F690A – Iniciação Científica II

Relatório Final
Versão Prévia - 05/11/2007

Título: Tradução comentada da obra “Sobre os corpos flutuantes - LIVRO II” de Arquimedes

Autor: Nivaldo Benedito Ferreira Campos
RA 800823

Orientador: Prof. Dr. André K. Torres Assis

Introdução

Neste trabalho é apresentada a tradução do texto de Arquimedes “Sobre os corpos flutuantes – Segundo Livro”, no qual são estudadas as condições de equilíbrio possíveis para um parabolóide imerso em um fluido. A primeira parte foi publicada em 1996[i] e foi feita a partir da tradução em inglês dos trabalhos do autor feita por T. L. Heath[ii], a qual foi utilizada também na presente tradução. As notas de Heath são indicadas por [N. H.]. Uma discussão detalhada do trabalho traduzido aqui foi feita por Dijksterhuis.[iii]

Uma apresentação bastante didática das conclusões obtidas por Arquimedes a partir do conhecimento do CG de um sólido é apresentada por Ramalho[iv] e reproduzida a seguir.

Quando um corpo flutua em um líquido, este se encontra sob a ação de duas forças verticais, de mesma intensidade e de sentidos opostos: seu peso próprio $\vec{P}$, que atua no centro de gravidade *G* do corpo todo e o empuxo $\vec{E}$ exercido pelo líquido sobre o corpo e que atua no centro de gravidade *C* da parte do corpo imersa no líquido, também chamado de Centro de Empuxo. Sob a ação destas forças, o corpo estará em equilíbrio, e este poderá ser estável, indiferente ou instável.

Se o centro de gravidade *G* está abaixo do centro de empuxo *C*, o equilíbrio será estável. Isto significa que se o corpo for deslocado de sua posição de equilíbrio inicial, a ação do sistema de forças atuante sobre ele ($\vec{P}$ e $\vec{E}$) o obrigarão a retornar à posição inicial (Fig. 1).

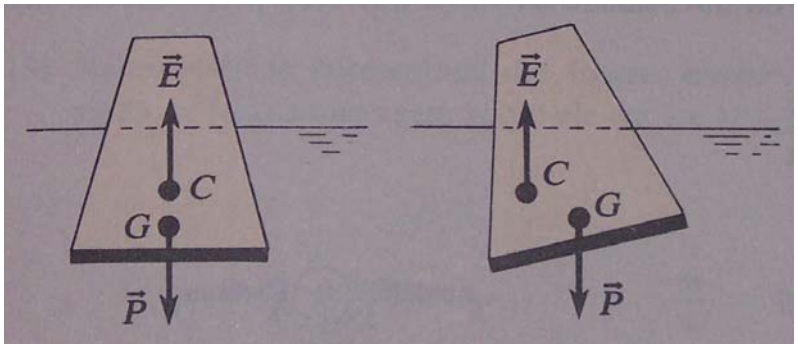


Fig 1. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio estável

Quando o centro de gravidade *G* coincide com o centro de empuxo *C*, o equilíbrio é indiferente, isto é , o corpo permanece na posição em que for colocado. Esta é a situação mais comum quando o corpo está totalmente mergulhado (Fig. 2).

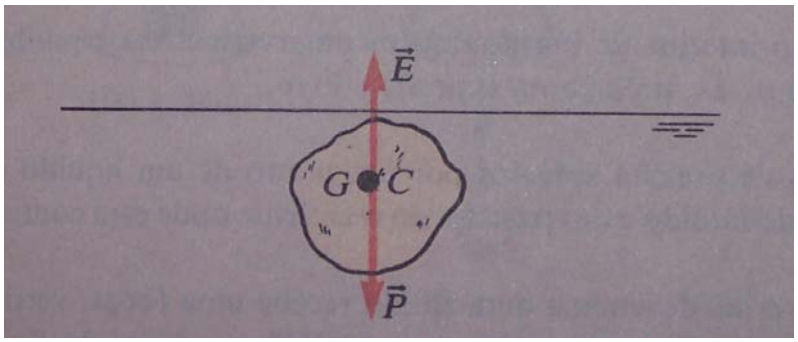


Fig 2. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio indiferente

Quando o centro de gravidade está *G* está acima do centro de empuxo *C*, o equilíbrio tanto pode ser estável como instável. A situação de equilíbrio dependerá então de como o centro de empuxo se desloca quando, devido a uma perturbação, a forma do volume do líquido deslocado é alterada. Os dois casos possíveis, estável e instável, são apresentados nas figures 3a e 3b respectivamente.

