

A MATEMÁTICA POR TRÁS DA TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA:
ESTUDO E CRIAÇÃO DE EXEMPLOS E APLICAÇÕES NA
RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS

Luciano Braga Candido / RA: 034212

bcluciano@gmail.com

Bolsista CNPq

Orientadora Prof^a Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato

Departamento de Raios Cósmiticos e Cronologia – IFGW - Unicamp

carola@ifi.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Relatório Final de Atividades (março/2008 a julho/2008)

Campinas 2009

Disciplina: F590-Iniciação Científica I



1. Resumo

Neste projeto aprofundamos o conhecimento sobre métodos matemáticos utilizados na reconstrução de imagens em tomografia computadorizada, criando alguns exemplos explicativos de aplicação de métodos de reconstrução. Os exemplos podem facilitar tanto o ensino, quanto o aprendizado desses métodos em cursos de Física Médica. Estudamos métodos básicos de reconstrução utilizados na tomografia computadorizada de transmissão de raios-X, exemplificando com casos particulares de reconstruções de funções previamente conhecidas. Com a tomografia podemos obter informação sobre as estruturas internas de um corpo sem que seja necessário abri-lo.

2. Introdução

Numa tomografia são criadas imagens bidimensionais de planos ou cortes (*tomos* = corte) do paciente, a partir de muitas projeções. Há essencialmente dois tipos de tomografia que utilizam radiação ionizante: a tomografia de transmissão de raios X, que enfatiza o estudo anatômico, e a tomografia por emissão, que foca no estudo fisiológico.

Na tomografia por transmissão de raios X, que será foco principal do presente projeto, o paciente fica entre uma fonte de raios X e um detector, e estes são movidos em conjunto no plano que se quer estudar. Para várias linhas unindo fonte-detector, a diferentes ângulos, um feixe de fótons é emitido, sendo atenuado ao atravessar o corpo do paciente e posteriormente detectado.

Suponhamos que um feixe colimado de fótons de raios X atravesse o corpo cuja estrutura se deseja determinar. Sabe-se que, após atravessar uma distância x , o feixe será atenuado, e sua intensidade será $I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$.

Aqui I_0 corresponde ao número incidente de fótons, por unidade de tempo, que atravessa uma unidade de área transversal ao feixe, $I(x)$ a intensidade do feixe após atravessar a distância x e μ é o coeficiente de atenuação linear, que depende da energia dos fótons e do número atômico e densidade do material do qual o corpo é constituído. Se o corpo não for homogêneo, a relação acima deve ser modificada, resultando em $I(x) = I_0 \exp(-\sum_i \mu_i x_i)$. Em casos contínuos,

ou seja, se $\mu = \mu(x)$ ao longo da linha, a somatória no expoente será uma integral sobre o caminho L do feixe: $I(x) = I_0 \exp(-\int_L \mu(x) dx)$. Aqui L

representa a reta que une a fonte dos fótons colimados e o detector, na hipótese de ambos serem idealmente estreitos. Para seguir a notação usual, chamaremos doravante $\mu(x, y)$ de $f(x, y)$.

No caso da seção plana do corpo, teremos então $\int_L f(x, y) ds = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)$. Em

última instância, o que se deseja é encontrar a função $f(x, y)$ a partir das atenuações medidas ao longo das diferentes linhas. Estas linhas podem ser parametrizadas em termos de t e θ da seguinte maneira: define-se um eixo t , paralelo à linha de detectores e perpendicular a L . Usa-se a distância de L à origem das coordenadas como um parâmetro. O parâmetro θ é o ângulo que a linha L forma com o eixo dos x .

Assim, a integral de linha, parametrizada em t e θ , pode ser escrita como: $\int_{L(t,\theta)} f(x,y)ds = P_\theta(t)$, onde a função $P_\theta(t)$ é chamada de projeção, ou

seja, para cada medida ao longo de uma dessas linhas corresponderá um valor da projeção, que dá a atenuação ao longo dela.

A matemática por trás da tomografia aplica algoritmos para a reconstrução de imagens. Teoricamente procura-se encontrar a função f , uma vez que sejam conhecidas as integrais de linha acima ao longo de infinitas direções no plano. Na prática, é claro, tem-se uma amostragem dessas integrais de linha apenas para um número finito de direções.

A integral de linha que define a projeção pode ser escrita na forma de uma transformada, definida por Johann Radon, conhecida como Transformada de Radon.: $[\mathfrak{R}f](t,\theta) = \int_{L(t,\theta)} f(x,y)ds$. Esta transformada é um operador

matemático, que, atuando numa função f , leva à função $[\mathfrak{R}f](t,\theta)$.

O próprio Radon provou também que, sob certas condições, pode-se inverter a relação de modo a se obter f . Na prática, por termos apenas um conjunto finito de pontos \mathfrak{R}_i para reconstruir a função f , a relação para inversão não pode ser aplicada de imediato. Assim, para estimar a função há duas maneiras: uma consiste em aproximar a fórmula analítica da transformada inversa de Radon (Método das Transformadas, também conhecido como Método Analítico) e a outra maneira é discretizar a Transformada de Radon, aproximando a integral de linha e calculando a solução do sistema linear por método iterativo (Método de Expansão em Séries).

À primeira classe de algoritmos pertencem os métodos de transformada de Fourier inversa, o método da retroprojeção e o da retroprojeção filtrada. Na segunda classe enquadram-se métodos de máxima verossimilhança e de reconstrução algébrica.

Os métodos analíticos se baseiam em fórmulas de inversão seguidas de discretização. As transformadas inversas são derivadas para dados contínuos e sem ruído, o que não corresponde ao problema real como já mencionado. Os métodos iterativos já levam em conta esses aspectos e consideram o problema já discretizado.

O presente trabalho foi desenvolvido primeiramente calculando a Transformada de Radon para uma elipse que esteja rodada e deslocada da origem. Iremos mostrar figuras mais simples (círculos, elipses e quadrados) construídas no Matlab e suas Transformadas de Radon. Isso será usado para estudar a imagem reconstruída de um crânio (phantom Shepp-Logan) com o auxílio do

Matlab. O phantom é a soma de 10 elipses sobrepostas que iram representar estruturas do crânio e supostos tumores.

3. Materiais e Métodos

A principal ferramenta matemática nesse projeto foi a Transformada de Radon. Utilizamos o programa Matlab para estudar imagens das estruturas internas do crânio, o programa possui em seus arquivos internos a reconstrução de imagem do Shepp-Logan e a Transformada de Radon. Foram construídas matrizes de $N \times N$ com figuras de densidades diferentes formando discos, elipses e quadrados e a partir dessas foi tomada a Transformada de Radon, mostrando como cada figura se apresenta na transformada. Depois aplicamos a Transformada de Radon para a imagem do Shepp-Logan.

4. Resultados

Obtivemos gráficos das Transformadas de Radon para várias figuras construídas no Matlab inclusive o Shepp-Logan.

O método de Transformada de Radon (TR) consiste na integral de linha da reta L , onde x' (apresentado como t da TR na introdução) é a distância da reta a origem e θ é o ângulo que a linha faz com o eixo x'' (horizontal).

Fazendo o conjunto de vários pontos da Transformada de Radon, ou seja, tomando pontos para diferentes x' e θ , teremos a representação da imagem. Se considerarmos a linha como um conjunto de pontos com valores diferentes por pixel, os quais fossem representados por números, a TR nos dá a soma desses números. É óbvio que perderemos as características de cada ponto e teremos a informação da linha em questão.

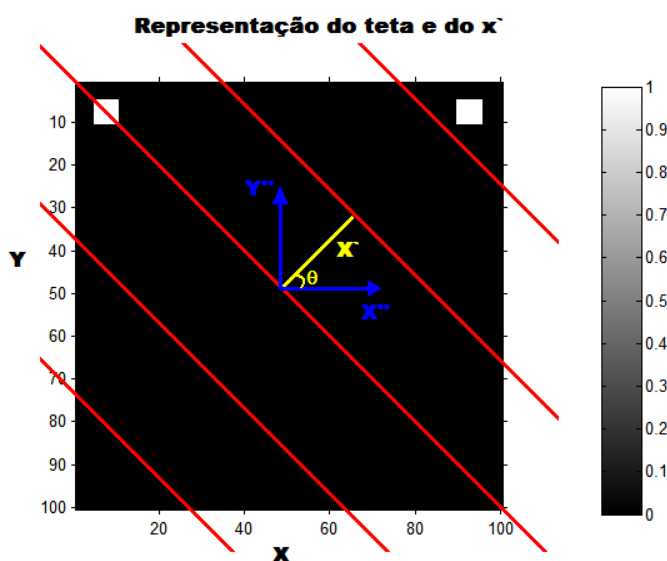


Figura 1: Representação da distância das retas x' e de θ

Na figura 1 temos as retas em vermelho, onde serão calculadas as TRs, isso é apenas uma representação das linhas, pois a TR ira obter várias linhas com um espaçamento Δx . O plano cartesiano representado por x'' e y'' é o novo plano que a TR do Matlab irá usar como origem para medir o x' . A distância x' varia

em função do valor da diagonal da figura criada, dependendo das dimensões da figura, ou seja, para o caso apresentado aqui, as figuras tem dimensões de 100x100, portanto o x' varia de -72 até +72. Essa relação está introduzida no Matlab, na função da TR, e consiste em criar um espaço x' maior que a figura para garantir que a figura esteja dentro do período de amostragem.

A figura 3 mostra a TR da figura 2. Podemos analisar em particular o ponto de maior densidade da figura 3 que corresponde exatamente ao ângulo de 90 graus. As linhas que passa por ambos os quadrados de densidade 1 se somam na TR e formam o ponto de maior densidade (vermelho). Analisando o gráfico para 45 graus, vemos que as retas que passam no quadrado branco da esquerda passam também na origem do sistema de coordenadas (x'' e y'') e podemos verificar isso também na TR, pois a linha que começa no $x' = -40$ é a do quadrado da esquerda e para o valor de 45 graus o x' é zero.

