

Wavelets Aplicadas ao Estudo de Anisotropias de Raios C3smicos

Aluno: Rafael Alves Batista

RA: 045830

Orientador: Ernesto Kemp

Co-Orientador: Rogerio Menezes de Almeida

1 Introdu7ao

Na ultima d3cada testemunhou-se um imenso crescimento de atividades relacionadas à analise de wavelets. Milhares de artigos científicos acerca de seus fundamentos te3ricos e suas aplica7es foram publicados. As wavelets fornecem um poderoso e flexível conjunto de ferramentas para o tratamento de problemas fundamentais em ciência e engenharia. Dentre os diversos problemas aos quais as wavelets têm sido aplicadas com sucesso estão a remo7o de ruídos de áudio e imagens, compressão de sinais, detec7o de objetos, melhoramento de imagens, etc. Um exemplo de sua aplica7o é o padrão de compressão de imagens JPEG 2000, que utiliza wavelets biortogonais. Muitas áreas da física tamb3m presenciaram esta mudan7a paradigmática, incluindo dinâmica molecular, astrofísica, cosmologia, geofísica sísmica, 3ptica, turbulência e mecânica quântica.

Em astrofísica, em particular, t3cnicas de wavelets mostraram boa performance na detec7o de fontes pontuais em estudos de radia7o c3smica de fundo. Uma abordagem relevante considerando a transformada contnuada de wavelets (CWT, do ingl3s *Continuous Wavelet Transform*) foi apresentada por Marr & Hildreth[1]. A id3ia fundamental da aplica7o de wavelets em R^N é a decomposi7o de uma fun7o $f(\vec{x})$ em uma base que incorpore o comportamento local e de escala da fun7o.

2 Transformada de Wavelets

A CWT envolve transla7es e dilata7es da wavelet, e é dada por:

$$\omega(\vec{b}, s) = \int d\vec{x} f(\vec{x}) \Psi(\vec{x}; \vec{b}, s) \quad (1)$$

com:

$$\Psi(\vec{x}; \vec{b}, s) = \frac{1}{s^N} \psi\left(\frac{|\vec{x} - \vec{b}|}{s}\right) \quad (2)$$

onde Ψ e ω são a wavelet mãe e o coeficiente de wavelet, respectivamente, \vec{b} é o parâmetro de dilata7o e s  o parâmetro de escala.

No estudo de radia7o c3smica de fundo, um caso particular de wavelet, chamado de wavelet de chap3u mexicano (MHW, do ingl3s *Mexican Hat Wavelet*) e sua extensão para a esfera têm sido extensivamente utilizada na literatura visando a detec7o de fontes pontuais [2, 3, 4], devido à amplifica7o da razão sinal-ruído quando se transita do espa7o real para o espa7o de wavelets.

Uma generalização da MHW é a família de chapéus mexicanos (MHWF, do inglês *Mexican Hat Wavelet Family*), introduzida por J. González-Nuevo et al. [5]. Esta generalização satisfaz às propriedades de detecção das MHW e permite uma melhora significativa na detecção de fontes pontuais em mapas de CMB, controlando a fração de falsas detecções. A MHW é obtida pela aplicação do operador laplaciano à gaussiana bidimensional. Caso este operador seja aplicado novamente, obtém-se uma nova wavelet, e se o processo for iterado, obtém-se uma família de wavelets. Esta família de wavelets é denominada MHWF, sendo um membro genérico desta família dado por:

$$\Psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \Delta^n \phi(x) \quad (3)$$

onde ϕ é a gaussiana bidimensional, dada por:

$$\phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{2\pi} \quad (4)$$

e Δ^n é o operador laplaciano aplicado n vezes.

No caso de uma fonte pontual imersa em um ruído branco¹ obtém-se analiticamente que a amplificação da razão sinal-ruído, definida por $\lambda_n = \frac{\omega_n/\sigma_{\omega_n}}{y_0/\sigma}$ com σ_{ω_n} e σ os desvios médios quadráticos do background dos mapa filtrado e não filtrado, y_0 o valor do sinal no mapa não filtrado e ω_n a transformada de wavelet deste sinal, é alcançada para $n=0$. Isto é, o filtro que otimiza a razão sinal-ruído para o caso de uma fonte imersa em ruído branco é o filtro gaussiano.

