Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física Gleb Wataghin

Campinas, 12 de junho de 2005

Relatório Final de Iniciação Científica
I-F590

Prof. Coordenador: Dr. José L. Lunazzi
Orientador: Prof. Dr. Yuri Bozhko

06 - Equações de Einstein

Pamela de Paula Piovezan, Ra: 017024

Instituição Financiadora: FAPESP

Número do processo: 03/09551-8

Área: Matemática

Projeto: Equações de Einstein

Período: 01.07.2004 - 31.12.2004

Término da bolsa: 31.01.2005

1 Resumo do Trabalho Realizado

Nesta segunda parte do projeto foram abordados os seguintes tópicos:

- Cálculo variacional multidimensional;
- Cálculo tensorial;
- Conexão de Levi-Civita, tensores de Riemann e de Ricci;
- Equações de Euler-Lagrange para funcionais que diferem por uma divergência total;
- Equações das Geodésicas;
- Equações de Einstein e sua obtenção a partir de um Princípio Variacional;
- Solução de Schwarzschild;
- Alguns aspectos da Geometria de Schwarzschild;
- Teorema de Birkhoff.

Este estudo constituiu-se de leitura e resolução de problemas baseados nos seguintes livros:

1.) Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P., Modern Geometry - Methods and Applications. Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields, Springer, 1994. ([1])

Partes estudadas:

Capítulo 3: Tensores: a teoria algébrica
16. Exemplos de Tensores;
17. A definição geral de Tensor;
17.1 A regra de transformação para as componentes de um tensor de posto arbitrário;
17.2 Operações algébricas sobre os tensores;
18. Tensores do tipo $(0, k)$;
18.1 Notação diferencial para tensores covariantes;
18.2 Tensores anti-simétricos do tipo $(0, k)$;
18.3 Produto exterior de formas diferenciais. A álgebra exterior;
19. Tensores nos espaços Riemanniano e Pseudo-Riemanniano;
19.1 Elevando e abaixando índices;
19.2 Os autovalores da forma quadrática;
19.3 O operador $*$;
19.4 Tensores no Espaço Euclidiano.

Capítulo 4: Cálculo diferencial de tensores
25. O cálculo diferencial de tensores anti-simétricos;
25.1 O gradiente de um tensor anti-simétrico;
25.2 A derivada exterior de uma forma;
26. Tensores anti-simétricos e a Teoria da Integração;
26.1 Integração de formas diferenciais;
26.2 Exemplos de Integrais de formas diferenciais;
26.3 A fórmula geral de Stokes. Exemplos;
26.4 Prova da fórmula geral de Stokes para o cubo;
28. Derivação covariante;
28.1 Conexões Euclidianas;
28.2 Diferenciação covariante de tensores de posto arbitário;
29. Derivação covariante e a métrica;
29.1 Transporte paralelo de campos vetoriais;
29.2 Geodésicas;
29.3 Conexões compatíveis com a métrica;
30. O tensor de curvatura;
30.1 O tensor de curvatura geral;
30.2 As simetrias do tensor de curvatura. O tensor de curvatura definido através da métrica;
30.3 Exemplos: o tensor de curvatura em espaços de dimensão 2 e 3.

2.) Dirac, P.A.M., General Theory of Relativity, Princeton Landmarks in Physics, 1996. ([**2**])

Partes estudadas:

1. Relatividade Especial;
2. Coordenadas cartesianas não ortogonais;
3. Coordenadas curvilíneas;
4. Quantidades que não são Tensores;
5. Espaço curvilíneo;
6. Transporte paralelo;
7. Símbolos de Christoffel;
8. Geodésicas;
9. As propriedades estacionárias das geodésicas;
10. Derivação Covariante;
11. O Tensor de Curvatura;
14. O Tensor de Ricci;
15. A Lei de Einstein da Gravitação;
18. A Solução de Schwarzchild;
26. O Princípio variacional da Gravitação.

3.) Friedmann, A. A., O Mundo como Espaço-Tempo, Ciência, Moscou, 1965 (2a edição) - tradução do Russo: Prof. Dr. Silvio Pregnolatto do IMECC-UNICAMP, 2001. ([3])

Partes estudadas:

Capítulo 1: Espaço
1. Medidas de Grandeza;
2. Aritmetização do Espaço;
3. Métrica do Espaço;
4. Curvatura do Espaço.

Capítulo 2: Tempo e Mundo
5. Tempo;
6. Movimento;
7. Mundo.

Capítulo 3: Gravitação e Matéria
8. A Mecânica Clássica e a Moderna;
9. Gravitação;
10. Matéria e Estrutura do Universo;
11. Conclusões Gerais do Princípio da Relatividade.

4.) Grib, A., Frenkel, V., Einstein, Friedmann, Lamaitre: a descoberta do Big Bang - Tradução do Russo: Prof. Dr. Silvio Pregnolatto do IMECC-UNICAMP, 2001. ([4])

5.) Weinberg, Steven, Gavitation and Cosmology, Principles and Aplicatios of the General Theory of Relativity, Massachusetts Institute of Technology, John Wiley and Sons, 1972. ([5])

Partes estudadas:

Capítulo 11: Equilíbrio Estelar e Colapso;
7. Campos simetricamente esféricos com dependência temporal.

6.) Misner, C. W., Thorne, Kip S., Wheeler, J. A., Gravitation, W. H. Freeman and Company, New York, 1973. ([6])
Partes estudadas:

Capítulo 25:
2. Simetrias e Leis de Conservação;
3. Quantidades Conservadas do Movimento na Geometria de Schwarzschild.

Desta maneira foram abordados os itens 4., 5., 6. e 7. do Projeto de Pesquisa.

1.1 Resumo dos tópicos estudados

1.1.1 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem de n funções

No caso de um funcional do tipo

$$J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n)dx$$

com condições de fronteira dadas por

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \;\; y_k(x_1) = y_{k1}, \; (k = 1, 2, ..., n)$$

para obtermos as condições necessárias de extremo, variamos só uma das funções $y_j(x)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ deixando as demais invariáveis:

$$\varphi_j[\alpha] \equiv J[y_1, ..., y_j + \alpha\eta_j, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, ..., y_j + \alpha\eta_j, ..., y_n, y'_1, ..., y'_j + \alpha\eta_j, ..., y'_n)dx,$$

onde $\eta_j \in C^1([x_0, x_1])$ tal que $\eta_j(x_0) = \eta_j(x_1) = 0$. Derivando φ_j em relação a α obtemos:

$$\frac{d\varphi_j}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial \alpha}(y_j + \alpha\eta_j) + \frac{\partial L}{\partial y'_j}\frac{\partial}{\partial \alpha}(y'_j + \alpha\eta'_j)\right] dx.$$

Igualando $\frac{d\varphi_j(0)}{d\alpha}$ a zero temos:

$$\int_{x_0}^{x_1} [L_{y_j}\eta_j + L_{y'_j}\eta_{j'}]dx = 0.$$

Mas o Lema 1.3 (apresentado no primeiro relatório) implica que:

$$L_{y_j} - \frac{d}{dx}L_{y'_j} = 0.$$

Fazendo, forma análoga, para qualquer outra função $y_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$L_{y_i} - \frac{d}{dx}L_{y'_i} = 0 \;\; (i = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

que determinam, geralmente, uma família dependente de $2n$ parâmetros de curvas integrais no espaço $x, y_1, y_2, ..., y_n$, que é uma família de extremais do problema variacional dado.