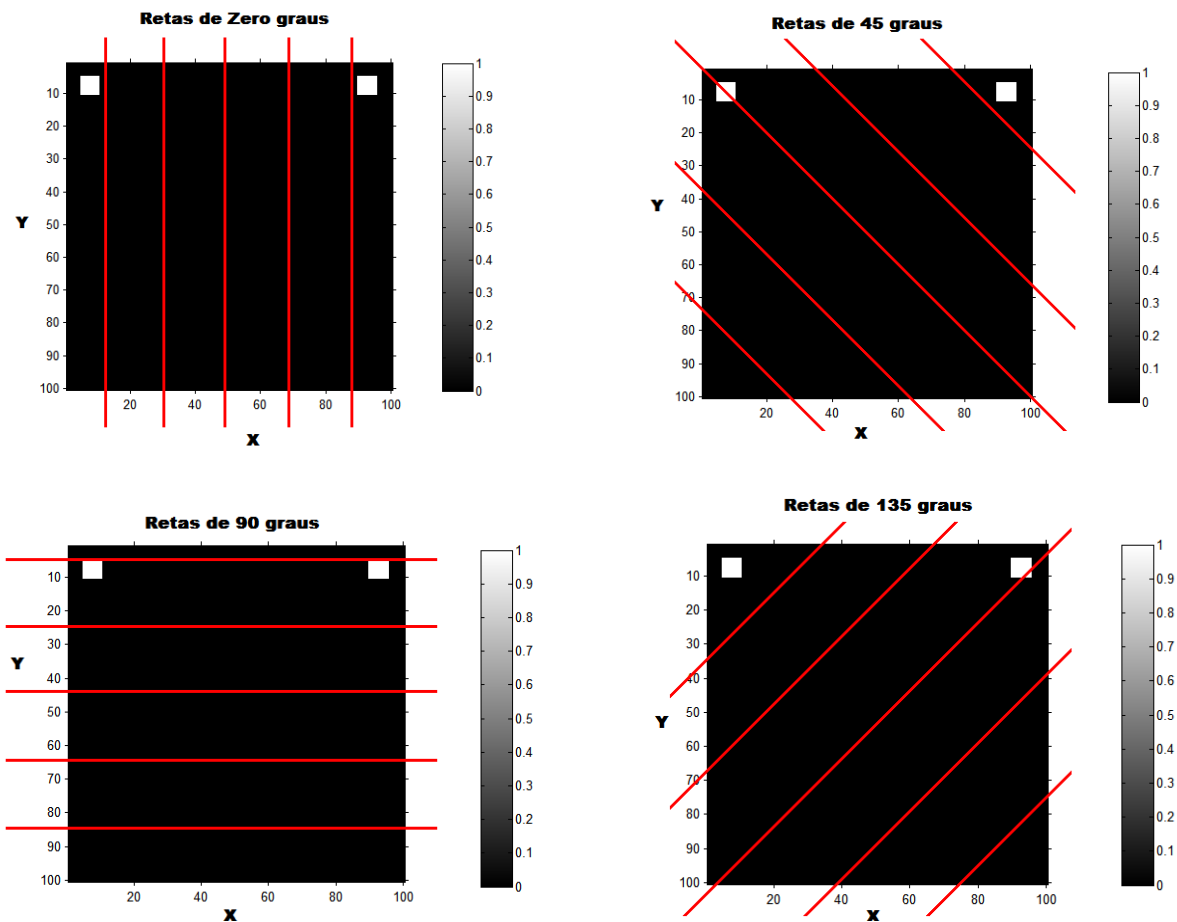


Figura 2: Representação das linhas que iremos calcular a TR para alguns ângulos

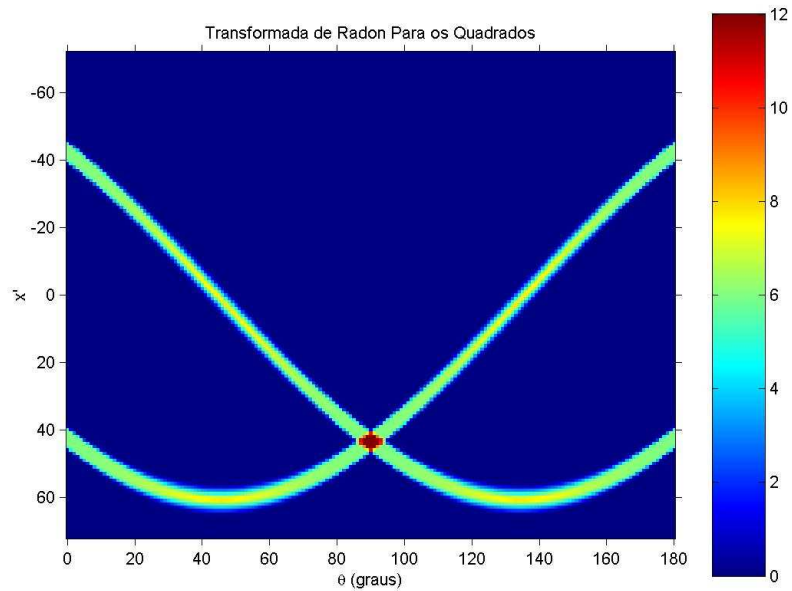


Figura 3: Transformada de Radon para a figura dos quadrados

Nas próximas figuras serão mostradas as TR de vários objetos diferentes criados no Matlab.

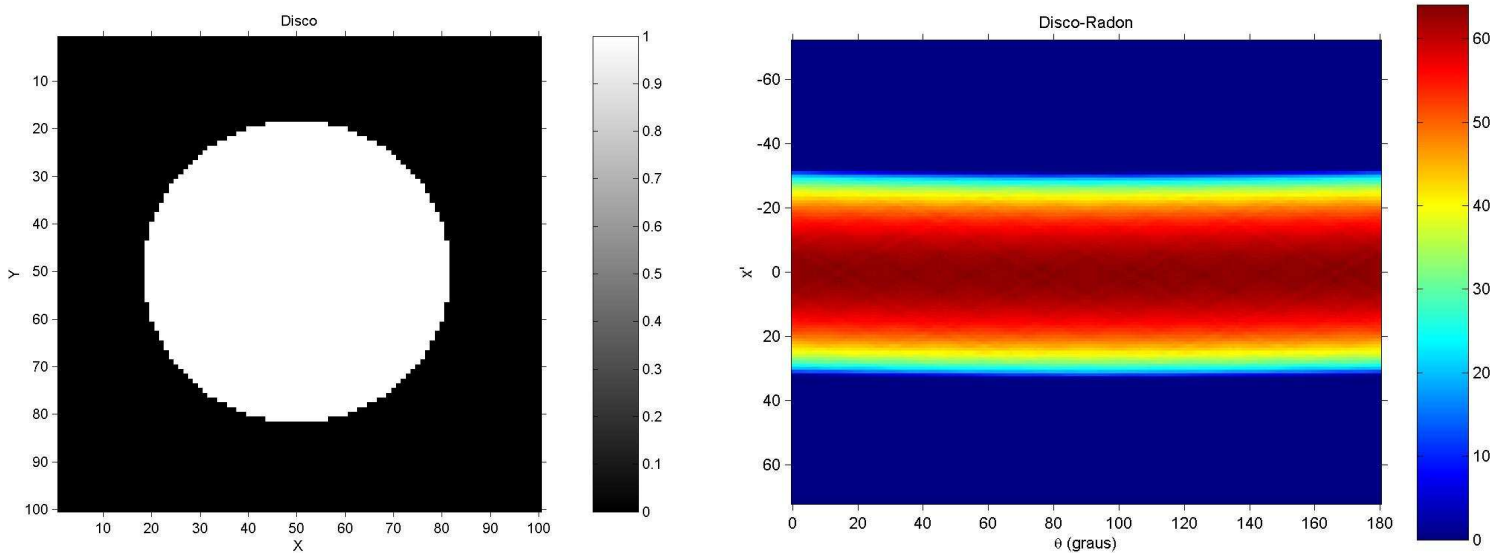


Figura 4: Disco e sua TR

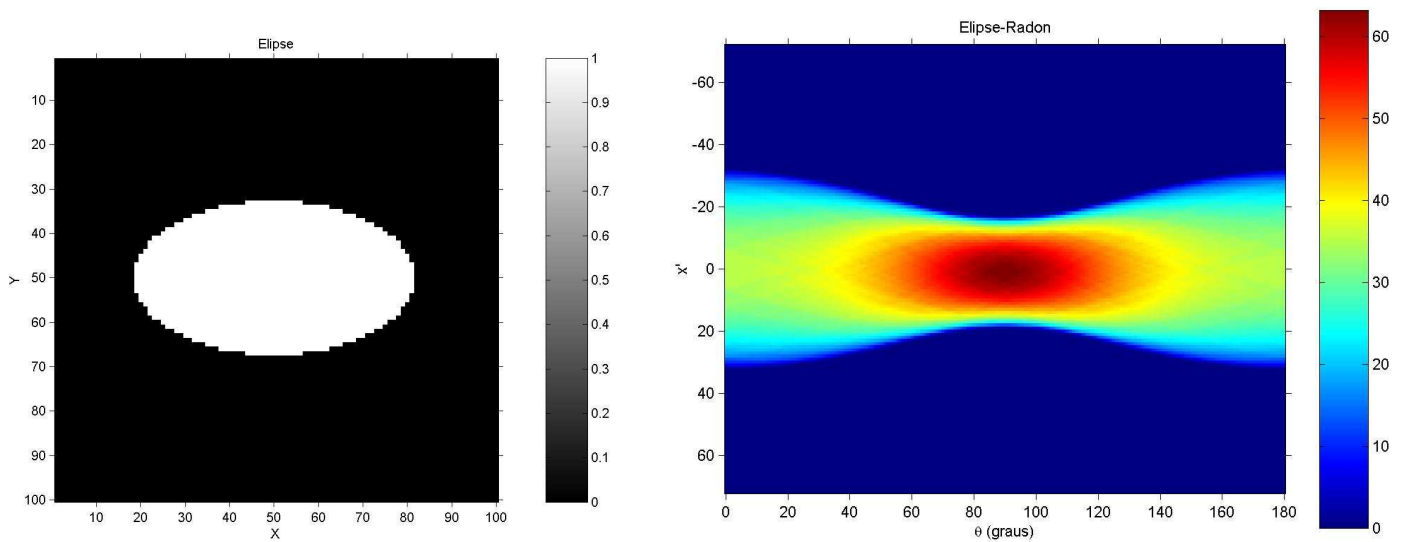


Figura 5: Elipse e sua TR

Podemos analisar essas figuras tomando, por exemplo, um determinado ângulo e avaliando as várias retas paralelas. Tomemos na figura 4, por exemplo, onde temos as retas que não passam pelo disco e na TR aparecem com a cor azul escuro. Quando $x' = -30$, as retas começam a tocar o disco e a densidade muda, passando por vários cordas do disco, pelo seu diâmetro, até deixá-lo, do lado oposto. Por esse motivo é que vemos um padrão na forma da TR, pois, como o disco é simétrico, irá sempre haver o mesmo caminho passando pelo seu diâmetro. Quando o x' é zero, temos que todas as retas passando pelo o seu diâmetro e a densidade é máxima.