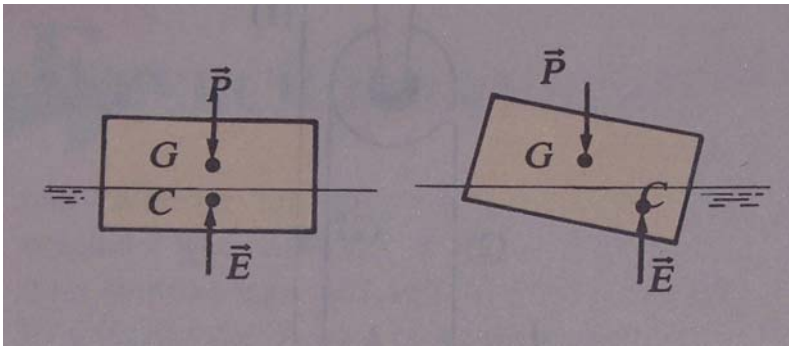


Fig 3a. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio estável, com o CG acima do centro de empuxo

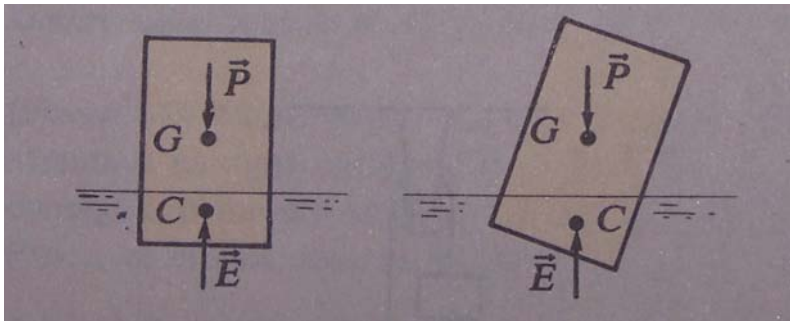


Fig 3b. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio instável, com o CG acima do centro de empuxo

Note que no primeiro caso, ao deslocar-se o corpo de sua posição de equilíbrio, o centro de empuxo muda, de forma que a nova configuração do sistema de forças faz com que o corpo retorne à sua posição original e, portanto, o equilíbrio é estável. Já no segundo caso, a nova posição do centro de empuxo dará origem a um sistema de forças que tenderá a afastar ainda mais o corpo de sua posição inicial de equilíbrio e, portanto, o equilíbrio será instável.

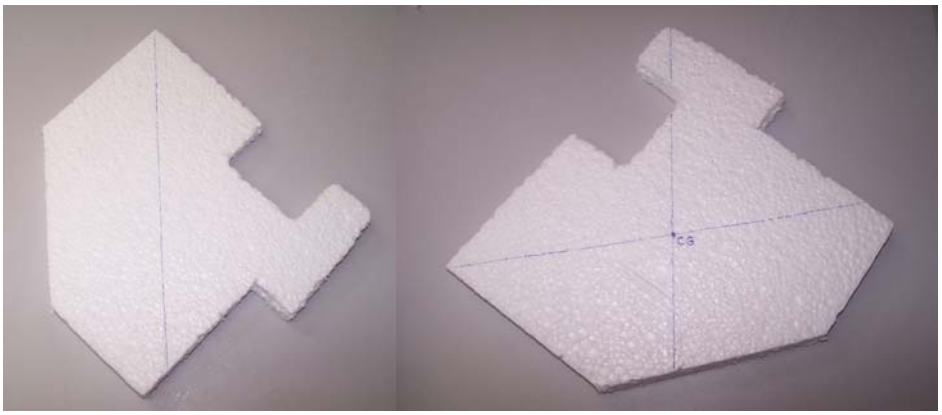
No caso de uma embarcação, é desejável que esta seja o mais estável possível e, portanto, de acordo com os casos observados, esta condição será obtida quando seu centro de gravidade, levando-se em conta a carga que esta transporta, estiver localizado na posição mais inferior possível.