Para o caso de um fundo que não seja de ruído branco, a situação é diferente, visto que o filtro com máxima amplificação da razão sinal-ruído não necessariamente é o gaussiano, podendo ser componentes da MHWF de ordens superiores. Isto tem profundas implicações para a física de raios cósmicos, pois se o ruído não é branco, isto indica que a distribuição de raios cósmicos não é homogênea ou isotrópica, indicando a existência de uma anisotropia das direções de chegada da radiação cósmica.

3 Resultados

3.1 Cálculo de Amplificação para uma Fonte Imersa em Ruído Branco

A fim de confrontar os programas computacionais desenvolvidos com o modelo teórico, foi realizado um estudo comparativo entre os seguintes filtros: gaussiano, top hat, MHWF1², MHWF2 e MHWF3. Para isto, foi utilizado o software Coverage & Anisotropy Toolkit [6], desenvolvido pela colaboração do Observatório Pierre Auger para estudos de anisotropia. Assim, pode-se comparar para qual deles obtém-se a maior amplificação no caso de uma fonte pontual de dispersão σ , imersa em ruído branco, com amplitudes em relação ao fundo 0,1, 0,5 e 1,2. Este estudo foi realizado para mapas contendo 12288, 49152, 196608, 786432 e 3145728 pixels (valores escolhidos devido às restrições do software).

De acordo com a teoria, o esperado era que o filtro que amplificasse ao máximo a razão sinal-ruído fosse o filtro gaussiano. Isto foi verificado através da análise de gráficos semelhantes ao mostrado nas figuras 1 e 2.

Observa-se que a amplificação máxima se dá para o filtro gaussiano com dispersão σ igual à da fonte. Este resultado está em acordância com a teoria, e possibilita o início da aplicação de wavelets a mapas de raios cósmicos.

¹Entende-se por ruído branco um fundo homogêneo e isotrópico, com espectro de potência constante

²MHWF1 é a primeira ordem da família de wavelets, isto é, $n=1$.