Na figura 5 temos a elipse e sua TR. Verificamos que a as retas a 90 graus, que são paralelas ao eixo maior, possuem a maior densidade, pois percorrem o maior trecho da elipse.

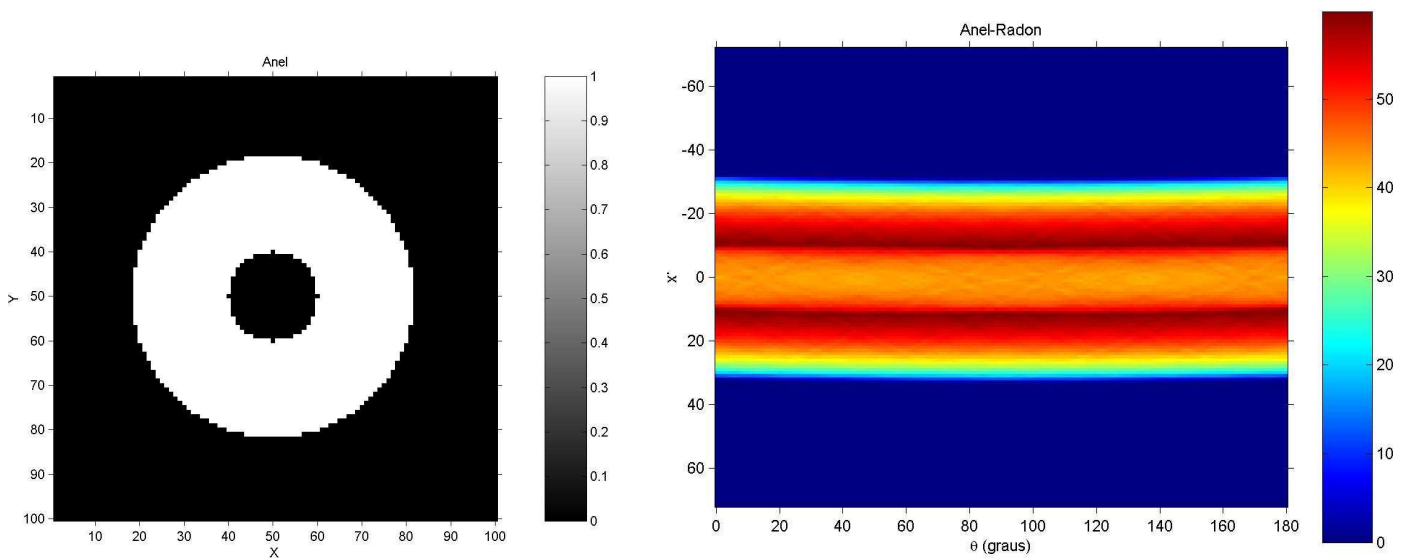


Figura 6: Anel e sua TR

Já na figura 6, as retas que passam rentes ao disco escuro no centro da figura são as responsáveis pela maior densidade, pois quando entramos no disco escuro a densidade fica menor. O mesmo ocorre nas outras figuras que tem uma figura dentro da outra com densidades diferentes. Na figura 7, temos que as linhas com as maiores

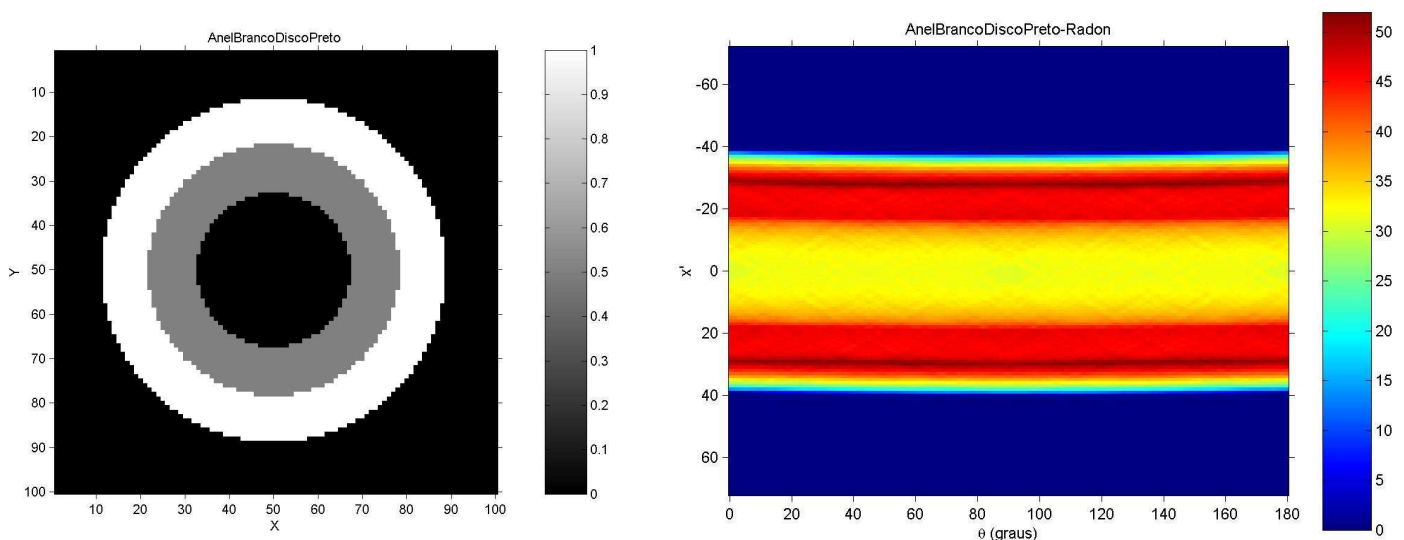


Figura 7: Anel branco com disco preto interno e sua TR

densidades são aquelas que passam rentes ao anel cinza, pois, ao entrar nesse, a densidade diminui e diminuirá ainda mais quando às linhas cruzarem o disco preto no centro. O mesmo ocorre na figura 8, mas a parte escura está por fora, isso muda a figura da

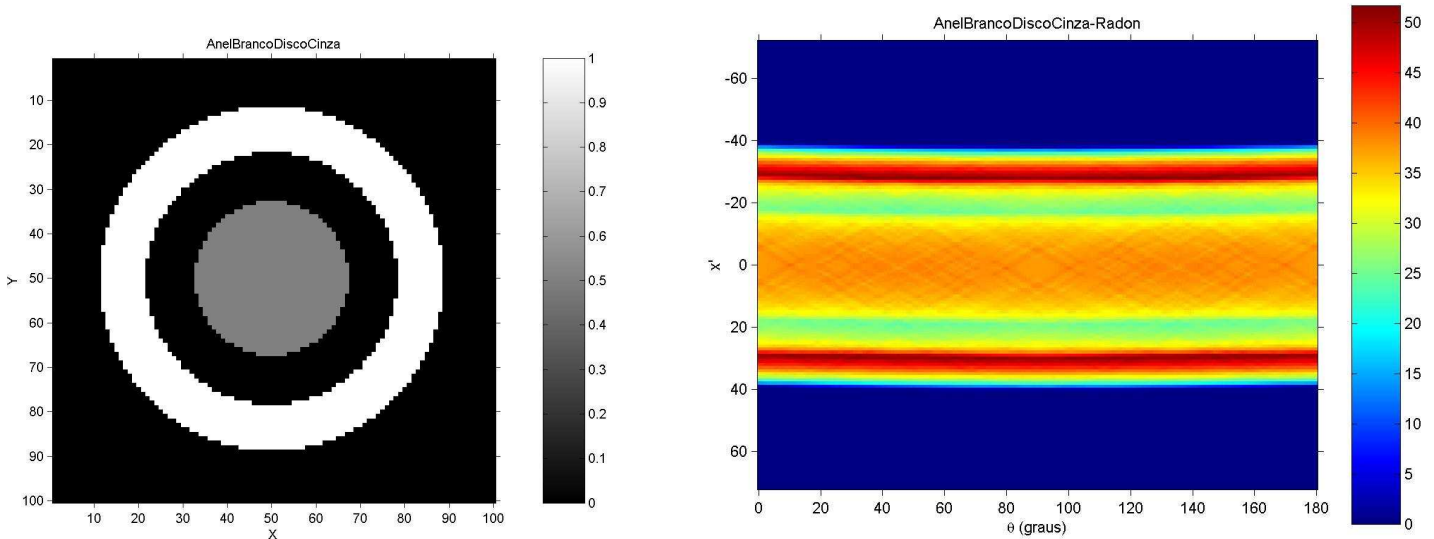


Figura 8: Anel branco com um disco cinza interno e sua TR

TR.

Na Figura 9 temos o quadrado e a sua TR é máxima quando x' é igual a zero e os ângulos são de 45 e 135 graus, que são exatamente na diagonal do quadrado. Podemos ainda verificar que há uma ondulação nas regiões entre os ângulos de zero a 90 graus e de 90 a 180 graus. Isto ocorre devido ao fato que nessa região as retas percorrem um espaço maior que passa pelo quadrado, atingindo um máximo nos ângulos de 45 e 135 graus. Essas retas não estão paralelas aos lados do quadrado. Na figura 10 temos o mesmo que ocorre na figura 6 do anel, porém para o quadrado.