É relevante ser mencionado aqui o Princípio de Arquimedes, o qual estabelece que a força de empuxo atuante sobre um corpo total ou parcialmente imerso em um líquido, é igual ao peso do líquido deslocado por ele. Este principio é apresentado por Silva[v] de uma forma didática e de fácil compreensão, também acompanhado de alguns experimentos didáticos que o demonstram

Para melhor entender as implicações do exposto acima e complementando o trabalho de tradução realizado, foram montados alguns experimentos simples, para demonstrar alguns dos princípios enunciados por Arquimedes. Estes experimentos apresentam as técnicas desenvolvidas por Arquimedes na determinação do centro de gravidade de figuras planas e algumas proposições apresentadas por ele na obra traduzida, e serão utilizados na apresentação final do trabalho. Estes experimentos são:

a) Determinação do centro de gravidade (CG) de uma figura plana qualquer.

- Material empregado: placa de isopor, fios e clips
- Cortada da placa de isopor uma seção qualquer, suspende-se esta seção por pontos escolhidos em seu contorno. A cada vez que a seção é suspensa, traça-se em sua superfície uma linha vertical passando pelo ponto de suspensão. O ponto de cruzamento das linhas será o CG da seção (Fig. 4).



- Fig 4. Determinação do C.G. de uma figura plana

b) Demonstração do comportamento de corpos com diferentes formas em relação a uma configuração de equilíbrio, quando estes estão flutuando em um líquido.

- Material empregado: sólidos de diferentes formas, moldados em cera (Fig. 5).

Fig 5. Sólidos de diferentes formas moldados em cera.

- Tomando-se uma vasilha com água, coloca-se nela os corpos previamente moldados a fim de se observar para uma determinada posição de equilíbrio se esta corresponde ao equilíbrio estável, indiferente ou instável. (Figs. 6, 7, 8, 9).

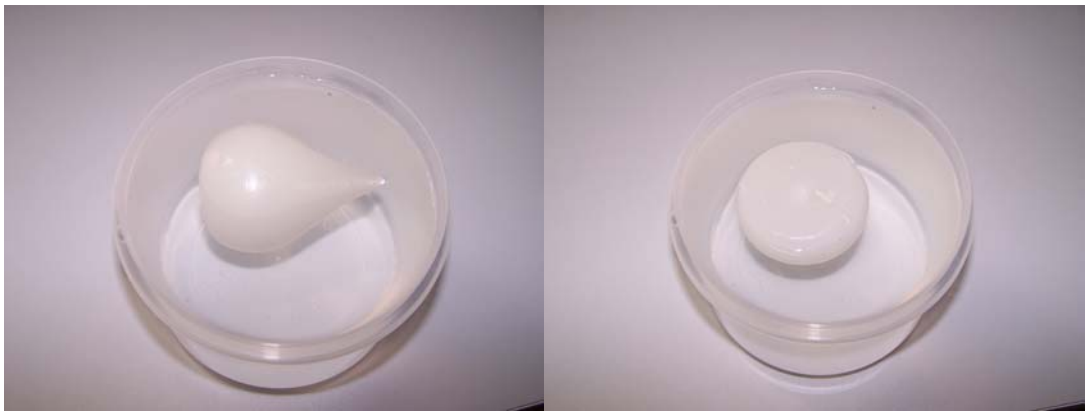


Fig 6. Duas posições possíveis de equilíbrio estável para um sólido em forma de gota.

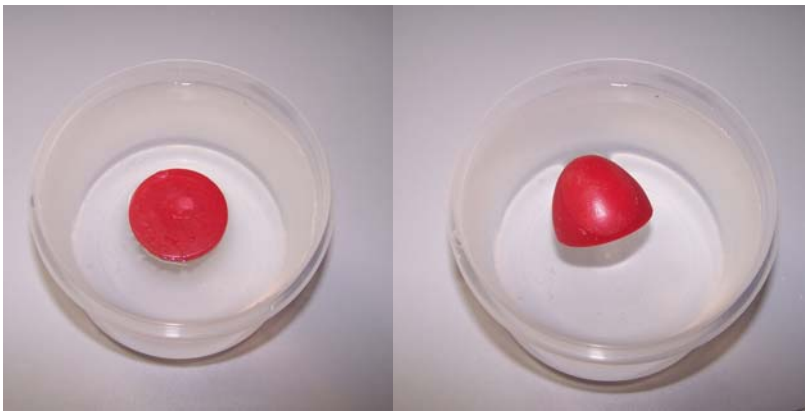


Fig 7. Duas posições possíveis de equilíbrio estável para um parabolóide de revolução alto.