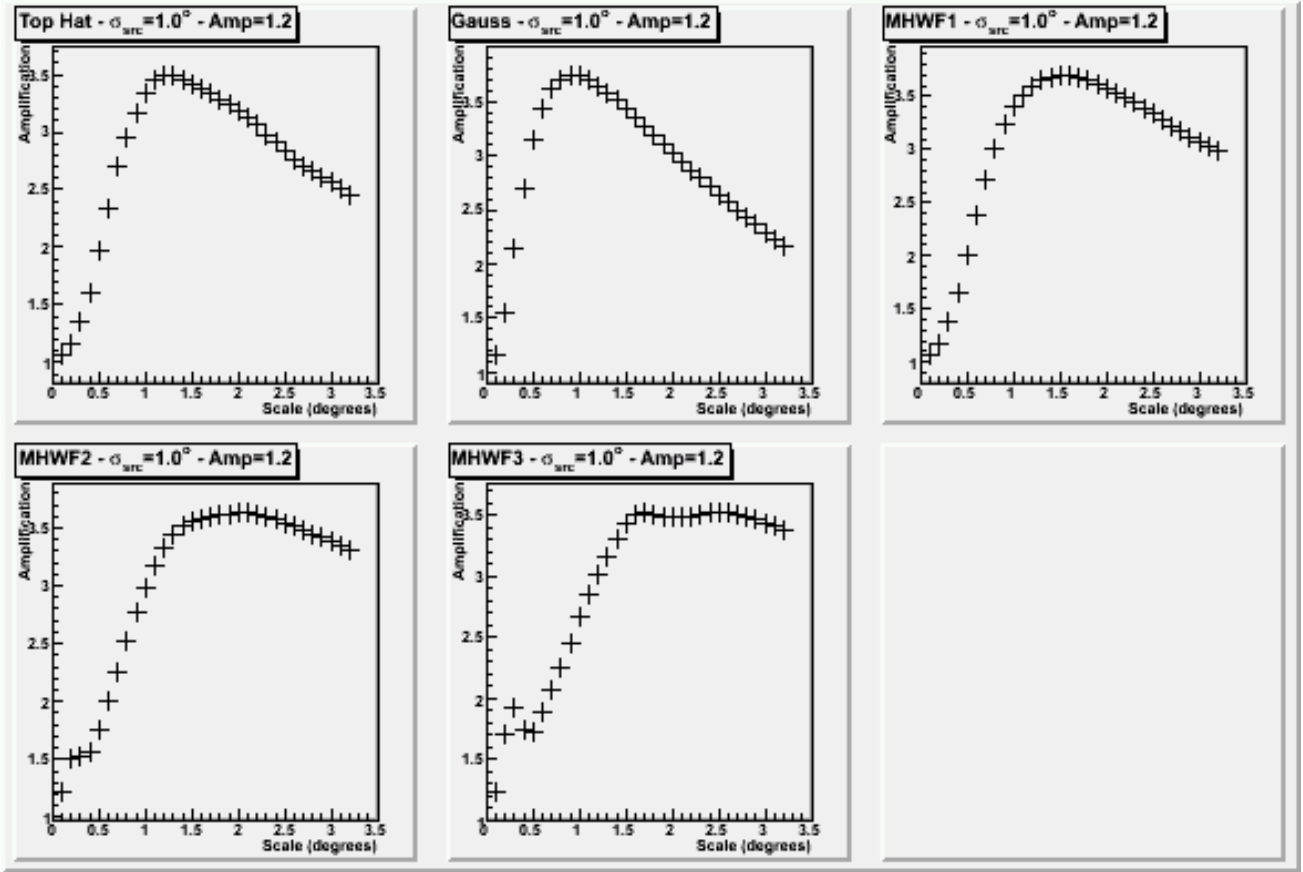


Figura 1: Cálculo da amplificação para uma fonte de $\sigma=1,0$, com amplitude 1,2 em relação ao fundo, para um mapa com 196608 pixels.

3.2 Obtenção de Mapas de Significância e Mapas de Probabilidade

A próxima etapa, ainda em fase inicial, consiste em calcular a probabilidade de que um excesso observado de raios cósmicos seja devido a uma fonte, ao invés de uma flutuação estatística. A priori, pode-se usar o conhecido método estatístico de Li & Ma para calcular a significância. Porém a forma das wavelets da família de chapéu mexicano (figura 3) gera um problema, relacionado ao cálculo da significância.

No presente problema há dois fatores desconhecidos: o número esperado de eventos da fonte $\langle N_s \rangle$ e o número esperado de eventos do fundo $\langle N_b \rangle$. Considera-se que não há nenhuma fonte extra, ou seja que todos os eventos observados devem-se ao fundo ($\langle N_s \rangle = 0$). Desta forma, tem-se os dados observados $X = (N_{on}, N_{off})$, os parâmetros $\Theta = (\langle N_s \rangle, \langle N_b \rangle)$, e as hipóteses nula ($\langle N_s \rangle = 0$) e alternativa ($\langle N_s \rangle \neq 0$). Assim, pode-se mostrar que a significância estatística do resultado observado é dada por[7]:

$$S = \sqrt{2} \sqrt{N_{on} \ln \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa} \left(\frac{N_{on}}{N_{on} + N_{off}} \right) \right] + N_{off} \ln \left[(1 + \kappa) \left(\frac{N_{off}}{N_{on} + N_{off}} \right) \right]} \quad (5)$$

Da figura 3 é notória a existência de uma região negativa nas wavelets de diferentes ordens, e quando este filtro for convoluído com o mapa de eventos de raios cósmicos, poderão ser obtidos valores negativos. Estes valores negativos para N_{on} e/ou N_{off} impossibilitam um cálculo que envolva logaritmo, como é o caso, visto que a função logarítmica no conjunto real não está definida para valores negativos e nulos. Assim, faz-se necessário um método análogo que não