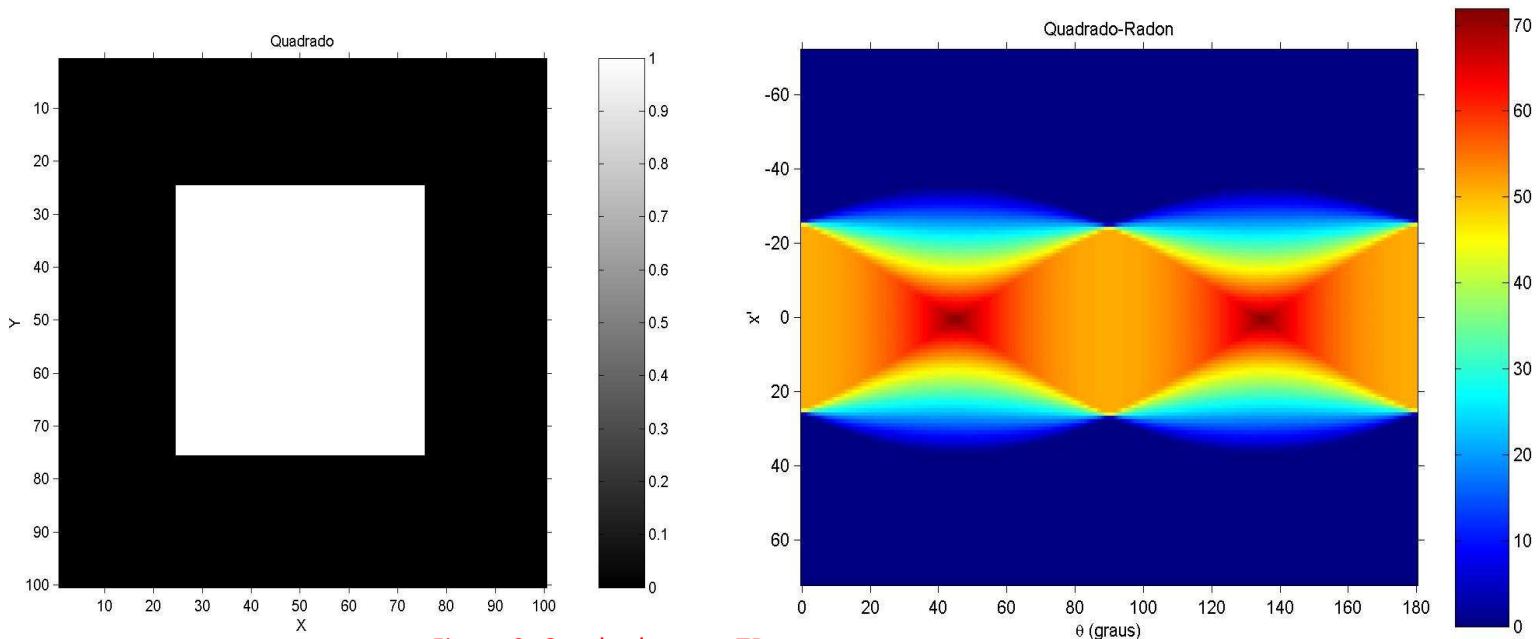


Figura 9: Quadrado e sua TR

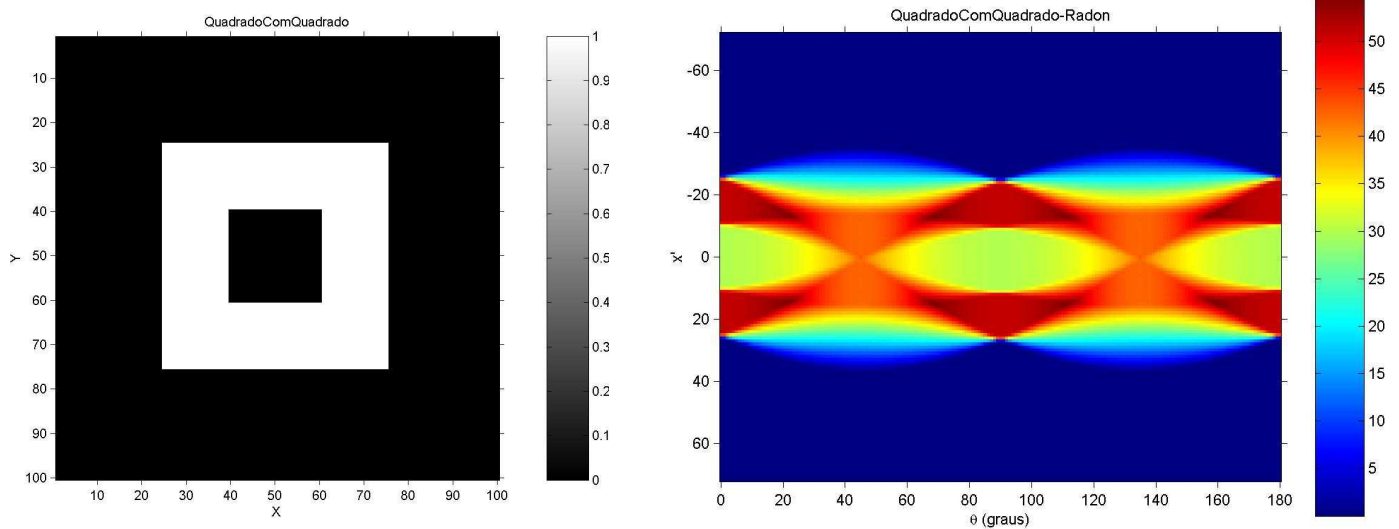


Figura 10: Quadrado com quadrado e sua TR

Agora iremos mostrar nas próximas figuras uma elipse muito próxima de um disco, com uma área A , tornar-se uma elipse achatada no eixo y , ou seja, com um b pequeno. Ao final da construção teremos uma razão de 4 para 1 entre o a e o b .

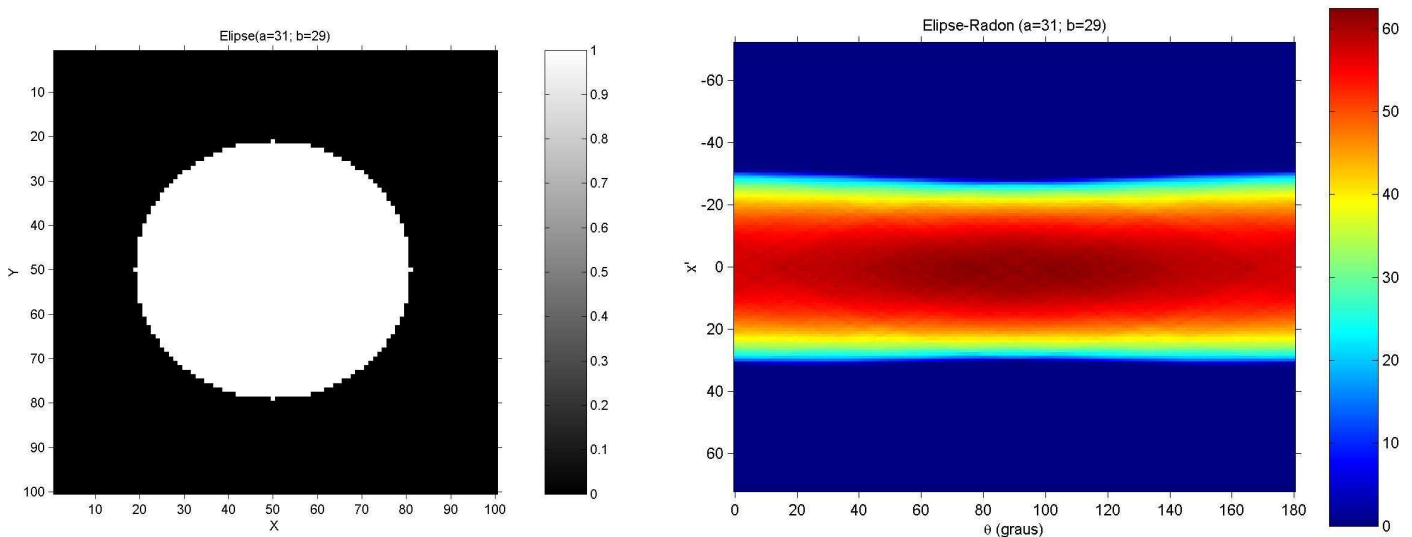


Figura 11: Montagem da elipse e sua TR – Primeira figura, próxima de um disco

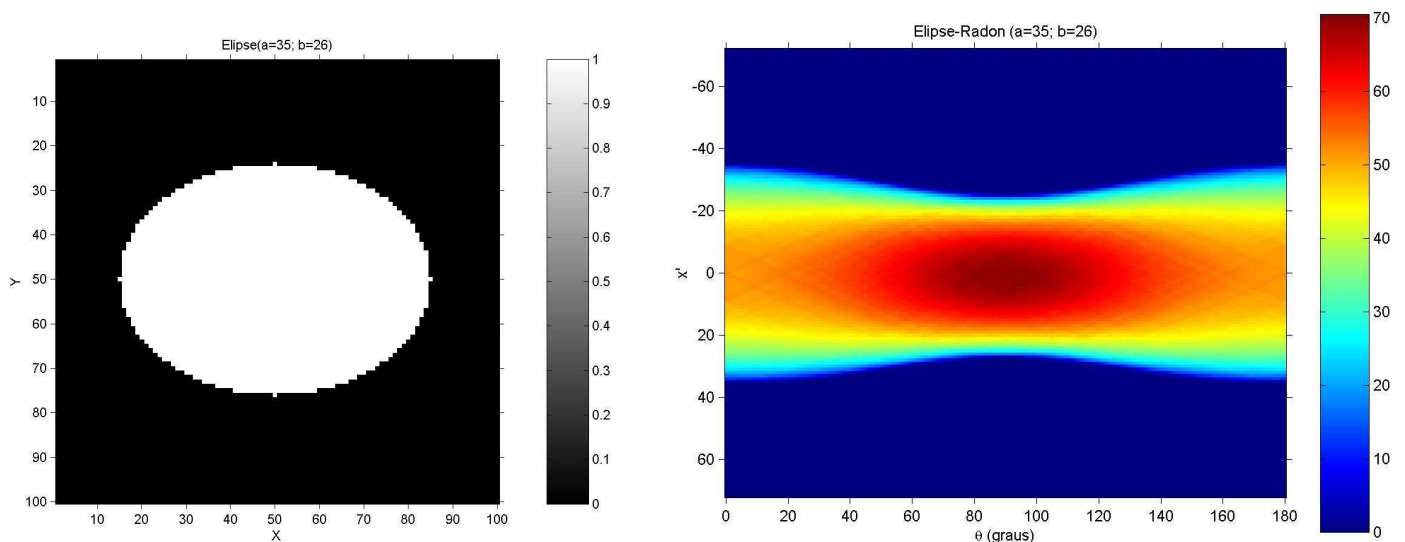


Figura 12: Montagem da elipse e sua TR – Segunda figura, começa a ser visível a elipse