Fig 8. Duas posições possíveis de equilíbrio estável para um parabolóide de revolução raso. O equilíbrio só é possível com o eixo na vertical.

Fig 9. Única posição de equilíbrio estável possível para uma esfera da qual foi retirada uma calota.

A seguir são apresentadas uma biografia sucinta de Arquimedes e a tradução de seu texto “Sobre os corpos flutuantes, Livro II”, objetivo principal deste trabalho.

Biografia de Arquimedes

Filho do astrônomo Fídias, como ele próprio informa em um de seus trabalhos, Arquimedes nasceu em 287 a.C., em Siracusa, na Sicília, que então fazia parte da Grécia ocidental ou Magna Grécia. Um amigo de Arquimedes, chamado Heracleides escreveu sua biografia, mas infelizmente esta se perdeu. Embora dados fantasiosos permeiem todos os informes sobre sua vida, parece certo que estudou em Alexandria (Egito), um dos grandes centros culturais da época. Ali teria conhecido Euclides, já velho, e seus discípulos imediatos; e o matemático Canon de Samos, de quem se tornou amigo. Também é relatado por alguns autores que foi lá que ele inventou um dispositivo hoje conhecido como parafuso de Arquimedes. Este dispositivo é uma bomba de água, ainda usada em muitas partes do mundo (Stein[vi].

Na sua biografia é difícil separar a realidade da lenda. No prefácio de seu trabalho "Sobre Espirais"[ii], Arquimedes relata uma interessante estória a respeito de seus amigos em Alexandria. Ele diz que tinha o hábito de enviar-lhes seus mais recentes teoremas, mas sem apresentar as demonstrações. Aparentemente, alguns matemáticos tinham reivindicado os resultados obtidos por Arquimedes com sendo de sua autoria. Isto fez com que Arquimedes ao enviar um de seus trabalhos com diversos teoremas incluísse também dois teoremas falsos. O objetivo era que "aqueles que clamam descobrir tudo, mas não produzem provas do mesmo, possam ser desmascarados por fingirem ter descoberto o impossível".

Além dos prefácios de seus trabalhos, informações sobre Arquimedes chegaram até nós a partir de uma série de fontes, como nas estórias de Plutarco[vii] e outros. Plutarco nos diz que Arquimedes era amigo do rei Hieron II de Siracusa. Uma outra evidência de que pelo menos com a família do rei Hieron II ele tinha uma relação de amizade, vem do fato dele ter dedicado "O Arenário" a Gelon, o filho do rei.

De fato, existem inúmeras referências a Arquimedes nos escritos de sua época, dada a reputação quase sem par que ele ganhou neste período. Curiosamente a razão para isso não era um interesse generalizado em Matemática, mas sim nas máquinas que inventou para serem usadas na guerra. Estas armas foram particularmente eficientes na defesa de Siracusa contra os Romanos, liderados por Marcelo.

Escreve Plutarco[vii]:

> *... quando Arquimedes começou a manejar suas máquinas, ele de uma só vez atirou contra as forças terrestres todos os tipos de mísseis, e imensas massas de rocha que caíram com barulho e violência inacreditáveis, contra as quais nenhum homem poderia resistir em pé ...*

Outras invenções de Arquimedes, como a polia composta, também colaboraram para que sua fama se perpetuasse. Novamente citando Plutarco[vii]:

> *[Arquimedes] afirmou [em uma carta ao Rei Hieron] que, dada uma força, qualquer peso poderia ser movido, e até mesmo se gabando, disse que se houvesse outra Terra, esta poderia ser movida. Hieron maravilhou-se com isto e pediu uma demonstração prática. Arquimedes tomou um dos navios da frota do rei - que não podia ser movido a não ser por muitos homens - carregou-o com muitos passageiros*

e lotou-o de carga. Arquimedes colocou-se a distância e puxou as polias, movendo o navio em linha reta suavemente, como se estivesse no mar.

As realizações de Arquimedes são impressionantes. Ele é considerado por muitos historiadores da ciência como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Escreveu importantes obras sobre geometria plana e espacial, aritmética e mecânica. Antecipou-se a muitas das descobertas da ciência moderna no campo da matemática pura, como o desenvolvimento de um método de integração, denominado método da exaustão, que lhe permitiu obter áreas e volumes de figuras sólidas curvas e também as áreas de figuras planas, dando inicio ao cálculo infinitesimal, concebido e aperfeiçoado por Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz e Newton, muitos séculos depois.

