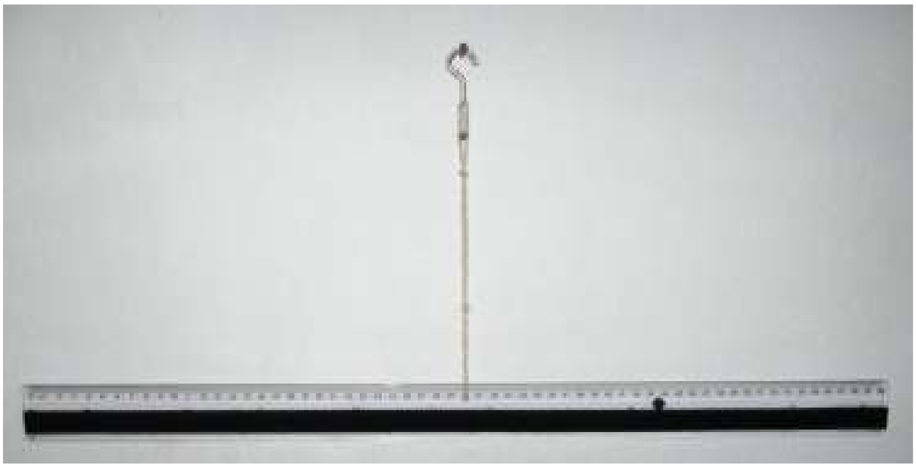

Figura 24: Alavanca equilibrada com o acréscimo dos ímãs.

Com a alavanca em equilíbrio, fixamos o triângulo maior (AEB) à régua. Também fixamos a parábola á régua. O intuito era de averiguar a disposição de equilíbrio apresentada na Figura 8.

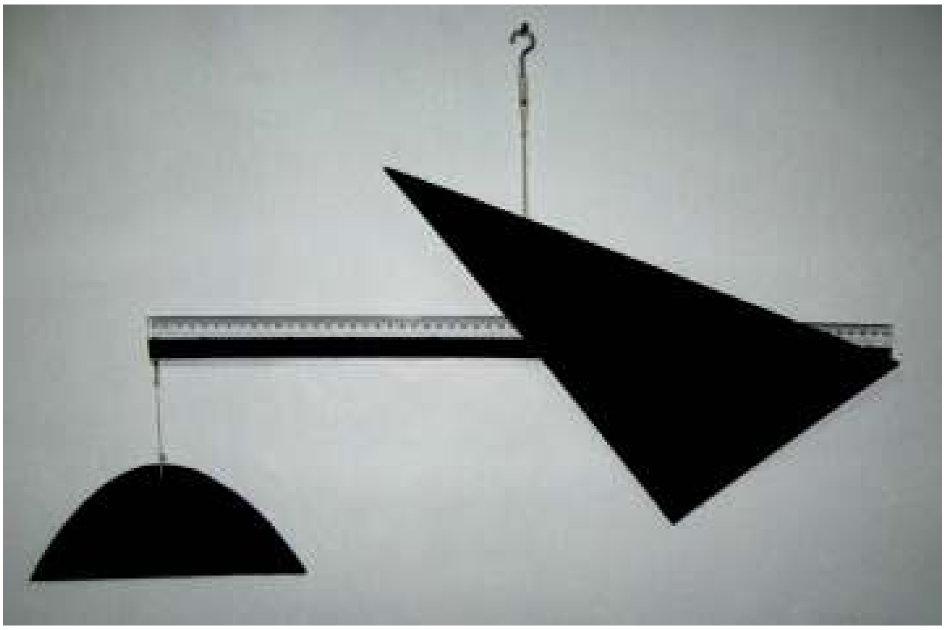

Figura 25: Alavanca equilibrada com a parábola e o triângulo.

Constatado o equilíbrio, penduramos as figuras na alavanca de acordo com as proporções previstas por Arquimedes. Estas novas situações de equilíbrio foram representada nas Figuras 7 até 10. Para tal construímos uma segunda alavanca cm espaçamentos de 1 cm em 1 cm nos quais as figuras poderiam ser penduradas:

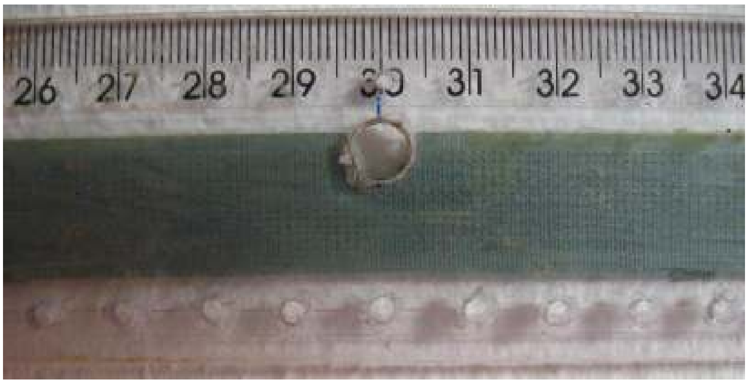

Figura 26: Detalhes da segunda alavanca.