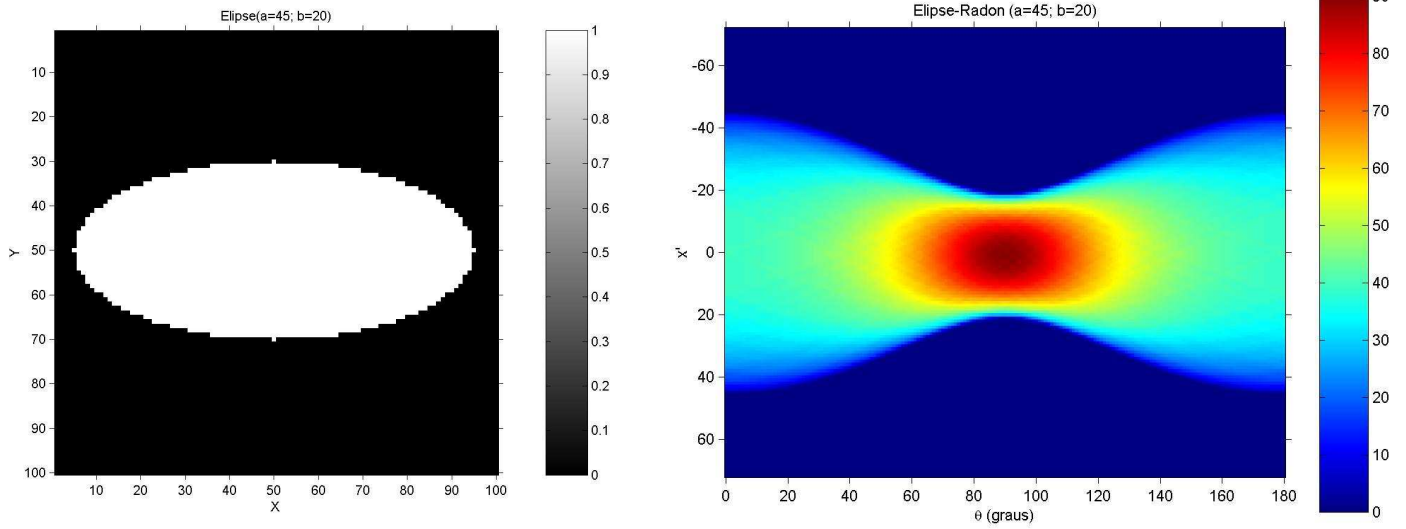


Figura 13: Montagem da elipse e sua TR – Terceira figura

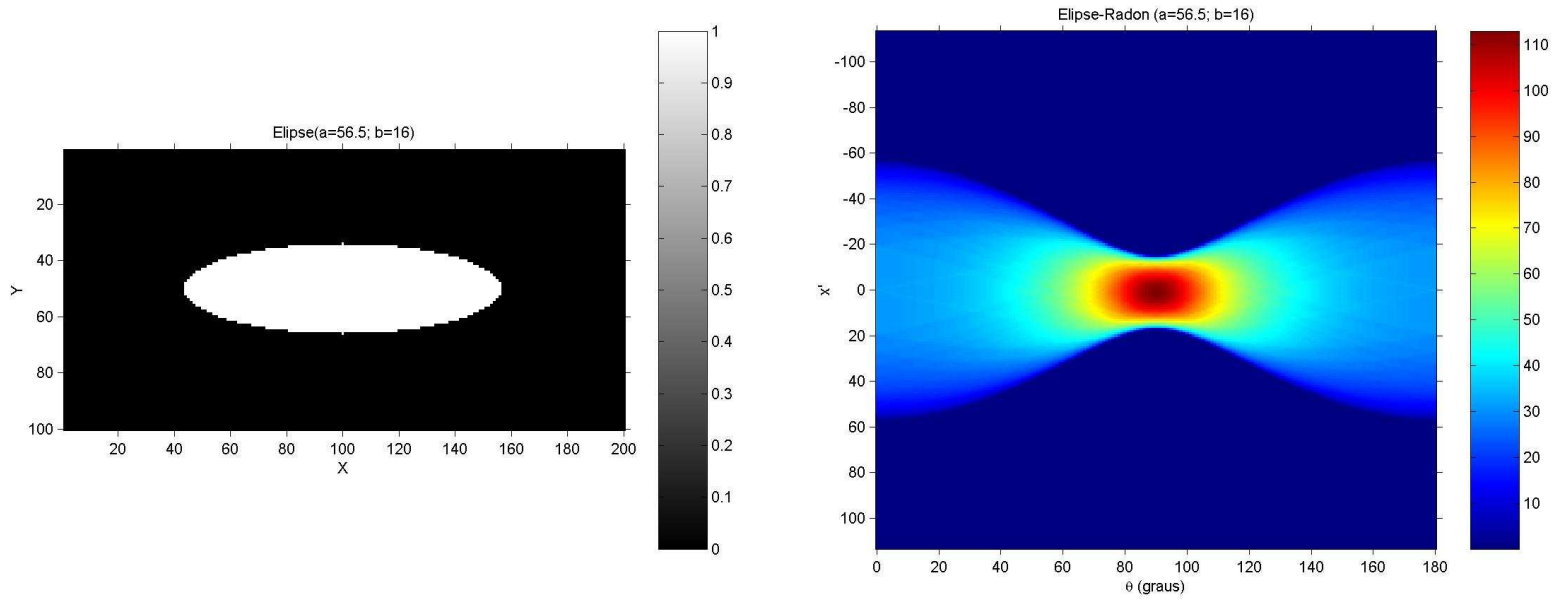


Figura 14: Montagem da elipse e sua TR – Quarta figura

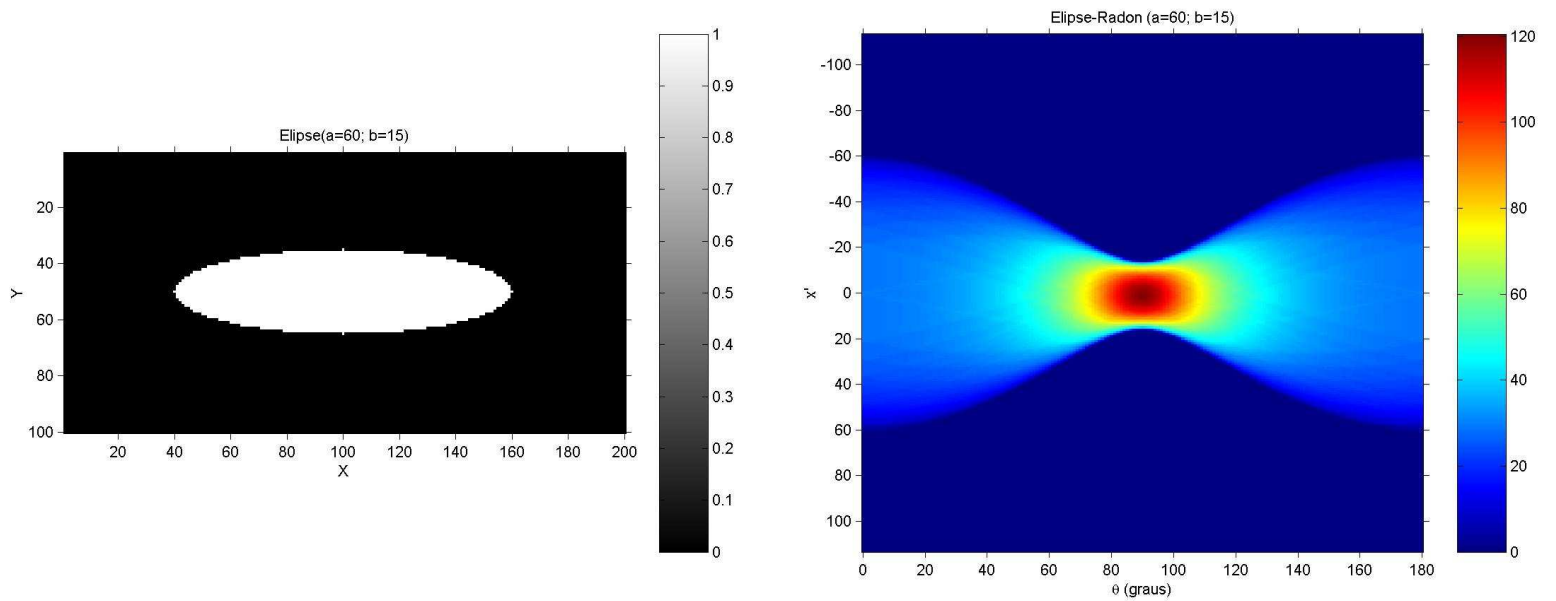


Figura 15: Montagem da elipse e sua TR – Quinta figura

Vamos analisar algumas elipses isoladamente para podermos comparar com o Shepp-Logan que é uma construção de 10 elipses.