Desenvolveu também os teoremas fundamentais relativos ao centro de gravidade das figuras planas e dos sólidos. Demonstrou que o volume de uma esfera equivale a dois terços do volume do cilindro que a circunscreve.

Reduzindo o equilíbrio de forças a um simples problema geométrico, estudou o equilíbrio dos sólidos, o funcionamento da alavanca e o movimento dos corpos celestes, além de ter organizado uma coleção - a mais completa da Antiguidade - de figuras planas e volumétricas com os centros de gravidade perfeitamente localizados. Além disso, também procurava utilidades práticas para suas descobertas. Extraordinário engenheiro, construiu, segundo depoimento de Cícero (106 - 43 a.C.), um planetário que reproduzia os diferentes movimentos dos corpos celestes; e um aparelho para medir as variações do diâmetro aparente do Sol e da Lua, um protótipo do modelo, mais requintado, que será construído pelo astrônomo Hiparco, no século II a.C.

Porém, ele é mais conhecido principalmente por ter enunciado a lei da hidrostática, o chamado princípio de Arquimedes. Essa lei estabelece que todo corpo submerso em um fluido experimenta perda de peso igual ao peso do volume do fluido que o corpo desloca. Diz-se que essa descoberta foi feita enquanto o matemático se banhava e meditava sobre um problema que lhe fora apresentado pelo rei: como distinguir uma coroa de ouro puro de outra que contivesse prata. Observando o deslocamento e transbordamento da água à medida que seu corpo submergia, concluiu que se a coroa, ao submergir, deslocasse quantidade de água equivalente a seu peso em ouro, isto significaria que não continha outro metal. Conta-se que ficou tão entusiasmado que saiu nu para a rua gritando eureka, palavra grega que significa "achei".

Arquimedes passou a maior parte de sua vida na Sicília, em Siracusa e arredores, dedicado à pesquisa e aos experimentos. Embora não tivesse nenhum cargo público, durante a conquista da Sicília pelos romanos pôs-se à disposição das autoridades e muitos de seus instrumentos mecânicos foram utilizados na defesa de Siracusa. Entre os aparatos de guerra cuja invenção lhe é atribuída está a catapulta e a idealização dos célebres "espelhos ustórios" (ustório = que queima, que facilita a combustão), espelhos curvos com os quais os defensores de Siracusa teriam queimado à distância – pela concentração dos raios solares - os navios romanos que sitiavam a região. No entender de historiadores modernos, tal uso dos espelhos deve ser colocado entre as estórias fantasiosas sobre Arquimedes.

Após um longo assédio, as tropas de Marcelo entram na cidade em 212 a.C.. Segundo Plutarco, apesar das ordens de Marcelo para respeitar a vida do sábio, um soldado romano, irritado porque Arquimedes, absorto na resolução de um problema, não responde às suas intimações, matou-o. Archimedes considerava seu feitos mais significativos eram aqueles relacionados ao estudo de um cilindro circunscrevendo uma esfera, razão pela qual pediu que uma representação destas duas figuras juntamente com seu resultado sobre a razão

entre volume delas fosse inscrita em sua tumba. Cícero, questor da Sicília, a encontrou em 75 a.C. e nela figurava a inscrição como Arquimedes havia desejado.

No seu trabalho revela-se exclusivamente o investigador. Seus escritos são verdadeiras memórias científicas, trabalhos originais, nos quais se dá por conhecido todo o produzido antes sobre o tema e apresentam-se elementos novos, próprios. Suas obras que sobreviveram até nós são: “Sobre o equilíbrio dos planos” (dois livros), “Quadratura da parábola”, “Sobre a esfera e o cilindro” (dois livros), “Sobre espirais”, “Sobre conóides e esferóides”, “Sobre os corpos flutuantes” (dois livros), “Medidas do círculo” e “O Arenário”. No verão de 1906, J. L. Heiberg, professor de filologia clássica na Universidade de Copenhagen, descobriu um manuscrito do século X, o qual incluía o trabalho de Arquimedes intitulado “O Método”. Esta descoberta permitiu uma notável compreensão de como Arquimedes obteve muitos de seus resultados.