1.1.2 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem das derivadas em ordem superior

Dado o funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))dx$$

onde L é uma função $n+2$ vezes diferenciável com respeito a todos os argumentos e suponhamos que as condições de fronteira tem a forma

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, ..., \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

para obtermos as condições necessárias de extremo devemos inicialmente variar $y(x)$:

$$\varphi[\alpha] \equiv J[y + \alpha\eta] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', ..., y^n + \alpha\eta^n)dx,$$

onde $\eta \in C^n([x_0, x_1])$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Diferenciando φ em relação a α e igualando $\frac{d\varphi(0)}{d\alpha}$ a zero obtemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y}\eta dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y'}\eta' dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y''}\eta'' dx + ... + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)} dx = 0.$$

Integrando por partes o segundo termo uma vez, o terceiro duas vezes, o quarto três vezes e assim sucessivamente até o n-ésimo termo, e colocando η em evidência chegamos a:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^j}\right)\right] dx = 0.$$

Pelo Lema de Lagrange (o Lema 1.1 apresentado no primeiro relatório), concluímos que:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{(j)}}\right) = 0. \tag{2}$$

Dessa forma, a função $y = y(x)$ que realiza o extremo do funcional dado deve ser solução da equação (2). Tal equação, denominada de Euler-Lagrange, é uma equação diferencial de ordem $2n$ e suas curvas integrais se denominam extremais do problema variacional proposto.

Se o funcional J tem a forma:

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', ..., y^{(n)}, z, z', ..., z^{(m)})dx,$$

variando $y(x)$ e considerando $z(x)$ fixa, e depois variando $z(x)$ e considerando $y(x)$ fixa, concluímos que as funções $y(x)$ e $z(x)$, que realizam o extremo, devem satisfazer o seguinte sistema de equações de Euler-Lagrange:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{(j)}}\right) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial L}{\partial z^{(i)}}\right) = 0. \tag{4}$$

Analogamente podemos analisar o extremo de um funcional que depende de um número arbitrário de funções:

$$J[y_1, y_2, ..., y_m] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)})dx,$$

variando somente alguma $y_i(x)$. Assim, obtemos a condição necessária de extremo na forma:

$$\sum_{j=0}^{n_i}(-1)^j \frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i^{(j)}}\right) = 0 \ \ (i = 1, 2, ..., m). \tag{5}$$

1.1.3 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem de funções de várias variáveis

Consideremos o funcional

$$J[u(x,y)] = \int\int_D L\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy,$$

onde L é uma função três vezes diferenciável com respeito a seus argumentos e supondo que se possa achar a função $u = u(x,y)$ que seja contínua juntamente com suas derivadas de segunda ordem inclusive em D, que tome valores fixos na fronteira de D e que realize o extremo do funcional dado. Variando $u(x,y)$, obtemos:

$$\varphi[\alpha] \equiv J[u + \alpha\eta] = \int\int_D L(x, y, u + \alpha\eta, u_x + \alpha\eta_x, u_y + \alpha\eta_y)dxdy,$$

onde $\eta \in C^1(D)$ e se anula na fronteira de D. Derivando φ em relação a α e igualando $\frac{d\varphi(0)}{d\alpha}$ a zero obtemos:

$$\int\int_D (L_u\eta + L_p\eta_x + L_q\eta_y)dxdy = 0,$$

com $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Integrando por partes, temos:

$$\int\int_D \left(L_u - \frac{\partial L_p}{\partial x} - \frac{\partial L_q}{\partial y}\right)\eta dxdy = 0.$$

Cada derivada parcial $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$, quando aplicada às derivadas L_p e L_q , pela Regra da Cadeia, se torna a derivada total D_x e D_y respectivamente, pois L, L_p e L_q dependem de x e y através da função $u = u(x,y)$ (para a definição da derivada total vide a formula no final deste subparágrafo). Assim,

$$\iint\limits_D (L_u - D_x L_p - D_y L_q)\, \eta dx dy = 0.$$

Aplicando o Lema 1.1 (do primeiro relatório), ainda válido neste contexto, conclui-se que

$$L_u - D_x L_p - D_y L_q = 0. \tag{6}$$

Para o funcional

$$J[u(x_1, x_2, ..., x_n)] = \int\limits_D L(x_1, x_2, ..., x_n, u, p_1, p_2, ..., p_n) dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

onde $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, obtemos de maneira completamente análoga, a seguinte equação de Euler-Lagrange a qual deve satisfazer a função $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ que realiza o extremo de J:

$$L_u - \sum_{i=1}^{n} D_i L_{p_i} = 0, \tag{7}$$

onde

$$D_i \equiv \frac{D}{Dx_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + ... + u_{ii_1 i_2 ... i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 ... i_l}} + ...$$

e $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, ...

1.1.4 Equações de Euler-Lagrange para funcionais em forma paramétrica

Em muitos problemas variacionais é conveniente buscar soluções em forma paramétrica. Assim, se tivermos um funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx$$

e buscarmos soluções do tipo $x = x(t)$, $y = y(t)$, o funcional se reduz a seguinte forma:

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt.$$

a função subintegral obtida depois da troca de variáveis não contém explicitamente t e é uma função homogênea de primeiro grau de homogeneidade com respeito as variáveis $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Ela também não altera sua forma ao mudarmos a representação paramétrica da curva. Assim, o funcional J depende da forma da curva e não de sua representção paramétrica. Podemos escrevê-lo na forma:

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt.$$

Variando $x(t)$ e considerando $y(t)$ fixa, e depois variando $y(t)$ e considerando $x(t)$ fixa, concluímos que para encontrar as funções que extremizam o funcional na forma paramétrica temos que resolver o seguinte sistema de equações de Euler-Lagrange:

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0; \quad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}} = 0. \tag{8}$$

1.1.5 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que diferem por uma Divergência Total

Neste parágrafo serão apresentados resultados referentes às Equações de Euler-Lagrange para funcionais que diferem entre si por uma Divergência Total.