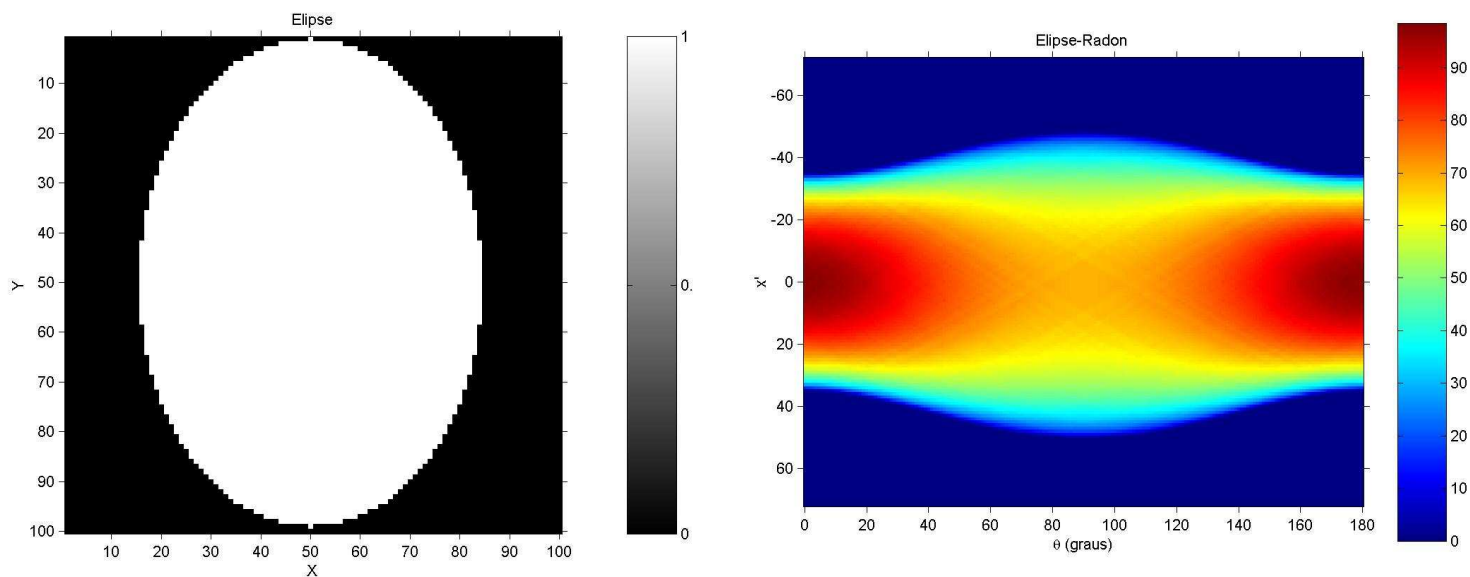


Figura 16: Elipse mais externa do Shepp-Logan e sua TR

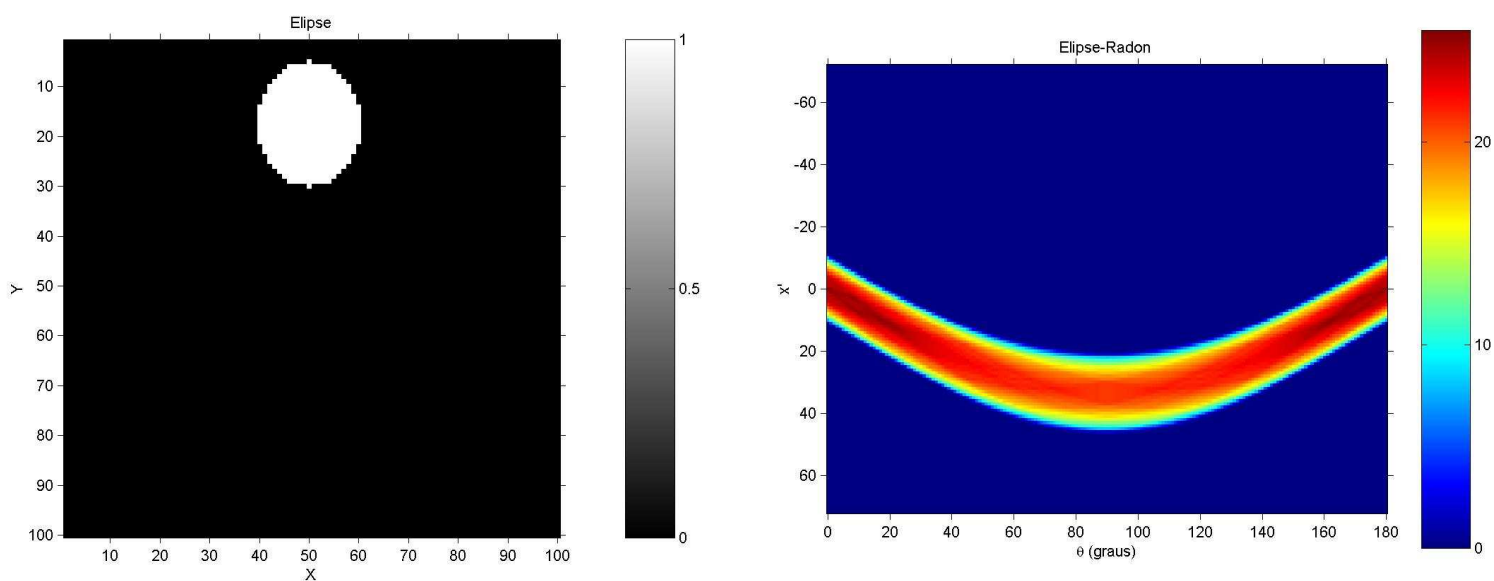


Figura 17: Elipse que representa a elipse deslocada na parte superior do Shepp-Logan e sua TR

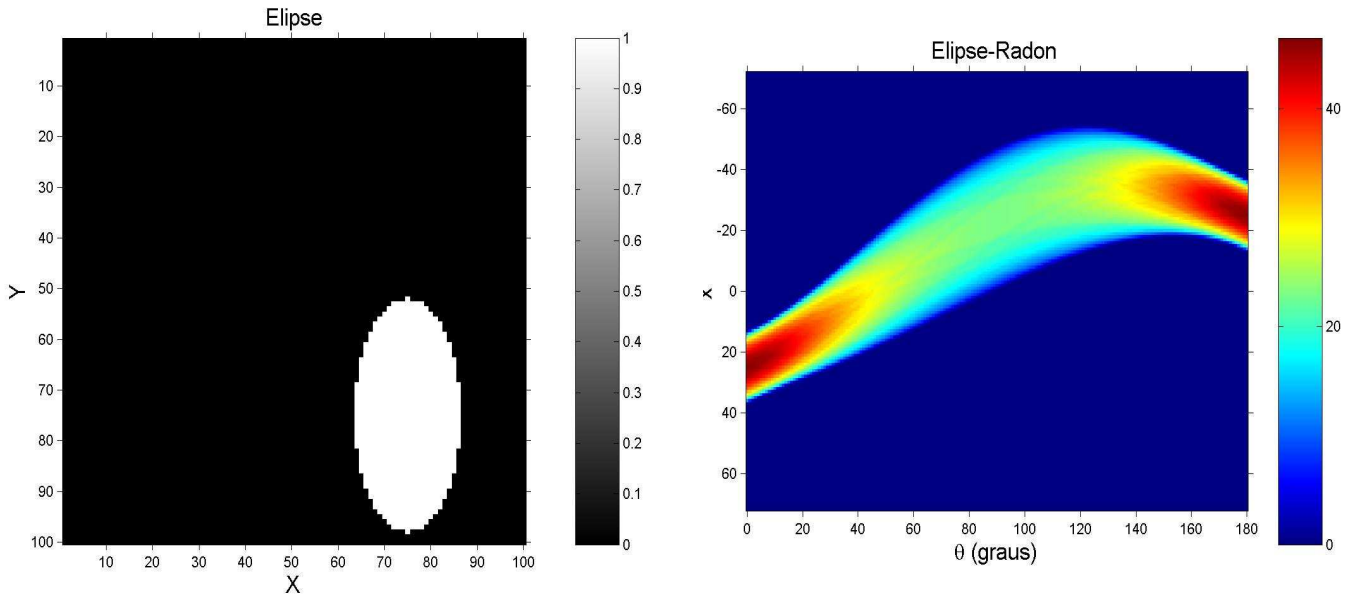


Figura 18: Representação da elipse deslocadas do Shepp-Logan e sua TR

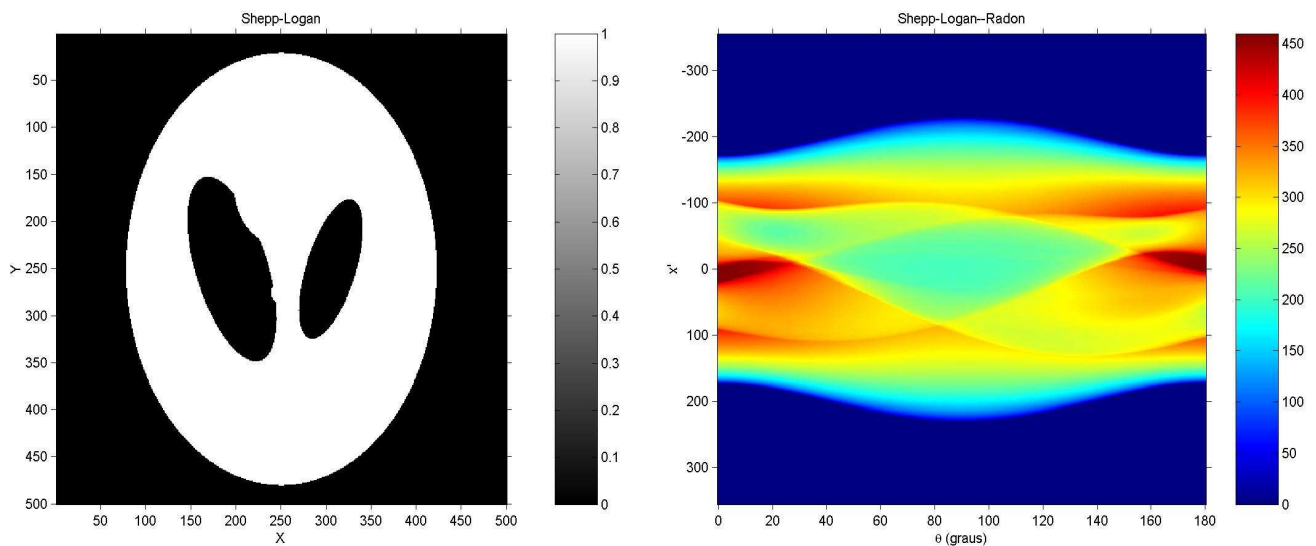


Figura 19: Representação dos Ventrículos do Shepp-Logan e sua TR

Começaremos agora a analisar a representação do crânio humano dada pela imagem do phantom Shepp-Logan. Na figura 20 mostramos o phantom, Shepp-Logan, que é a soma de 10 elipses com densidades diferentes. A parte com maior densidade (1,0), parte em branco, representa o osso, onde a parte mais espessa é a testa. As duas elipses mais escuras representam os ventrículos. E as outras seis elipses são representações de tumores com diferentes densidades.

A figura 20 mostra o phantom Shepp-Logan com um número maior de interações, ou seja, com uma resolução maior. Os valores das elipses usados para criar o Shepp-Logan estão na tabela 1. Esses valores foram usados pelos próprios Shepp e Logan na suas construções[1].