As Figuras que seguem representam as condições de equilíbrio propostas teoricamente por Arquimedes. Confirmamos na prática estas condições de equilíbrio com nossas alavancas construídas neste projeto.

Figura 27: Alavanca em equilíbrio com os segmentos de reta.

Figura 28: Alavanca em equilíbrio com a parábola dependurada de um lado e o triângulo grande do outro lado.

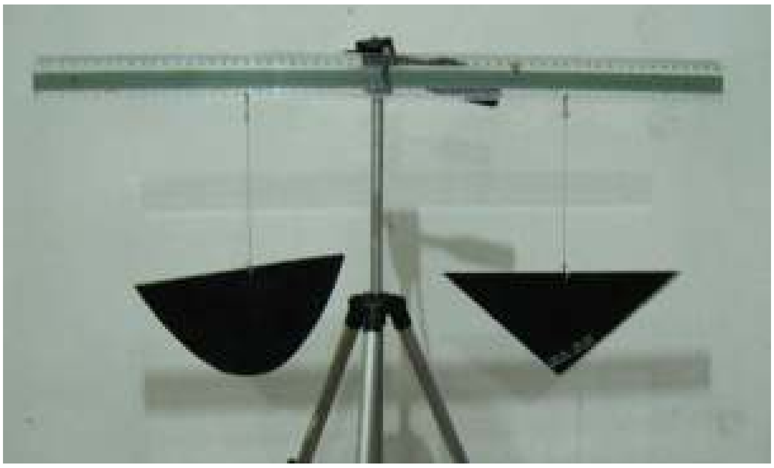

Figura 29: Alavanca em equilíbrio com a parábola de um lado e o triângulo inscrito do outro lado.

Com as Figuras acima, constatamos que as condições de equilíbrio previstas por Arquimedes para a primeira proposição são de fato válidas na prática.

7.3 – Esferas, Cones e Cilindros:

As figuras tridimensionais foram construídas a partir de moldes feitos de papel perflex. Suas dimensões foram determinadas a partir do molde da esfera que tinha 2,5 cm de raio. Uma vez estabelecida as dimensões dos objetos, desenhamos, cortamos e colamos as figuras:

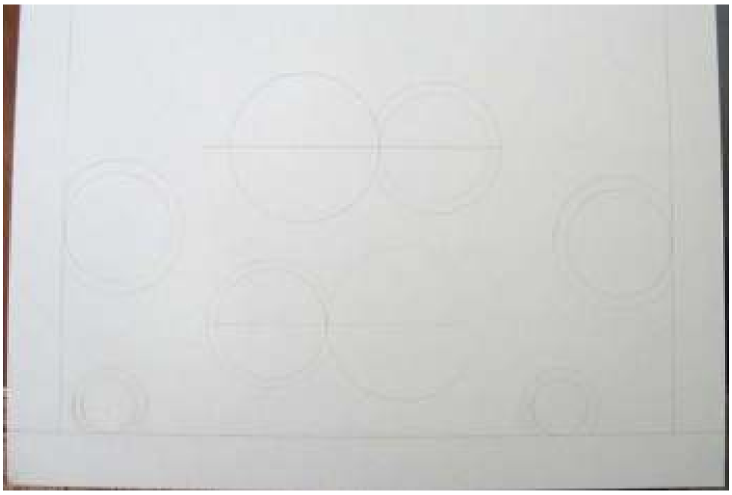

Figura 30: Moldes desenhados no perflex.

Figura 31: Moldes prontos para a aplicação do gesso.

È importante lembrar que antes da aplicação do gesso é necessário untar o papel com óleo, vaselina ou algum produto semelhante para que o papel se desprenda do gesso sem danificá-lo. Após a secagem do gesso, lixamos as figuras de forma que estas ficassem com a correta relação de massa.

Figura 32: Figuras tridimensionais: Esfera, cone, cilindro circunscrito e cilindro grande.

Figura 33: Figuras tridimensionais em perspectiva.

Uma vez que as figuras estavam prontas, penduramos as mesmas na alavanca, respeitando as proporções demonstradas por Arquimedes, de forma a obter as relações apresentadas nas Figuras 13.1 até 16.

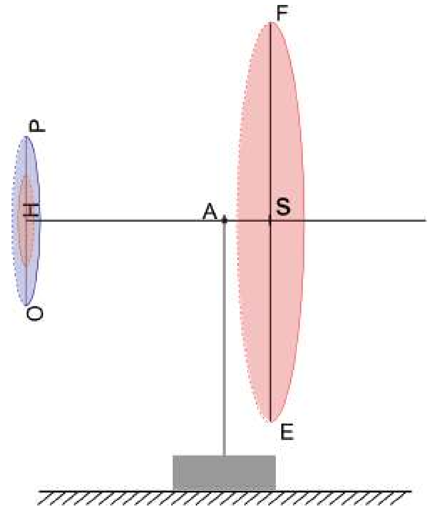

Figura 34: Discos em equilíbrio na alavanca (situação teórica).