- O tratado “Sobre equilíbrios planos” aborda os princípios fundamentais da mecânica, usando métodos geométricos. Arquimedes descobriu teoremas fundamentais a respeito do centro de gravidade de figuras planas, todos constantes deste trabalho. Em particular ele encontra, no livro 1, o centro de gravidade do paralelogramo, do triângulo e do trapézio. O segundo livro é dedicado inteiramente a encontrar o centro de gravidade de um segmento de uma parábola
- Na “Quadratura da parábola” Arquimedes encontra a área de um segmento de parábola formado pelo corte de uma corda qualquer.
- No primeiro volume de “Sobre a esfera e o cilindro”, Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é quatro vezes a do grande círculo, acha a área de qualquer segmento da esfera, mostra que o volume de uma esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito, e que a superfície da esfera é dois terços da superfície do cilindro circunscrito, incluindo-se as bases. No segundo livro desta obra, o resultado mais importante obtido por Arquimedes foi mostrar como cortar com um plano uma dada esfera, de forma que a razão entre os volumes dos dois segmentos resultantes seja igual a uma razão predeterminada.
- Em “Sobre espirais”, Arquimedes define uma espiral e estabelece as propriedades fundamentais relacionando o comprimento do vetor raio com os ângulos de revolução que geram as espirais. Ele também apresenta resultados sobre tangentes às espirais, bem como demonstra como calcular áreas de partes da espiral.
- Em “Sobre conóides e esferóides” Arquimedes examina os parabolóides de revolução, hiperbolóides de revolução e esferóides obtidos pela rotação de uma elipse tanto em torno de seu eixo maior, como de seu eixo menor. O objetivo principal deste trabalho é investigar o volume de segmentos dessas figuras tridimensionais.
- “Sobre os corpos flutuantes” é o trabalho onde Arquimedes estabelece os princípios básicos da hidrostática. Seu teorema mais famoso - que dá o peso de um corpo imerso em um líquido - chamado “Princípio de Arquimedes”, consta deste trabalho. Ele também estudou a estabilidade de vários corpos flutuantes de diferentes formas e diferentes densidades.
- Em “Medidas do círculo” Arquimedes mostra que o valor exato de π situa-se entre $3^{10}/_{71}$ e $3^{1}/_{7}$. Ele obteve este resultado circunscrevendo e inscrevendo um círculo com polígonos regulares com 96 lados!
- “O Arenário” é um trabalho notável em que Arquimedes propõe um sistema numérico capaz de expressar números até $8x10^{63}$ (em notação moderna). Seu argumento é de que este número seria suficiente para contar o número de grãos de areia do Universo. Há também importantes questões históricas neste trabalho, uma vez que Arquimedes teve que definir as

dimensões do universo a fim de poder contar os grãos de areia que ele poderia conter. Ele cita que Aristarco propôs um sistema no qual o sol está no centro e os planetas, incluindo a Terra, giram ao seu redor. Quando cita resultados acerca do tamanho do Universo, ele usa resultados de Euxodo, Fídias (seu pai) e Aristarco.

- Há referências a outros trabalhos de Arquimedes, que estão hoje perdidos. Pappus refere-se a um trabalho de Arquimedes sobre poliedros semi-regulares e o próprio Arquimedes refere-se a um trabalho sobre o sistema numérico proposto no Arenário. Pappus também menciona um tratado sobre balanças e alavancas, e Theon menciona um tratado sobre espelhos.

Em "O Método"[viii], Arquimedes descreve o modo pelo qual descobriu muitos de seus resultados geométricos.

> *… certas coisas primeiro tornaram-se claras para mim por um método mecânico, apesar delas terem sido provadas pela geometria posteriormente, porque sua investigação pelo dito método não fornece uma autêntica prova. Porém ele é evidentemente mais fácil de ser utilizado para obter a prova, desde que tenhamos adquirido, pelo método, algum conhecimento prévio das questões, do que seria encontrá-la sem qualquer conhecimento prévio.*

Talvez a genialidade dos resultados geométricos de Arquimedes seja melhor avaliada por Plutarco[vii], que escreve:

> *Não é possível encontrar em toda a geometria questões mais difíceis e intrincadas, ou mais simples e lúcidas explicações. Alguns atribuem isso a sua genialidade natural, enquanto outros pensam que um esforço incrível e trabalho extenuante produziram estes, em todos os aspectos, fáceis e não laboriosos resultados. Nenhuma quantidade de investigação própria sua lograria êxito em obter a prova, e ainda assim, uma vez vista, você imediatamente acredita que a teria descoberto, de tão suave e rápido é o caminho pelo qual ele o leva à conclusão requerida.*

Talvez seja um fato inesperado que os trabalhos de Arquimedes tenham sido pouco conhecidos logo após sua morte. Somente depois que Eutócio editou alguns dos trabalhos de Arquimedes, com comentários, no século VI, seus tratados tornaram-se mais largamente conhecidos.