Tabela 1: Valores característicos das elipses do Shepp-Logan[1]					
Densidade			Posição do centro		Inclinação
A	a	b	x0	y0	Teta
1,180	0,690	0,920	0,00	0,0000	0
0,980	0,662	0,874	0,00	-0,0184	0
1,077	0,110	0,310	0,22	0,0000	-18
1,077	0,160	0,410	-0,22	0,0000	18
1,080	0,210	0,250	0,00	0,3500	0
1,080	0,046	0,046	0,00	0,1000	0
1,080	0,046	0,046	0,00	-0,1000	0
1,080	0,046	0,023	-0,08	-0,6060	0
1,080	0,023	0,023	0,00	-0,6060	0
1,080	0,023	0,046	0,06	-0,6050	0

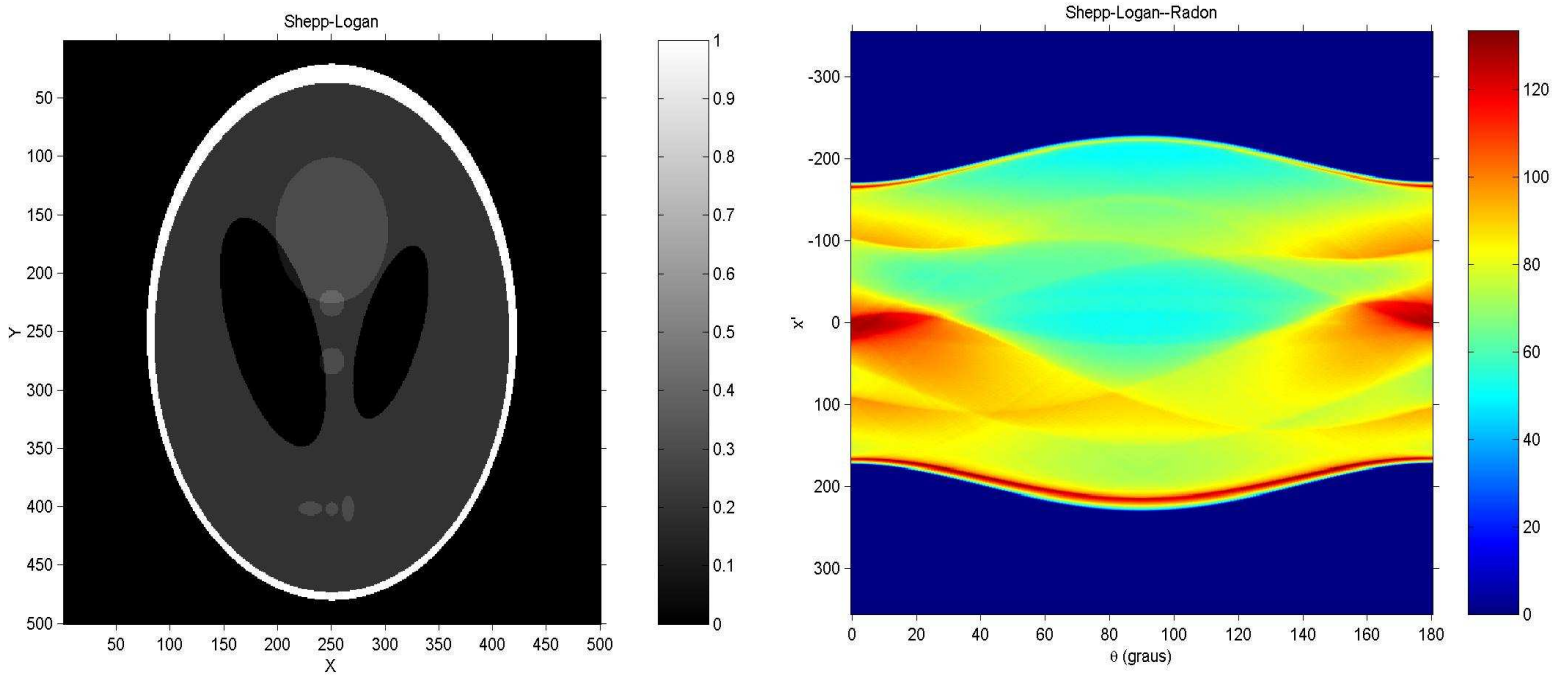


Figura 20: Shepp-Logan de alta resolução e sua TR

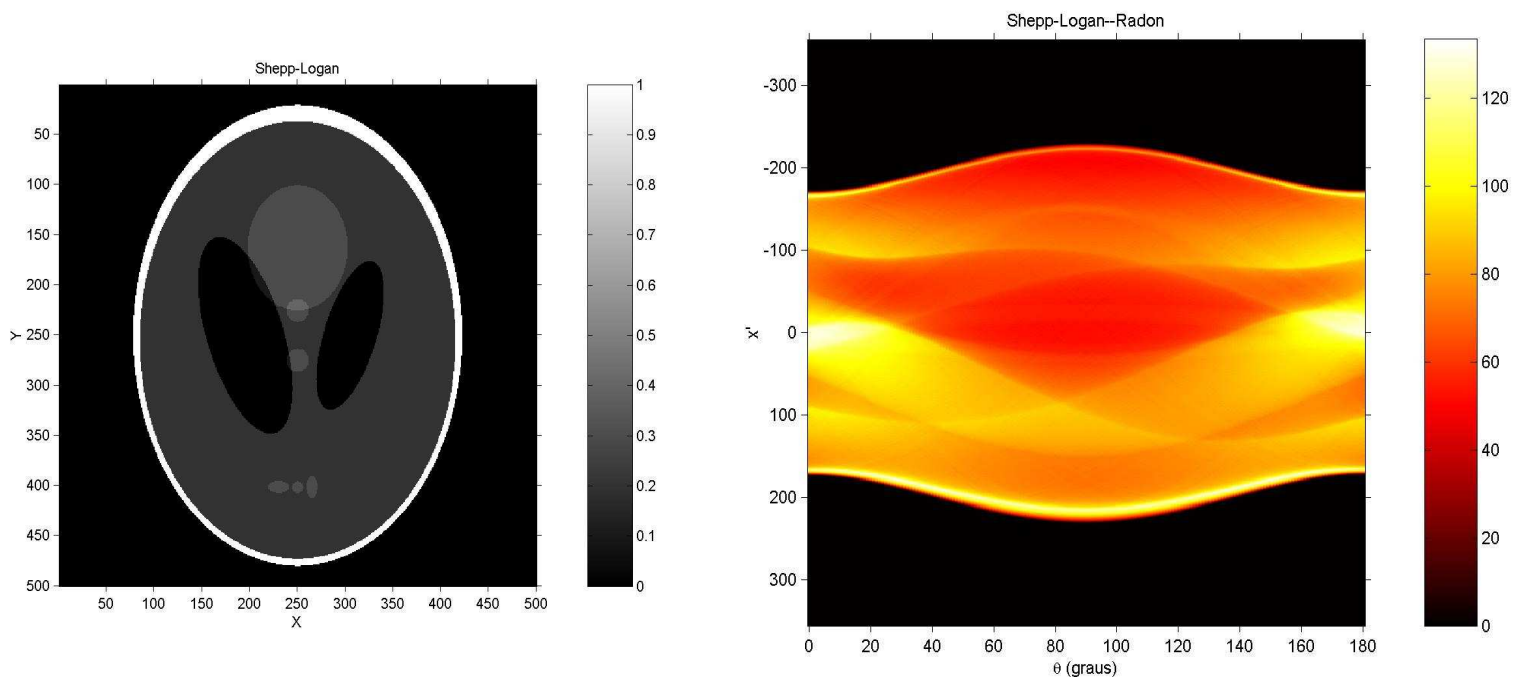


Figura 21: Shepp-Logan de alta resolução e sua TR com escala diferente (hot)

Para efeito de comparação, a figura 21 mostra o phantom e sua TR com uma escala de cor diferente. Nas figuras 20 e 21 as TRs são a soma das TRs de cada elipse do phantom.

As figuras 22, 23 e 24 representam as linhas por onde calculamos a Transformada de Radon no phantom Shepp-Logan.

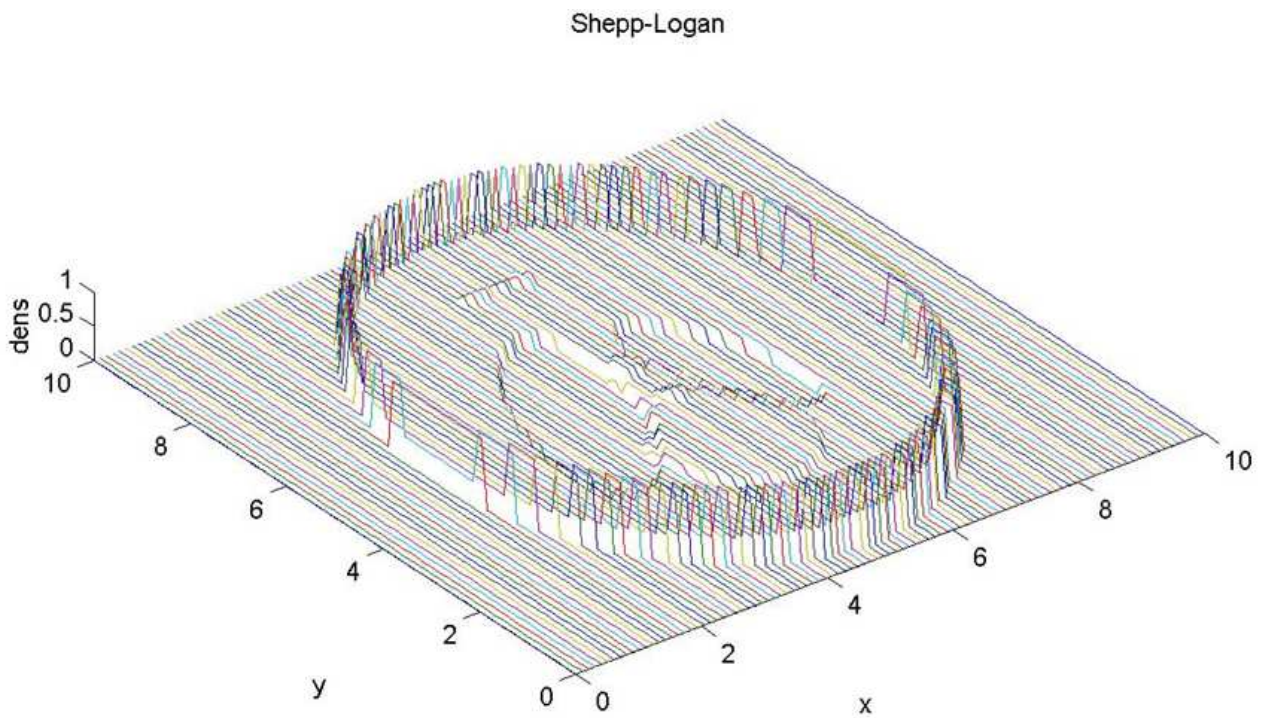


Figura 22: Shepp-Logan representado em 3D, linhas de corte da imagem.