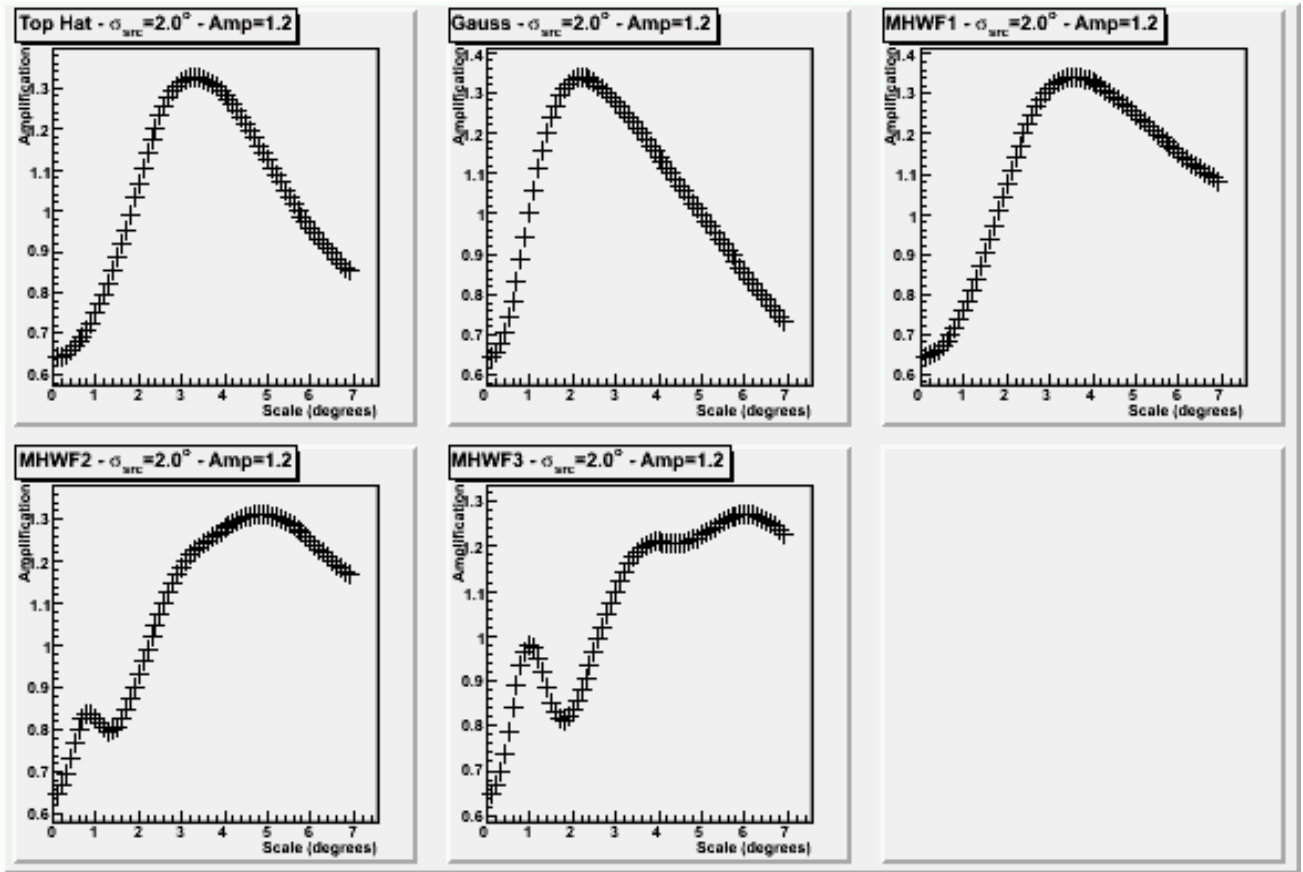


Figura 2: Cálculo da amplificação para uma fonte de $\sigma=2,0$, com amplitude 1,2 em relação ao fundo, para um mapa com 12288 pixels.

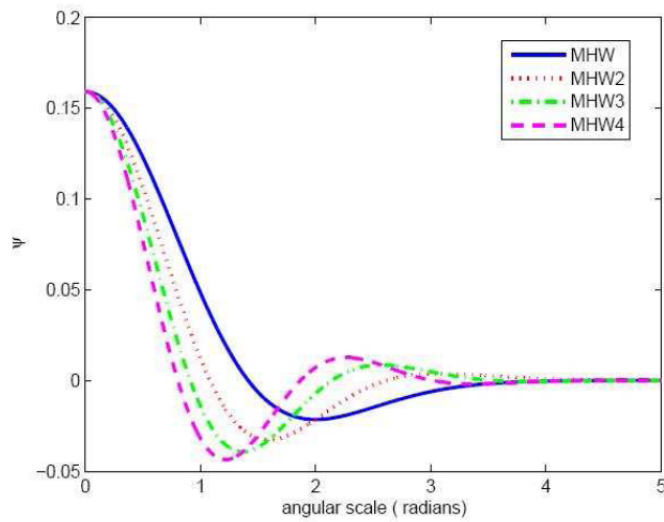


Figura 3: Perfil radial de algumas componentes da MHWF; figura extraída de [5].

seja afetado por tais valores negativos.