Dado funcional

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')dx.$$

Sejam $A = A(x, y, y') \in C^2([x_0, x_1] \times R^1)$ e $J_2[y]$ um funcional da forma

$$J_2[y] = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{L}dx,$$

onde $\tilde{L} = L + \frac{dA}{dx}$. Então as equações de Euler-Lagrange para os funcionais $J_1[y]$ e $J_2[y]$ são as mesmas.

Esse resultado também é válido no caso em que A é função das k-ésimas derivadas, com $k \geq 1$:

$$A = A(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}).$$

Consideramos agora o funcional

$$J_1[u] = \int\limits_D L(x, u, p)dx,$$

com $x = (x_1, ..., x_n)$, $u = u(x_1, ..., x_n)$ e $p = p(p_1, ..., p_n)$ tal que $p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Sejam

1) $A_j = A_j(x, u, p)$, com $j = 1, 2, ..., n$ funções de x,u e suas derivadas primeiras e

2) $J_2[u]$ um funcional do tipo

$$J_2[u] = \int\limits_D \tilde{L}dx,$$

onde $\tilde{L} = L + D_j A_j$ e D_j é a derivada total.

Para o funcional $J_2[u]$ teremos:

$$J_2[u] = \int\limits_D \left(L + \frac{\partial A_j}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial A_j}{\partial u} + p_{ji} \frac{\partial A_j}{\partial p_i} \right) dx.$$

Variando u obtemos:

$$\varphi(\alpha) \equiv J_2[u + \alpha\eta] = \int\limits_D \Big(L(x, u + \alpha\eta, p_k + \alpha\eta_k) + A_{j,x_j}(x, u + \alpha\eta, p_k + \alpha\eta_k) +$$

$$+(p_j + \alpha\eta_j)A_{j,u}(x, u + \alpha\eta, p_k + \alpha\eta_k) + (p_{ji} + \alpha\eta_{ji})A_{j,p_i}(x, u + \alpha\eta, p_k + \alpha\eta_k))\, dx.$$

Após diferenciar $\varphi(\alpha)$ com relação a α, igualar $\frac{d\varphi(0)}{d\alpha}$ a zero e integrar por partes, obtemos:

$$\int_D [L_u - D_i L_{p_i}]\eta dx = 0.$$

Pelo Lema de Lagrange conclui-se que para o funcional $J_2[u]$ teremos a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_i \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0. \tag{9}$$

Mas a equação (9) corresponde à equação de Euler-Lagrange para o funcional $J_1[u]$, o que nos leva a concluir que as equações de Euler-Lagrande para os funcionais $J_1[u]$ e $J_2[u]$ são as mesmas.

Finalmente, tal resultado pode ser generalizado para o caso de funcionais cujas funções de Lagrange dependam de m funções de n variáveis e de suas derivadas até ordem k, ou seja, funcionais da forma:

$$J_1[u^1, u^2, ..., u^m] = \int_D L\left(x, u^i, \frac{\partial u^i}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial^k u^i}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_s}}\right) dx,$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$, $u^i = u^i(x_1, ..., x_n)$ e $i_1 + ... + i_s = k$ com $i = 1, ..., m$.

Sejam $A_j = A_j\left(x, u^1, ..., u^m, \frac{\partial u^1}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u^m}{\partial x_n}\right)$ e

$$J_2[u^1, u^2, ..., u^m] = \int_D \tilde{L} dx,$$

com $\tilde{L} = L + D_j A_j$.

Teorema 1. *As equações de Euler-Lagrange para J_1 e J_2 são as mesmas.*

1.1.6 Algumas relações úteis envolvendo a métrica

A seguir, desenvolviremos algumas relações envolvendo a métrica que serão utilizadas no parágrafo 1.1.8.

1) Segundo a regra do produto,

$$(AB)_{,j} = A_{,j} B + AB_{,j} \quad \text{ou ainda,} \quad AB_{,j} = (AB)_{,j} - A_{,j} B.$$

Então, para $A = g^{ij}\sqrt{-g}$ e $B = \Gamma^k_{ij}$, teremos:

$$g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ij,k} = (g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ij})_{,k} - (g^{ij}\sqrt{-g})_{,k}\Gamma^k_{ij}. \tag{10}$$

2) Derivando $g^{kl}g_{li} = \delta_i^k$ em relação a x_s, obtemos:

$$g^{kl,s}g_{il} + g^{kl}g_{il,s} = 0.$$

Trocando os indices $l \to j$ e $k \to l$ no segundo termo e multiplicando a relação obtida por g^{ki}, temos que

$$g^{kl}_{,s} = -g^{ki}g^{lj}g_{ij,s}. \tag{11}$$

3) Pela regra do produto temos que

$$(g^{ij}\sqrt{-g})_{,k} = g^{ij}_{,k}\sqrt{-g} + g^{ij}(\sqrt{-g})_{,k}.$$

Mas é verdade que $g^{ij}_{,k} = -g^{i\alpha}g^{j\beta}g_{\alpha\beta_{,k}}$ (vide (11). Então,

$$(g^{ij}\sqrt{-g})_{,k} = -g^{i\alpha}g^{j\beta}g_{\alpha\beta_{,k}}\sqrt{-g} + g^{ij}(\sqrt{-g})_{,k}. \tag{12}$$

Observe que

$$\Gamma^{\lambda}_{ks} = g^{s\lambda}\Gamma_{\lambda ks} = \frac{1}{2}g^{s\lambda}\left[g_{\lambda k,s} + g_{\lambda s,k} - g_{ks,\lambda}\right].$$

Usando o fato de que a métrica é simétrica e fazendo $\lambda \to s$ e $s \to \lambda$, obtemos que $g^{s\lambda}g_{\lambda k,s} = g^{s\lambda}g_{\lambda s,k}$. Sendo assim,

$$\Gamma^{\lambda}_{ks} = \frac{1}{2}g^{s\lambda}g_{\lambda s,k}. \tag{13}$$

Além disso, pela regra da cadeia e de (13), temos

$$(\sqrt{-g})_{,k} = \frac{1}{2}\frac{-g_{,k}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\left(\frac{-gg^{ij}g_{ij,k}}{\sqrt{-g}}\right) = \sqrt{-g}\Gamma^{l}_{kl}. \tag{14}$$

Substituindo (13) e (14) em (12), obtemos que

$$(g^{ij}\sqrt{-g})_{,k} = (-g^{i\alpha}g^{j\beta}\Gamma^{i}_{\beta k} - g^{i\alpha}\Gamma^{j}_{\alpha k} + g^{ij}\Gamma^{l}_{kl})\sqrt{-g}.$$

Fazendo $k \to j$ e $\alpha \to k$ no segundo termo da direita teremos

$$(g^{ij}\sqrt{-g})_{,k} = -g^{j\beta}\Gamma^{i}_{\beta k}\sqrt{-g}. \tag{15}$$

Para $k = j$,

$$(g^{ij}\sqrt{-g})_{,j} = -g^{j\beta}\Gamma^{i}_{\beta j}\sqrt{-g}. \tag{16}$$

4) Agora suponhamos que a métrica g depende de um parâmetro ϵ, isto é, consideramos uma família de métricas $g = g(\epsilon)$ tal que $g(\epsilon) \in C^1$ como função de ϵ.