SOBRE OS CORPOS FLUTUANTES
LIVRO II

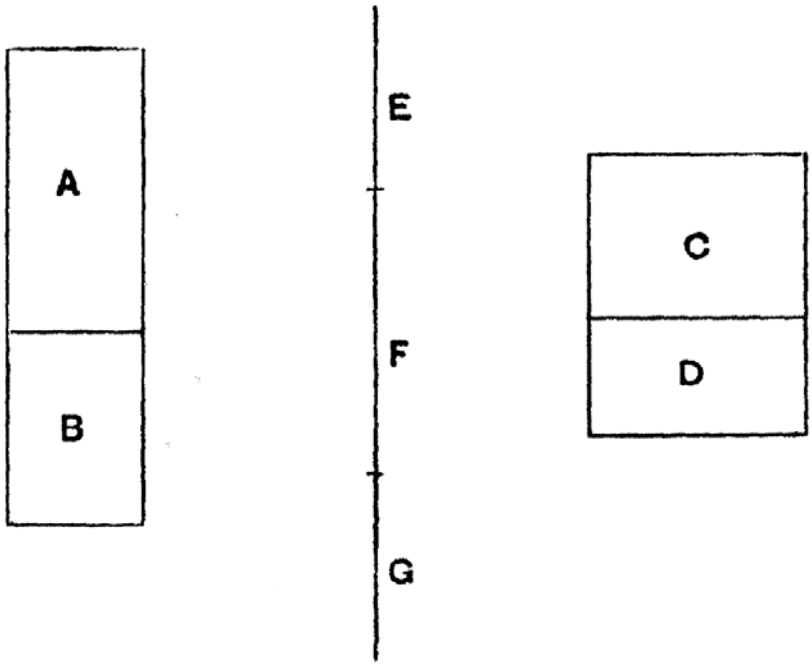
Proposição 1

Se um sólido mais leve que um fluido está em repouso nele, o peso do sólido estará para aquele do mesmo volume do fluido como a parte imersa do sólido está para o todo.

Seja *(A + B)* o sólido e B a porção imersa no fluido.

Seja *(C + D)* um volume igual do fluido, *C* sendo igual em volume a *A*, e *B* [igual] a *D*.

Suponha ainda que a linha *E* represente o peso do sólido *(A + B)*, *(F + G)* represente o peso de *(C + D)* e *G* o [peso] de *D*.



Então

peso de *(A + B)* : peso de *(C + D) = E : (F + G)*...(1).

E o peso de *(A + B)* é igual ao peso de um volume *B* do fluido [I.5], isto é, ao peso de *D*.

Quer dizer, *E = G*.

Portanto, por (1),

peso de *(A + B)* : peso de *(C + D) = G : F + G*

= D : C + D

$= B : A + B.$

Proposição 2

Se um segmento reto de um parabolóide de revolução cujo eixo não é maior que $\frac{3}{4}p$ *(onde p é o parâmetro principal da parábola geradora), e cuja gravidade específica é menor que a de um fluido, for colocado no fluido com seu eixo inclinado em relação à vertical por um ângulo qualquer, mas de tal forma que a base do segmento não toque a superfície do fluido, o segmento do parabolóide não permanecerá nesta posição, mas retornará à posição na qual seu eixo é vertical.*

Seja *AN* o eixo do segmento do parabolóide, e através de *AN* trace um plano perpendicular à superfície do fluido. Faça o plano intersectar o parabolóide na parábola *BAB'*, a base do segmento do parabolóide em *BB'*, e o plano da superfície do fluido na corda *QQ'* da parábola.

Então, uma vez que o *eixo AN* é colocado em uma posição não perpendicular em relação a *QQ'*, *BB'* não será paralelo a *QQ'*.