Em um mapa de probabilidade, cada pixel indica univocamente a probabilidade que uma distribuição uniforme e isotrópica de eventos, segundo a aceitação do detector, gere um valor maior de eventos observados dentro de um pixel do que o valor medido. Sem a utilização

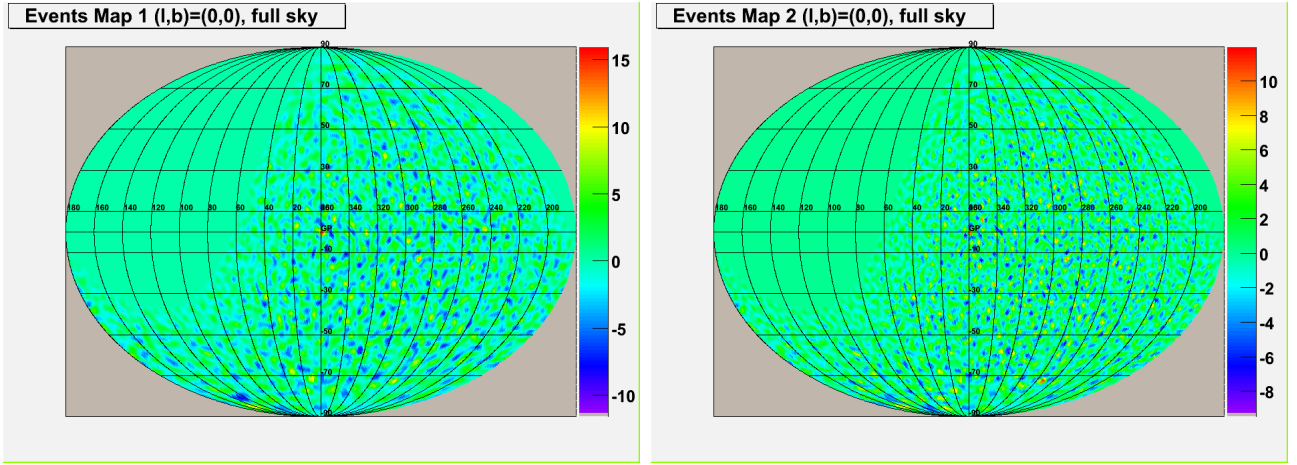


Figura 4: Mapa de eventos para o caso de uma fonte simulada no centro galáctico, filtrado com MHWF1 (à esquerda) e MHWF2 (à direita)

de filtros, a construção de mapas de probabilidade se dá de forma direta, com a probabilidade dada pela estatística de Poisson.[8]

$$M_{prob}(k) = P(n > M(k); M_{bg}(k)) \quad (6)$$

Com a utilização de filtros é possível estimar a probabilidade em questão através de simulações Monte Carlo.

Visando estudar as potencialidades do uso de mapas de probabilidade, ao invés de mapas de significância, foram simulados 10000 conjuntos de eventos isotrópicos, segundo a aceitação do detector, cada um contendo 39100 eventos. Tais conjuntos foram usados como referência para o cálculo dos mapas de probabilidade em três situações:

- mapa simulado isotropicamente de acordo com a aceitação do detector;
- fonte de $\sigma=1,5^\circ$ simulada no centro galáctico, com amplitude 5,0 em relação ao fundo;
- conjunto de dados do Observatório Pierre Auger com energia $E > 1,25 \text{ EeV}$, coletados entre 1 de janeiro de 2004 e 30 de abril de 2006.