Novamente pela regra do produto temos que

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(\Gamma^{k}_{ij}\Gamma^{l}_{kl}g^{ij}\sqrt{-g}) = \Gamma^{k}_{ij}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(\Gamma^{l}_{lk}g^{ij}\sqrt{-g}) + \Gamma^{l}_{kl}g^{ij}\sqrt{-g}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Gamma^{k}_{ij}. \tag{17}$$

Da relação (14) concluímos que

$$\Gamma^l_{kl} g^{ij} \sqrt{-g} = g^{ij} \left(\sqrt{-g} \right)_{,k} . \tag{18}$$

Além disso,

$$g^{ij} \sqrt{-g} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Gamma^k_{ij} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g^{ij} \sqrt{-g} \Gamma^k_{ij}) - \Gamma^k_{ij} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g^{ij} \sqrt{-g}). \tag{19}$$

Substituindo (18) e (19) em (17) obtemos

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Gamma^k_{ij} \Gamma^l_{kl} g^{ij} \sqrt{-g}) = \Gamma^k_{ij} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g^{ij} \sqrt{-g})_{,k} + \Gamma^l_{kl} \frac{d}{d\epsilon}_{\epsilon=0} (g^{ij} \sqrt{-g} \Gamma^k_{ij}) - \Gamma^l_{kl} \Gamma^k_{ij} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g_{ij} \sqrt{-g}). \tag{20}$$

Mas, pela relação (15),

$$g^{ij} \sqrt{-g} \Gamma^k_{ij} = -(g^{kj} \sqrt{-g})_{,j} .$$

Substituindo a relação acima em (20) teremos:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Gamma^k_{ij} \Gamma^l_{kl} g^{ij} \sqrt{-g}) = \Gamma^k_{ij} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} g^{ij} (\sqrt{-g})_{,k} - \Gamma^l_{kl} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g^{kj} \sqrt{-g})_{,j} - \Gamma^l_{kl} \Gamma^k_{ij} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g_{ij} \sqrt{-g}). \tag{21}$$

5) Derivando $\Gamma^k_{il} \Gamma^l_{jk} g^{ij} \sqrt{-g}$ em relação a ϵ e fazendo $\epsilon = 0$, obtemos:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Gamma^k_{il} \Gamma^l_{jk} g^{ij} \sqrt{-g}) = \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Gamma^k_{il} \right) \Gamma^l_{jk} g^{ij} \sqrt{-g} + \Gamma^k_{il} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Gamma^l_{jk} \right) g^{ij} \sqrt{-g} + \Gamma^k_{il} \Gamma^l_{jk} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} g^{ij} \sqrt{-g} \right). \tag{22}$$

Fazendo $j \to i$,$k \to l$,$l \to k$ e $i \to j$ no segundo termo da direita, podemos escrever (22) como:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Gamma^k_{il} \Gamma^l_{jk} g^{ij} \sqrt{-g}) = 2 \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Gamma^k_{il} \right) \Gamma^l_{jk} g^{ij} \sqrt{-g} + \Gamma^k_{il} \Gamma^l_{jk} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} g^{ij} \sqrt{-g} \right). \tag{23}$$

Adicionando e subtraindo o termo $2\Gamma^l_{ik} \Gamma^k_{jl} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (g^{ij} \sqrt{-g} \right)$, teremos que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Gamma^l_{ik} \Gamma^k_{jl} g^{ij} \sqrt{-g}) = 2 \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Gamma^l_{ik} g^{ij} \sqrt{-g}) \right) \Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^k_{jl} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} g^{ij} \sqrt{-g} \right). \tag{24}$$

Sabemos que $\Gamma_{ijs} + \Gamma_{jis} = g_{ij,s}$. Substituindo em (11), obtemos

$$g^{kl}_{,s} = -g^{lj} \Gamma^k_{js} - g^{ki} \Gamma^l_{is}.$$

Fazendo $k \to j$, $s \to k$, $j \to s$, derivando em relação a ϵ e multiplicando por Γ^k_{jl}, teremos:

$$\Gamma^k_{jl} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} g^{jl}_{,k} \sqrt{-g} \right) = - \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(g^{ls} \sqrt{-g} \Gamma^j_{sk} \right) \Gamma^k_{jl} - \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(g^{js} \sqrt{-g} \Gamma^l_{sk} \right) \Gamma^k_{jl}. \tag{25}$$

Fazendo $j \to l$ e $l \to j$ no último termo da direita em (25), obtemos

$$\Gamma^k_{jl} \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} g^{jl}_{,k} \sqrt{-g} \right) = -2 \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(g^{ls} \sqrt{-g} \Gamma^j_{sk} \right) \Gamma^k_{jl}.$$

Finalmente, com $l \to j$, $s \to i$ e $j \to l$ no termo da direita, temos que

$$\Gamma^k_{jl}\left(\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} g^{jl}_{,k}\sqrt{-g}\right) = -\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^l_{ik}\right)\Gamma^k_{jl}. \tag{26}$$

1.1.7 Equação das Geodésicas

O funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}dt$$

apresenta o comprimento de arco na Geometria Rimaniana, onde $g = (g_{ik}(x))$ é a métrica do espaço considerado ([1]). Nosso objetivo é procurar todas as curvas $x^i = x^i(t)$ que são pontos críticos deste funcional.