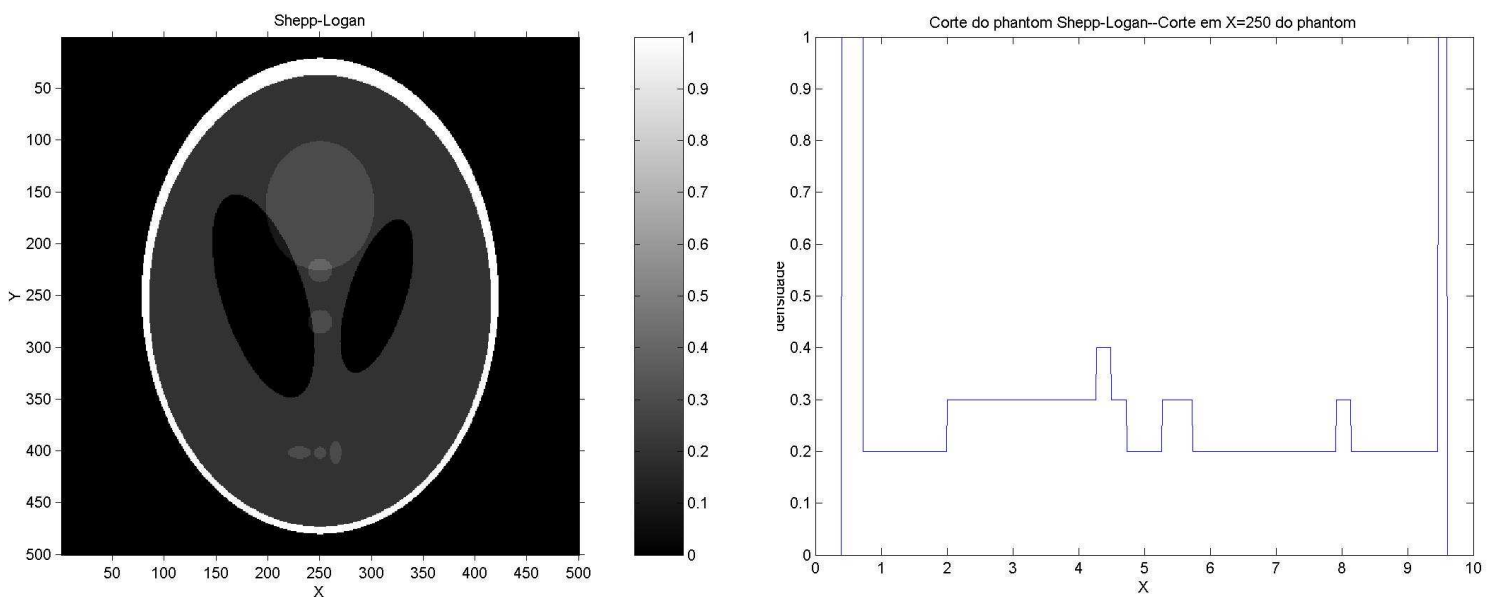


Figura 23: Corte do phantom Shepp-Logan em X=250

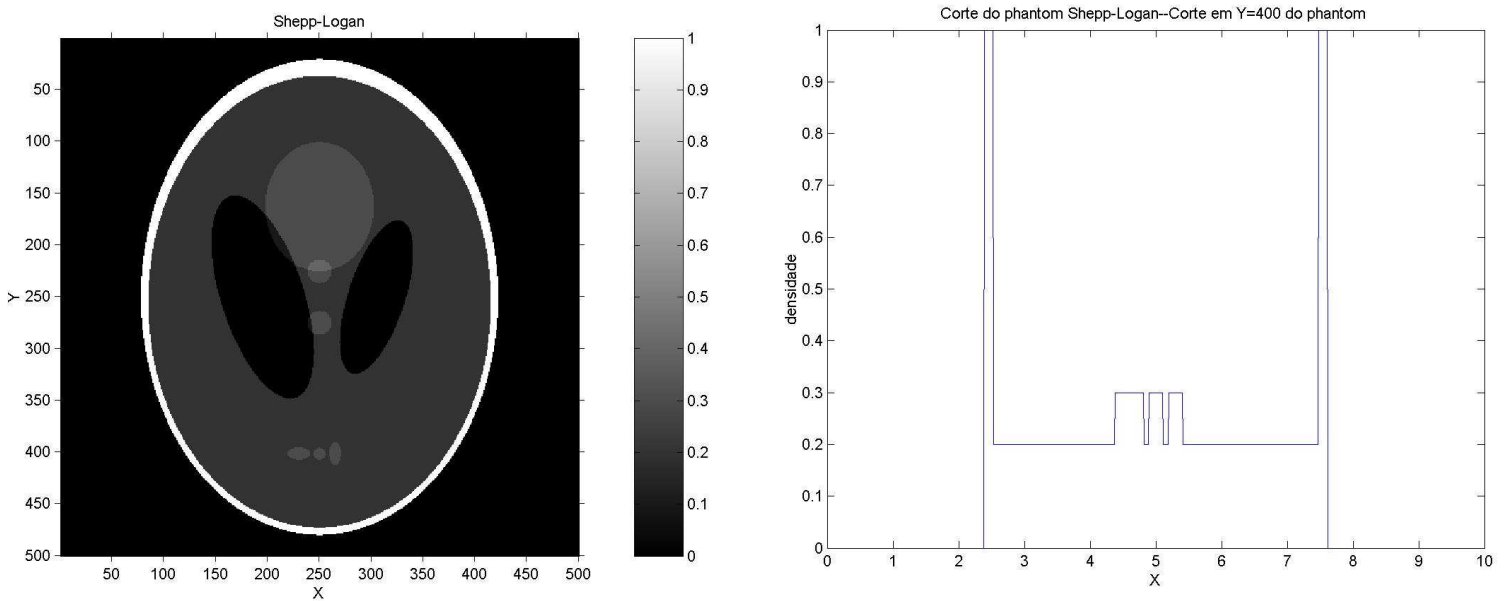


Figura 24: Corte do phantom Shepp-Logan em Y=400

Vimos que quando se faz um corte no phantom com uma linha, podemos representar a linha onde a TR irá fazer a soma de cada elemento.

5. Conclusão

Vimos que uma grande contribuição da TR do phantom é dada pelos ventrículos e pela caixa craniana, pois as outras estruturas são pequenas frentes a essas duas.

Comparando as figuras 19 e 20, vimos que não podemos confiar nas cores das figuras, pois a TR calculada é relativa às densidades. Analisando o valor da barra de densidade, verificamos que as densidades na figura 19 é cerca de 3 vezes maior que a da figura 20, isso acontece porque a densidade da elipse branca na figura 19 é um, enquanto que a da figura 20 varia bastante entre 0 e 1, mas pouca parte vale um.

A TR é uma importante ferramenta na construção de imagem. Podemos, a partir da TR, obter a imagem que a originou pela sua inversa (transformada inversa de Radon), mas isso não foi realizado, pois trabalhamos em apenas 5 meses com bolsa, iremos calcular a inversa na continuidade do projeto. Obtemos nesse projeto uma detalhada explicação de como a Transformada de Radon é calculada e a aplicamos para a reconstrução da imagem do phantom Shepp-Logan.

6. Referências

- “The Physics Teacher” de Fevereiro de 1985, página 94, de Margaret Stautberg Greenwood
- “Principles of Magnetic Resonance Imaging”, Zhi-Pei Liang e Paul C. Lauterbur, IEEE PRESS
- Peter Toft, disponível em:
<http://eivind.imm.dtu.dk/staff/ptoft/Radon/Radon.html>
 - Acesso em: 01/09/2007
- Math Word, disponível em:
<http://mathword.wolfram.com/RadonTransform.html>
 - Acesso em: 01/09/2007
- Peter Toft, Apêndice A, disponível em:
HTTP://petertoft.dk/PhD/PeterToft_PhD_thesis_5.pdf
 - Acesso em 01/10/2007
- 1. “Reconstructing Interior Head Tissue From X-Ray Transmissions”, L. A. Shepp and B. F. Logan, IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS21, June 1974

7. Perspectiva de Continuidade

O presente estudo irá continuar.

8. Apoio

O projeto obteve financiamento do CNPq.

9. Agradecimentos

A Prof^a Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato pela paciência e pelo conhecimento que adquiri nesse projeto.

A CNPq pelo financiamento.

Parecer sobre o Relatório Final do aluno Luciano Braga Candido - RA 034212

(F 590, 1º semestre de 2009)

O relatório reflete bem as atividades desenvolvidas pelo estudante no seu projeto.

Com bastante dedicação, ele estudou e aprendeu as ferramentas matemáticas necessárias para criar exemplos bem simples da aplicação de um método básico para a reconstrução de imagens utilizado na tomografia. Ele estudou a aplicação da Transformada de Radon e de sua inversa para a reconstrução de imagens. Após trabalhar com aqueles exemplos simples, aplicou a mesma ferramenta matemática para uma representação de um crânio humano, numa parametrização de autoria de Shepp e Logan, baseada em uma superposição de 10 elipses com densidades diferentes. Ele apenas não desenvolveu mais exemplos porque o período em que ele trabalhou no projeto (aproximadamente 4 meses) não foi suficiente para abordar todos os tópicos que haviam sido programados para um período de 12 meses.

Na minha avaliação a nota do aluno é 9,0 (nove).

Profa Carola Dobrigkeit Chinellato