Em todos estes casos os mapas foram filtrados com MHWF1, MHWF2 e MHWF3 de $1,5^\circ$, $1,7^\circ$, $1,9^\circ$, $2,1^\circ$, $2,3^\circ$. Após a obtenção dos mapas de probabilidade foi efetuado um corte para pixels com probabilidades acima de 99,9% a fim de buscar possíveis fontes, e foi construído um histograma contendo as distribuições de probabilidade. As figuras em 4, referem-se ao mapa de eventos para o caso de uma fonte simulada, filtrado com as wavelets MHWF1 e MHWF2, com dispersão $\sigma=1,7^\circ$. As figuras em 6 são os mapas de probabilidade mostrados na figura 5, com o supra-citado corte em 99,9%, para mapas de eventos filtrados com MHWF1 e MHWF2. A figura 7 são as distribuições de probabilidades para o caso de mapas filtrados com as 3 ordens de wavelet.

4 Discussão e Conclusões Parciais

Após o entendimento do processo de filtragem de mapas, foi possível compreender como seu uso contribui para a amplificação da razão sinal-ruído, o que justifica seu emprego para

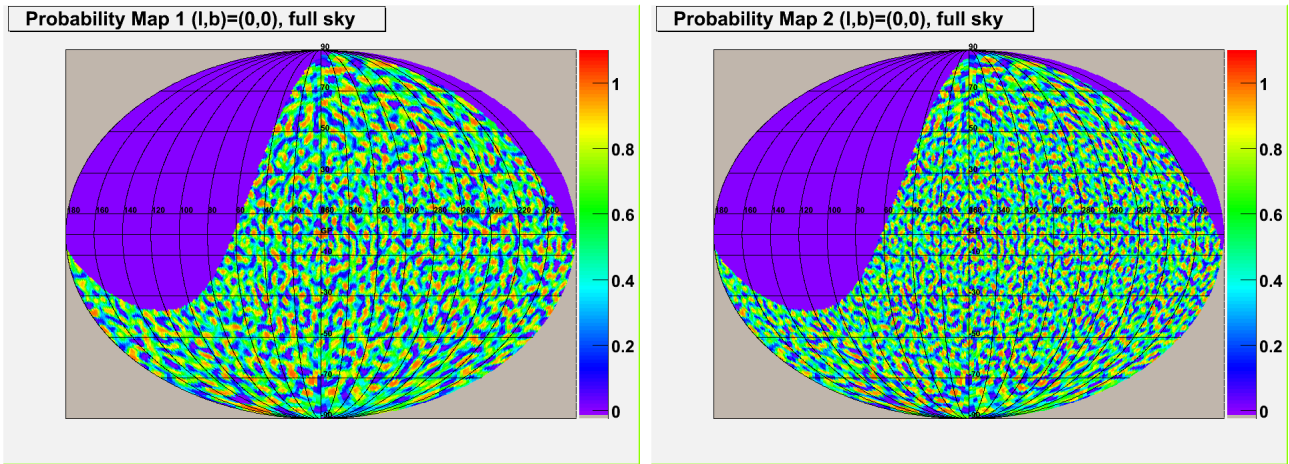


Figura 5: Mapa de probabilidade para o caso de uma fonte simulada no centro galáctico, filtrado com MHWF1 (à esquerda) e MHWF2 (à direita)