Seja s o parâmetro natural da curva, isto é, a curva é parametrizada pelo seu comprimento de arco. A relação entre s e t é dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}. \tag{27}$$

Escrevendo as equações de Euler-Lagrange obtemos o sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{ij}\dot{x}^i}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\right) - \frac{\frac{1}{2}(g_{ik,j}\dot{x}^i\dot{x}^k)}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\right] = 0. \tag{28}$$

Multiplicando ambos os membros de (28) por $\frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}$ e utilizando a regra da cadeia temos:

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\frac{d}{dt}\left(\frac{(g_{ij}\dot{x}^i}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\right) - \frac{\frac{1}{2}g_{ik,j}\dot{x}^i\dot{x}^k}{(\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k})^2} = 0.$$

De (27),

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}. \tag{29}$$

Usando a relação (29), a regra da cadeia e que $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$, obtemos:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\right) - \frac{1}{2}g_{ik,j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0,$$

que pode ser escrito na forma:

$$g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{dx^i}{ds}\frac{d}{ds}g_{ij} - \frac{1}{2}g_{ik,j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Novamente, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{ds}g_{ij} = g_{ij,k}\frac{dx^k}{ds}.$$

Assim,

$$g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + g_{ij,k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \frac{1}{2}g_{ik,j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{30}$$

Multiplicando (30) por g^{jl} temos:

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}(2g^{jl}g_{ij,k} - g^{jl}g_{ik,j}) = 0. \tag{31}$$

O segundo membro de (31) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}(2g^{jl}g_{ij,k} - g^{jl}g_{ik,j}) = \frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}g^{jl}g_{ij,k} + \frac{1}{2}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds}g^{jl}g_{kj,i} - \frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}g^{jl}g_{ik,j}. \tag{32}$$

Para isto, usamos que $2g^{jl}g_{ij,k} = g^{jl}g_{ij,k} + g^{jl}g_{kj,i}$. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}(2g^{jl}g_{ij,k} - g^{jl}g_{ik,j}) = \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{1}{2}g^{kl}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) = \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\Gamma^l_{ij}, \tag{33}$$

onde $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{jl}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$ são os Símbolos de Christoffel ([1,2]).
Substituindo (33) em (31) temos:

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma^l_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0. \tag{34}$$

A equação (34) corresponde a Equação das Geodésicas.

Observação: Quando $g_{ik} = \delta_{ik}$, isto é, a métrica é Euclidiana, a solução desta equação é uma reta na forma paramétrica.

1.1.8 O Princípio da Ação Gravitacional

Seja

$$I = \int_D R\sqrt{-g}dx, \tag{35}$$

com R sendo a curvatura escalar e g o determinante da métrica, integrados em um determinado volume quadridimensional. Lembramos que R pode ser obtido através da contração dos dois índices do Tensor de Ricci (vide [2, p. 25, (14.4)]) e decomposto na forma seguinte:

$$R = g^{ij}R_{ij} = R^* - L^*, \tag{36}$$

onde $R^* = g^{ij}\left(\Gamma^k_{ik,j} - \Gamma^k_{ij,k}\right)$ e $L^* = g^{ij}\left(\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}\right)$. Para $R^*\sqrt{-g}$, teremos:

$$R^*\sqrt{-g} = g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ik,j} - g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ij,k}. \tag{37}$$

Usando a relação (10), a relação acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$R^*\sqrt{-g} = D_j\left(g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ik}\right) - D_k\left(g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ij}\right) - \left(g^{ij}\sqrt{-g}\right)_{,j}\Gamma^k_{ik} + \left(g^{ij}\sqrt{-g}\right)_{,k}\Gamma^k_{ij}.$$

Trocando j e k no segundo termo, temos que

$$R^*\sqrt{-g} = D_j\left(g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ik} - g^{ik}\sqrt{-g}\Gamma^j_{ik}\right) - \left(g^{ij}\sqrt{-g}\right)_{,j}\Gamma^k_{ik} + \left(g^{ij}\sqrt{-g}\right)_{,k}\Gamma^k_{ij}. \tag{38}$$

Substituindo (15) e (16) em (38), obtemos

$$R^*\sqrt{-g} = D_j\left(g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ik} - g^{ik}\sqrt{-g}\Gamma^j_{ik}\right) + g^{j\beta}\sqrt{-g}\Gamma^i_{\beta j}\Gamma^k_{ik} - g^{j\beta}\sqrt{-g}\Gamma^i_{\beta k}\Gamma^k_{ij} +$$

$$+ g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij} - g^{j\alpha}\sqrt{-g}\Gamma^j_{\alpha k}\Gamma^k_{ij}. \tag{39}$$

Definindo $A_j \equiv g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^k_{ik} - g^{ik}\sqrt{-g}\Gamma j_{ik}$, teremos:

$$R^*\sqrt{-g} = D_jA_j + g^{j\beta}\sqrt{-g}\Gamma^i_{\beta j}\Gamma^k_{ik} - g^{j\beta}\sqrt{-g}\Gamma^i_{\beta k}\Gamma^k_{ij} + g^{ij}\sqrt{-g}\Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij} - g^{j\alpha}\sqrt{-g}\Gamma^j_{\alpha k}\Gamma^k_{ij}.$$

Fazendo $\beta \to i$ e $i \to l$ no segundo termo, $\beta \to i$, $i \to k$ e $k \to l$ no quarto, trocando k e l no terceiro e α e j no último, obtemos:

$$R^*\sqrt{-g} = D_jA_j + 2g^{ij}\sqrt{-g}\left(\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{kj}\right),$$

Mas $L^* = g^{ij}\left(\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{kj}\right)$. Então,

$$R^*\sqrt{-g} = D_jA_j + 2L^*\sqrt{-g}. \tag{40}$$

Das relações (36) e (40) temos que

$$R\sqrt{-g} = D_jA_j + L^*\sqrt{-g}. \tag{41}$$

Seja

$$J = \int_D L dx, \tag{42}$$

com $L \equiv L^*\sqrt{-g}$. Pelo Teorema 1, com $n = 4$, $m = 10$, $k = 2$, os funcionais I e J têm as mesmas equações de Euler-Lagrange. Então trabalharemos com J. Podemos considerar L como a densidade da ação para o campo gravitacional. Observe que L não envolve as segundas derivadas de g_{ij}.