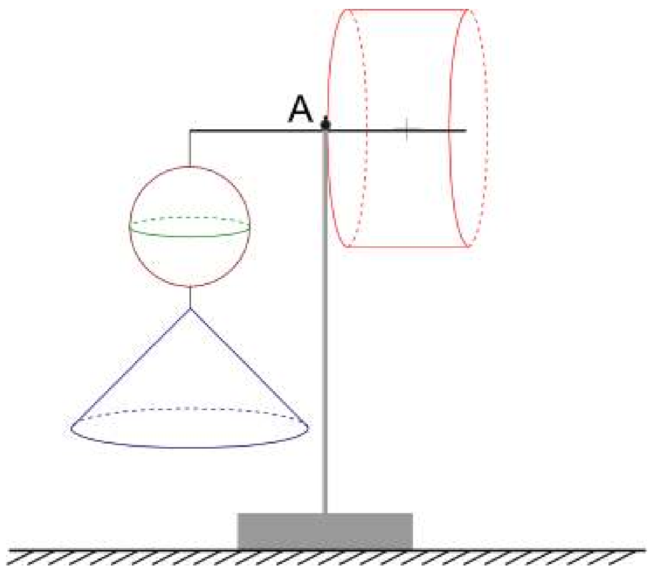

Figura 35: Alavanca em equilíbrio com a esfera, o cone e o cilindro grande (situação teórica).

Figura 36: Alavanca em equilíbrio (situação prática).

Figura 37: Alavanca em equilíbrio (situação prática).

Figura 38: Alavanca em equilíbrio (situação prática).

Com as montagens acima, constatamos que as condições de equilíbrio previstas teoricamente por Arquimedes para estas proposições são válidas experimentalmente.

8 – Conclusões:

Concluímos que foi possível comprovar de forma satisfatória os dois principais teoremas de Arquimedes na sua obra “O Método sobre os Teoremas Mecânicos.” Mais do que isso, o presente trabalho acrescentou muito para a minha compreensão de termos e conceitos que eu julgava dominar plenamente, além de levantar questões sobre a qual eu nunca havia pensado e discutido anteriormente.

Ainda que a utilização das alavancas e balanças seja algo que os estudantes universitários estejam habituados, descobri que muitos deles – inclusive eu – nunca haviam parado para pensar nos pequenos detalhes. O que se deve levar em conta ao construir uma balança? Onde deverá estar seu fulcro e o quão precisa ela é para uma determinada medição?

Outro detalhe importante está relacionado com a construção dos objetos e balanças utilizadas. Aparentemente a construção das balanças e das figuras não deveria apresentar dificuldades pois estamos acostumados com os modelos teóricos dos livros. “Um trabalho fácil para quem tem habilidade em construir coisas.” Mas para minha surpresa, são diversas as interferências e erros de produção que podem ocorrer. Isto acaba tornando esta tarefa muito mais complicada do que parecia ser inicialmente. Exemplos de algumas dificuldades encontradas: Como pendurar os objetos sem acrescentar matéria (como ganchos, arames, presilhas) de forma a não desequilibrar a balança? Como lidar com interferências externas como o vento ou a resistência do material utilizado? Como “equilibrar” uma balança “desequilibrada”? Não é só prender um pesinho como muitos me disseram!

Por fim, acredito que aprendi diversas coisas que poderão ser úteis para a minha formação e para minha profissão (físico e professor de ensino médio). Entre as coisas que aprendi se incluem informações históricas, propostas de trabalhos para alunos, publicações muito interessantes que descobri e que são úteis para qualquer professor. Além disso, passei a ver a obra de Arquimedes com olhos completamente diferentes. Passei a apreciar com uma profundidade bem maior as contribuições deste grande cientista.

Referências:

[1] Assis, A. K. T.; *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca* (Apeiron, Montreal, 2008). Disponível no formato PDF em: www.ifi.unicamp.br/~assis

[2] Archimedes. The Method of Archimedes. In T. L. Heath, editor, *The Works of Archimedes*, páginas 1-51 (Supplement). Dover, New York, 2002. Traduzido por T. L. Heath.

[3] Nova - Infinite Secrets: The Genius of Archimedes. Disponível em: http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/

[4] C. P. Magnaghi, Exame de Qualificação de Mestrado: Uma Análise dos Dois Primeiros Teoremas da Obra "O Método sobre os Teoremas Mecânicos" de Arquimedes (Instituto de Física da UNICAMP, Campinas, fevereiro de 2010). Orientador: A. K. T. Assis.

Comentário Final do Orientador: O aluno desenvolveu de forma satisfatória este trabalho, realizando tudo o que estava proposto no Projeto Inicial.

O Orientador do presente trabalho não solicita sigilo dos resultados obtidos.