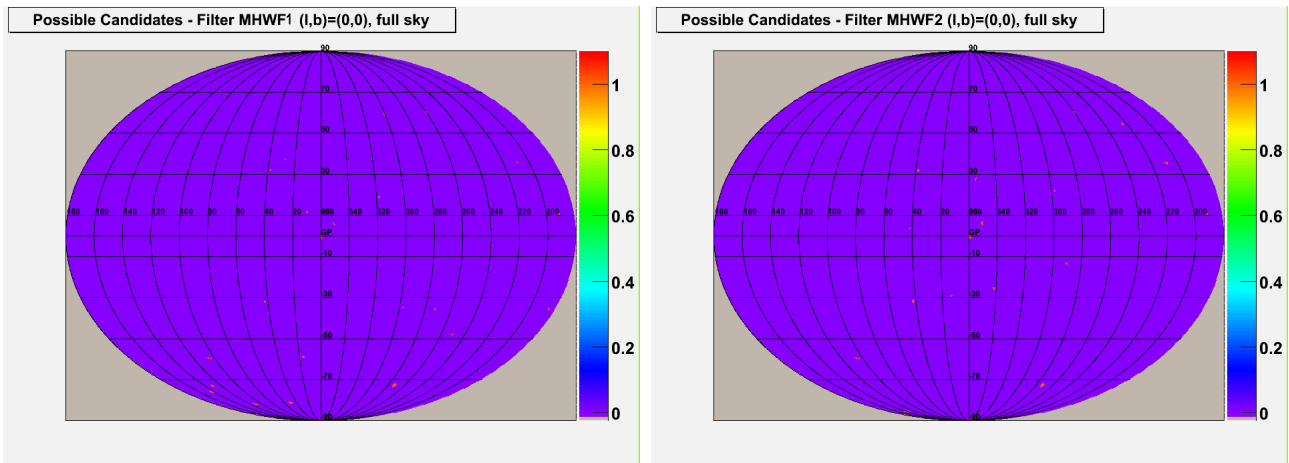


Figura 6: Mapa de probabilidades com corte em 99,9% para o caso de uma fonte simulada no centro galáctico, filtrado com MHWF1 (à esquerda) e MHWF2 (à direita)

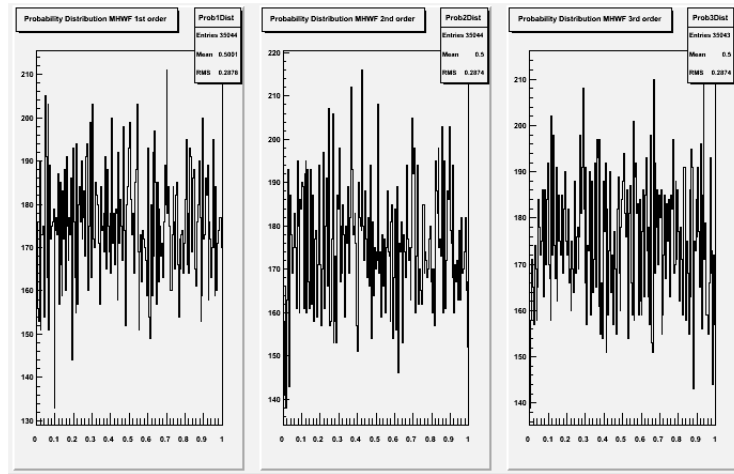


Figura 7: Distribuições de probabilidade para o caso dos mapas filtrados com as três wavelets: MHWF1, MHWF2 e MHWF3.

identificação de fontes pontuais de UHECRs³. Após verificar a teoria, que predizia que o filtro cuja aplicação resulta na maior ampliação da razão sinal-ruído é o filtro gaussiano, iniciou-se a aplicação das wavelets a conjuntos de dados simulados. Porém, encontrou-se um problema referente ao uso de mapas de significância em mapas filtrados com wavelets de chapéu mexicano. Este problema tem sido contornado com sucesso utilizando mapas de probabilidade. No entanto, a utilização de mapas de probabilidade, devido ao uso de técnicas de Monte Carlo, requer grandes recursos computacionais. Assim, faz-se desejável um método de calcular mapas de significância a partir de mapas filtrados com MHW. No entanto, nenhuma referência bibliográfica acerca disto foi encontrada até o presente momento.

Dentre os próximos passos está a aplicação de wavelets a mapas de eventos contendo dados reais coletados pelo Observatório Pierre Auger para vários períodos de tempo, visando identificar possíveis excessos que possam estar correlacionados a certas fontes astrofísicas.

Referências

- [1] D. Marr & E. C. Hildreth. *Theory of Edge Detection*. Proc. Royal Society London, Ser. B, 207, 187-217.
- [2] A. Cayón et al. 2000, MNRAS, 313, 757.
- [3] P. Vielva et al. 2001, MNRAS, 326, 181.
- [4] P. Vielva et al. 2003, MNRAS, 344, 89.
- [5] J. González-Nuevo et al. *The Mexican Wavelet Family. Application to point source detection in CMB maps*. arXiv Astro-ph/0604376v2, 2006.
- [6] <http://apcauger.in2p3.fr/Protected/Toolkit/>
- [7] T. LI, Y. MA. *Astrophysical Journal*. 272 (1982) 317.
- [8] P. Billoir & A. Letessier-Selvon. Pierre Auger Observatory GAP Note 2005-055.

³UHECRs = *Ultra-High Energy Cosmic Rays*