O passo seguinte é variar J:

$$\phi(\epsilon) \equiv J[g + \epsilon\eta] = \int_D L(x, g_{ij} + \epsilon\eta, g_{ij,k} + \epsilon\eta_{ij,k})dx,$$

sendo $\eta \in C^1$ uma função que se anula na fronteira de D. Derivando ϕ em relação a ϵ, em $\epsilon = 0$, obtemos

$$\left.\frac{d\phi}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_D \left[\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl}\sqrt{-g}\right) - \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}\sqrt{-g}\right)\right]dx. \tag{43}$$

O primeiro termo da direita corresponde à (21):

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl}g^{ij}\sqrt{-g}) = \Gamma^k_{ij}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(g^{ij}\sqrt{-g})_{,k} + \Gamma^l_{kl}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(g^{kj}\sqrt{-g})_{,j} - \Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(g_{ij}\sqrt{-g}).$$

Quanto ao segundo termo, utilizando (24) e (26), obtemos

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}\sqrt{-g}\right) = -\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{jl}_{,k}\sqrt{-g}\right)\Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\sqrt{-g}\right). \tag{44}$$

Subtraindo (21) de (44) e utilizando a regra do produto temos que

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl}\sqrt{-g}\right) - \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}\sqrt{-g}\right) = \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij}\right)\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\sqrt{-g}\right). \tag{45}$$

Igualando $\left.\frac{d\phi}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$ a zero, de (43) e (45) temos

$$0 = \int_D \Gamma^k_{ij}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left[\left(g^{ij}\sqrt{-g}\right)_{,k}\right]dx + \int_D \Gamma^l_{kl}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left[\left(g^{kj}\sqrt{-g}\right)_{,j}\right]dx$$

$$+\int_D\left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij}\right)\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left(g^{ij}\sqrt{-g}\right). \tag{46}$$

Definindo $\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} g^{ij}\sqrt{-g} = \tilde{\eta}^{ij}$, de (46) teremos

$$\left.\frac{\phi}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_D \Gamma^k_{ij}\tilde{\eta}^{ij}_{,k}dx - \int_D \Gamma^l_{kl}\tilde{\eta}^{kj}_{,j}dx + \int_D\left[\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij}\tilde{\eta^{ij}}\right]dx = 0.$$

Integrando por partes o primeiro e o segundo termo teremos

$$\int_D \tilde{\eta}^{ij}\left[-\Gamma^k_{ij,k} + \Gamma^l_{kl,j} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{kl}\Gamma^k_{ij}\right]dx = 0.$$

Observe que o termo em colchetes corresponde ao Tensor de Ricci ([2]). Então,

$$\int_D \tilde{\eta}^{ij}R_{ij}dx = 0. \tag{47}$$

Como $\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} g^{ij}$ é arbitrário a quantidade $\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}(g^{ij}\sqrt{-g} \equiv \tilde{\eta}^{ij})$ também o é. Então, para que (47) seja sempre válido impomos que

$$R_{ij} = 0,$$

que corresponde às equações de Einstein na ausência de matéria.

1.1.9 Solução de Schwarzschild

Considerando um campo gravitacional estático (gerado por um corpo em repouso com simetria esférica), a expressão para ds^2 em coordenadas espaciais esféricas, pode ser escrita como:

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{48}$$

com ν e λ funções de r apenas ([2],[5],[6]). Nosso objetivo será determinar a métrica do espaço que satisfaça as Equações de Einstein no vácuo. Em termos das componentes da métrica, $ds^2 = g_{ik}dx^idx^k$. Então, de (48) teremos:

$$g_{00} = e^{2\nu},\ \ g_{11} = -e^{2\lambda},\ \ g_{22} = -r^2,\ \ g_{33} = -r^2\sin\theta^2\ \ e\ \ g_{\mu\nu} = 0\ \text{ para }\ \mu \neq \nu.$$

Como $(g_{\mu\nu})$ é diagonal, sua matriz inversa é facilmente obtida:

$$g^{00} = e^{-2\nu},\ \ g^{11} = -e^{-2\lambda},\ \ g^{22} = -r^{-2},\ \ g^{33} = -\frac{1}{r^2\sin\theta^2}\ \ e\ \ g^{\mu\nu} = 0\ \text{ para }\ \mu \neq \nu.$$

Quanto aos símbolos de Christoffel, temos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \nu' e^{2\nu-2\lambda},\\
\Gamma^0_{10} &= \nu',\\
\Gamma^1_{11} &= \lambda',\\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^1_{13} = r^{-1},\\
\Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda},\\
\Gamma^3_{23} &= \cot\theta,\\
\Gamma^1_{33} &= -re^{-2\lambda}\sin^2\theta,\\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}$$

onde $'$ denota a derivada em relação a r. Os demais símbolos de Christoffel são nulos.

Para o Tensor de Ricci teremos:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \tfrac{2\nu'}{r}\right)e^{2\nu-2\lambda},\\
R_{11} &= \nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \tfrac{2\lambda'}{r},\\
R_{22} &= (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1,\\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

e para $\mu \neq \nu$, $R_{\mu\nu} = 0$.

A Lei da Gravitação de Einstein no vácuo requer que o Tensor de Ricci seja nulo. Assim,

$$-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} = 0, \tag{49}$$

$$\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0, \tag{50}$$

$$e^{-2\lambda}(1 - \lambda' r + \nu' r) - 1 = 0, \tag{51}$$

$$R_{22}\sin^2\theta = 0. \tag{52}$$

Somando (49) e (50) temos que $\nu' + \lambda' = 0$. Integrando essa relação e considerando que a métrica tende a se tornar plana à medida que nos afastamos do corpo que originou o campo gravitacional (no limite em que r tende à infinito, ν e λ tendem a zero), obtemos:

$$\lambda + \nu = 0. \tag{53}$$

Substituindo em (51) obtemos

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1,$$

que, segundo a Regra do Produto, pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dr}(re^{2\nu}) = 1.$$

A solução dessa equação é dada por

$$re^{2\nu} = r - 2m, \tag{54}$$

onde m é uma constante de integração que pode ser interpretada como a massa do corpo em questão.

Finalmente, de (53) e (54), a solução de Schwarschild será:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \tag{55}$$

Tal solução é válida na região externa à superfície do corpo que produz o campo, na ausência de matéria.

1.1.10 Alguns aspectos da Geometria de Schwarzschild através de resolução de exercícios

Definição: *O vetor $\xi = (\xi_i)$ é denominado Vetor de Killing se satisfaz a relação:*

$$\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0.$$

Equivalentemente,

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} - 2\Gamma^k_{ji}\xi_k = 0, \tag{56}$$

sendo esta última obtida utilizando-se a definição da derivada covariante, denotada aqui por ';'.

Exercício 1. Mostre que o vetor contra-variante $\xi = (\xi^i) = (1, 0, 0, 0)$ é vetor de Killing para a métrica de Schwarzschild.

Solução: O vetor contra-variante em questão pode ser escrito como $\xi^i = \delta^{i0}$. Multiplicando ξ^i por g_{ik} obtemos:

$$\xi_k = \xi^i g_{ik} = g_{ik}\delta^{i0} = g_{k0}.$$

Para a métrica de Schwarzschild, $g_{k0} = \delta_{k0}e^{2\nu}$, onde ν é função de r apenas. Assim, $\xi_k = \delta_{k0}e^{2\nu}$. Substituindo ξ_k na relação (27) teremos:

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} - 2\Gamma^0_{ij} e^{2\nu} = 0. \tag{57}$$

Devemos analisar dois casos.

(i) Seja $i = j$. Para a métrica de Schwarzschild, $\Gamma^0_{ii} = 0$ para todo i. Se $i \neq 0$,então $\xi_i = 0$. Se $i = 0$, $\xi_0 = e^{2\nu}$. Como ν não depende do tempo, $\xi_{0,0} = 0$. Assim,

$$2\xi_{i,i} - 2\Gamma^0_{ii} e^{2\nu} = 0,$$

e a relação (28) está verificada.

(ii) Se $i \neq j$, como (57) é simétrico em (ij) temos que analisar somente seis casos (i, j) com $i < j$. Cinco destes são facilmente verificados, pois o único termo não nulo de ξ_k é ξ_0 que é somente função de r. Quanto ao caso $(0, 1)$, temos:

$$\xi_{0,1} + \xi_{1,0} - 2\Gamma^0_{01} e^{2\nu} = \frac{\partial(e^{2\nu})}{\partial r} - 2\nu' e^{2\nu} = 2\nu' e^{2\nu} - 2\nu' e^{2\nu} = 0.$$

Dessa forma, de (i) e (ii) conclui-se que $\xi = (\xi^i) = (1, 0, 0, 0)$ é vetor de Killing para a métrica de Schwarzschild.

Exercício 2. Mostre que $\xi = (\xi^i) = (0, 0, 0, 1)$ é vetor de Killing para a métrica de Schwarzschild.

Solução: Utilizando o mesmo raciocínio do exercício 1, obtemos que $\xi_k = \delta_{k3}(-r^2 \sin^2\theta)$. Substituindo na relação (56) temos:

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} + 2r^2 \sin^2\theta \Gamma^3_{ij} = 0. \tag{58}$$

Vamos analisar dois casos.

(i) Seja $i = j$. Para a métrica em questão, $\Gamma^3_{ii} = 0$ para todo i. Se $i \neq 3$,então $\xi_i = 0$. Se $i = 3$, $\xi_3 = -r^2 \sin^2\theta$ e $\xi_{3,3} = 0$. Assim,

$$2\xi_{i,i} + 2r^2 \sin^2\theta \Gamma^{02}_{ii} = 0,$$

e a relação (58) está verificada.

(ii) Se $i \neq j$, novamente temos que analisar somente seis casos (i, j) com $i < j$. Quatro destes são facilmente verificados. Quanto ao caso $(1, 3)$, temos:

$$\xi_{1,3} + \xi_{3,1} + 2\Gamma^3_{13} r^2 \sin^2\theta = \frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial r} + 2r^2 \sin^2\theta \left(\frac{1}{r}\right) = -2r\sin^2\theta + 2r\sin^2\theta = 0.$$

Para $(2, 3)$ temos:

$$\xi_{2,3} + \xi_{3,2} + 2\Gamma^3_{23} r^2 \sin^2\theta = \frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial\theta} + 2r^2\sin^2\theta\cot\theta = -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = 0.$$

Estando a relação (58) verificada, conclui-se que $\xi = (0, 0, 0, 1)$ é vetor de Killing para a métrica de Schwarzschild.

Exercício 3. Sejam ξ um campo vetorial de Killing e u um vetor tangente a geodésica de uma métrica g. Mostre que $u \cdot \xi = g(u, \xi)$ é costante sobre esta geodésica.

Solução: Seja ∇ a conecção de Levi-Civita correspondente a métrica g ([1]). A derivada $\nabla_u(u \cdot \xi)$ é a variação de $u \cdot \xi$ sobre a geodésica. Mas,

$$\nabla_u(u \cdot \xi) = g(\nabla_u u, \xi) + g(u, \nabla_u \xi),$$

pois a métrica é paralela (isto é, a conexão de Levi-Civita ∇ e a métrica g são compatíveis ([1]). Como u é tangente a geodésica, $\nabla_u u = 0$. Para $g(u, \nabla_u \xi)$ teremos

$$g(u, \nabla_u \xi) = u^i u^j \xi_{i;j} = \frac{1}{2} u^i u^j \xi_{i;j} + \frac{1}{2} u^i u^j \xi_{i;j}.$$

Trocando i e j no segundo termo da direita, obtemos

$$g(u, \nabla_u \xi) = \frac{1}{2} u^i u^j (\xi_{i;j} + \xi_{j;i}).$$

Mas, $\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0$, pois ξ é vetor de Killing. Então, $g(u, \nabla_u \xi) = 0$, o que implica que $\nabla_u(g(u, \xi)) = 0$. Portanto, $u \cdot \xi = g(u, \xi)$ é constante sobre a geodésica.

Obsservação: Considere a luz que segue uma geodésica isotrópica (curva *lightlike*). O quadri-vetor momento-energia $\vec{p} = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ é tangente à geodésica. Dos exercícios 1, 2 e 3 temos que p_0 =constante e p_3 =constante.

Exercício 4. Mostrar que os trajetos da luz na geometria de Schwarzschild satisfazem a equação diferencial

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3u^2,$$

onde $u = \frac{m}{r}$.

Solução: Considere o quadri-vetor momento-energia $\vec{p} = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ que, no caso da luz é *lightlike*. Podemos escolher o sistema de coordenadas tal que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Assim, $p^2 = \frac{d\theta}{d\lambda} = 0$, onde λ é um parâmetro sobre a curva seguida pela luz - a geodésica isotrópica.

Quanto às outras componentes de $\vec{p}$, teremos:

$$p^0 = \frac{dt}{d\lambda} = g^{00} p_0 = \frac{p_0}{1 - \frac{2m}{r}}, \tag{59}$$

$$p^1 = \frac{dr}{d\lambda}, \tag{60}$$

$$p^3 = \frac{d\phi}{d\lambda} = g^{33} p_3 = \frac{p_3}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{p_3}{r^2}, \tag{61}$$

onde $(g_{\mu\nu})$ corresponde a métrica de Schwarzschild. De (60) e (61) conclui-se que

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{p^1}{p^3}. \tag{62}$$

Para $|\vec{p}|^2 = 0$ devemos ter que:

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = g_{00}(p^0)^2 + g_{11}(p^1)^2 + g_{22}(p^2)^2 + g_{33}(p^3)^2 = 0. \tag{63}$$

Substituindo (60) e (61) em (63), temos

$$\frac{(p_0)^2}{1-\frac{2m}{r}} = \frac{(p_1)^2}{1-\frac{2m}{r}} + \frac{(p^3)^2}{r^2}.$$

Dividindo ambos os lados da relação acima por $(p_3)^2$, obtemos:

$$\left(\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)\frac{(p_0)^2}{(p_3)^2} = \left(\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)\frac{(p_1)^2}{(p_3)^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Mas, do exercício 3 vem que p_0 e p_1 são constantes. Denotando $\frac{(p_0)^2}{(p_3)^2} = \alpha$, temos que

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\frac{\alpha}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{1}{r^2}\right] = \left(\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right)\frac{(p_1)^2}{(p_3)^2}. \tag{64}$$

De (32), (33) e (35) obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\frac{\alpha}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{1}{r^2}\right].$$

Definindo $u = \frac{m}{r}$ a relação acima se torna:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = m^2\alpha - u^2 + 2u^3, \tag{65}$$

Diferenciando (65) em relação a ϕ obtemos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2, \tag{66}$$

que corresponde a equação satisfeita pelos trajetos da luz, na geometria de Schwarzschild.

1.1.11 Teorema de Birkhoff

Considerando um campo gravitacional com simetria esférica e dependência temporal, a expressão para ds^2, com coordenadas espaciais esféricas, pode ser escrita como ([5],[6]):

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{67}$$

com λ e ν funções de r e t.

Os elementos não nulos da métrica e seus inversos são:

$$g_{00} = e^{2\nu},\;\; g_{11} = -e^{2\lambda},\;\; g_{22} = -r^2,\;\; g_{33} = -r^2\sin\theta^2,$$

$$g^{00} = e^{-2\nu},\ \ g^{11} = -e^{-2\lambda},\ \ g^{22} = -r^{-2},\ \ g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin\theta^2}.$$

Para os símbolos de Christoffel não nulos teremos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \dot{\nu}, \\
\Gamma^1_{00} &= \nu' e^{2\nu - 2\lambda}, \\
\Gamma^0_{10} &= \nu', \\
\Gamma^1_{10} &= \dot{\lambda}, \\
\Gamma^0_{11} &= \dot{\lambda} e^{2\nu - 2\lambda}, \\
\Gamma^1_{11} &= \lambda', \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = r^{-1}, \\
\Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda}, \\
\Gamma^3_{23} &= \cot\theta, \\
\Gamma^1_{33} &= -re^{-2\lambda}\sin^2\theta, \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}$$

onde as derivada parciais em relação a r e t das funções correspondentes são denotadas com ' e $\dot{}$.

Quanto ao tensor de Ricci, obtemos:

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2\nu-2\lambda} + \dot{\lambda}^2, \tag{68}$$

$$R_{11} = \nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} + (-\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \dot{\lambda}\dot{\nu})e^{2\lambda-2\nu}, \tag{69}$$

$$R_{22} = (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1, \tag{70}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta, \tag{71}$$

$$R_{01} = -\frac{2\dot{\lambda}}{r} \tag{72}$$

e os demais tensores são nulos.

Impondo $R_{\mu\nu} = 0$ obtemos de (72) que $\dot{\lambda} = 0$. Portanto, λ é independente do tempo. Assim, as equações de Einstein no vácuo implicam

$$\left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2\nu-2\lambda} = 0, \tag{73}$$

$$\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0, \tag{74}$$

$$(1 - \lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1 = 0, \tag{75}$$

$$R_{22}\sin^2\theta = 0. \tag{76}$$

Observe que as equações acima correspondem às equações (49)-(52) já estudadas na seção 1.1.9. Sendo assim, como solução para este problema teremos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2,$$

que corresponde á solução de Schwarzschild. Dessa forma, provamos o teorema de Birkoff, enunciado a seguir.

Teorema de Birkhoff. *Um campo gravitacional com simetria esférica, na ausência de matéria, deve ser estático e com a métrica dada pela solução de Schwarzschild.*

2 Forma de Trabalho

De um modo geral, o trabalho foi desenvolvido sob a forma de estudo individual e apresentações de seminários para o orientador semanalmente, durante duas horas.

Em Julho de 2004, estudamos ([1]), ([3]) e ([4]). No início de Agosto, realizamos o estudo de Cálculo Variacional Multidimensional. Ainda em Agosto, iniciamos o estudo das Equações de Einstein ([2]). Neste período o orientador desenvolveu o tema em forma de aulas. Em Setembro e Outubro, abordamos as Geodésicas e a solução de Schwarzschild. Em Novembro, estudamos a obtenção das Equações de Einstein a partir de um princípio variacional e em Dezembro, o teorema de Birkhoff. Em seguida estes conhecimentos foram utilizados na resolução de problemas relacionados, alguns dos quais apresentados neste relatório.

3 Plano de trabalho e cronograma para as etapas seguintes

Para Janeiro está previsto o seguinte:

8. Outras soluções das Equações de Einstein.

4 Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP pela bolsa e pela credibilidade dada ao projeto.

Ao Prof. Dr. Silvio Pregnolatto por nos emprestar suas traduções ([3]) e ([4]) ainda não publicadas.

Ao Carlos Henrique Grossi pelos dois seminários que nos foram gentilmente apresentados.

Agradeço ainda a dedicação do orientador Prof. Dr. Yuri Bozhkov, dispensada a mim, no desenvolvimento de todo este projeto.

5 Conclusão

Satisfatóriamente atingimos o objetivo principal do projeto ao obtermos as equações de Einstein no vácuo a partir de um princípio variacional. Isso foi possível devido ao nosso empenho com este trabalho. Em Janeiro, estudaremos algumas soluções das Equações de Einstein finalizando o projeto no prazo previsto.

Finalmente, fico feliz em dizer que aprendi muito durante este período e que além disso, pude aplicar esses novos conhecimentos em algumas das matérias cursadas durante o segundo semestre de 2004.

6 Comentrios

O único comentrio referente ao projeto feito pelo coordenador da disciplina foi em 25/04/2005 às 00:36:55 horas: Projeto aprovado.

7 Bibliografia

[1] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P., Modern Geometry - Methods and Aplications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields, Springer-Verlag, 1984.

[2] Dirac, P.A.M., General Theory of Relativity, Princeton Landmarks in Physics, 1996.

[3] Friedmann, A. A., O Mundo como Espaço-Tempo, Ciência, Moscou, 1965 (2a edição) - tradução do Russo: Prof. Dr. Silvio Pregnolatto do IMECC-UNICAMP, 2001.

[4] Grib, A., Frenkel, V., Einstein, Friedmann, Lamaitre: a descoberta do Big Bang - Tradução do Russo: Prof. Dr. Silvio Pregnolatto do IMECC-UNICAMP, 2001.

[5] Weinberg, Steven, Gavitation and Cosmology, Principles and Aplicatios of the General Theory of Relativity, Massachusetts Institute of Technology, John Wiley and Sons, 1972.

[6] Misner, C. W., Thorne, Kip S., Wheeler, J. A., Gravitation, W. H. Freeman and Company, New York, 1973.