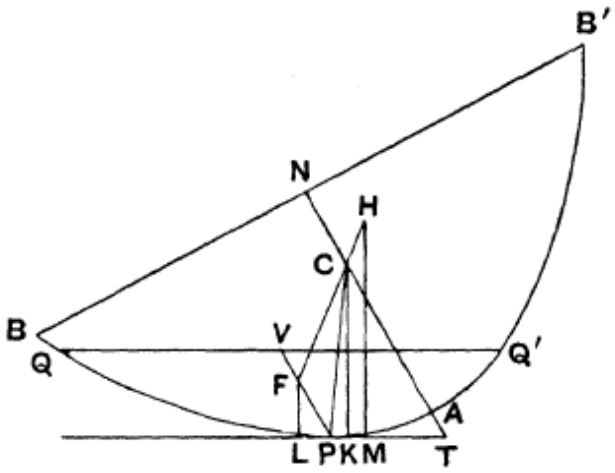
Trace a tangente *PT* à parábola, [sendo esta tangente] paralela a *QQ'*, e seja *P* o ponto de contato.[1]

[A partir de *P* trace *PV* paralelo a *AN* encontrando *QQ`* em *V*. Então *PV* será um diâmetro da parábola e também o eixo da porção do parabolóide imerso no fluido.

Seja *C* o centro de gravidade do parabolóide *BAB'* e *F* o [centro de gravidade] da porção imersa no fluido. Una *FC* e o estenda até *H* de forma que *H* seja o centro de gravidade da porção restante do parabolóide acima da superfície.

---

[1] [N. H.] O restante da prova está faltando na versão de Tartaglia, mas é fornecido entre colchetes como apresentado por Commandinus.



Então, uma vez que $AN = \frac{3}{2} AC$ [2],

e $AN \not> \frac{3}{4} p$,

segue que $AC \not> \frac{p}{2}$.

Portanto, se *CP* for ligado, o ângulo *CPT* é agudo[3]. Portanto, se *CK* for traçado perpendicular a *PT*, *K* estará entre *P* e *T*. E, se *FL* e *HM* forem traçados paralelos a *CK* para encontrar *PT*, cada um deles será perpendicular à superfície do fluido.

Agora, a força atuando na porção imersa do segmento do parabolóide irá atuar para cima ao longo de *LF*, enquanto que o peso da porção fora do fluido irá atuar para baixo ao longo de *HM*.

Portanto, não haverá equilíbrio, mas o segmento irá girar de forma que *B* se elevará e *B'* irá descer, até que *AN* assuma a posição vertical.]

---

[2] [N. H.] Como a determinação do centro de gravidade de um segmento de um parabolóide que é assumida aqui não aparece em qualquer trabalho existente de Arquimedes, ou em qualquer trabalho conhecido de qualquer outro matemático grego, parece provável que esta determinação tenha sido investigada pelo próprio Arquimedes em algum tratado que hoje em dia está perdido.

[3] [N. H.] A verdade desta afirmativa é facilmente provada a partir da propriedade da subnormal. Pois, se a normal em *P* encontra o eixo em *G*, então *AG* é maior do que $\frac{p}{2}$, exceto no caso em que a normal é a normal no próprio vértice *A*. Mas este último caso está excluído aqui pois, por hipótese, *AN* não é colocada verticalmente. Portanto, sendo *P* um ponto diferente de *A*, vem que *AG* será sempre maior do que *AC*; e, como é reto o ângulo *TPG*, o ângulo *TPC* tem de ser agudo.

[Com o propósito de comparação, serão acrescentadas o equivalente trigonométrico desta e de outras proposições.

Suponha que o ângulo *NTP*, no qual, na figura acima, o eixo *AN* é inclinado em relação à superfície do fluido, é denotado por θ.

Então as coordenadas de *P* referidas a *AN* e a tangente em *A* como eixos são

$$\frac{p}{4}\cot^2\theta, \quad \frac{p}{2}\cot\theta,$$

onde *p* é o parâmetro principal.

Suponha que $AN = h$ e que $PV = k$.

Se agora *x'* for a distancia, a partir de *T*, da projeção ortogonal de *F* sobre *TP*, e *x* for a distância correspondente para o ponto *C*, temos

$$x' = \frac{p}{2}\cot^2\theta.\cos\theta + \frac{p}{2}\cot\theta.sen\theta + \frac{2}{3}k\cos\theta,$$

$$x = \frac{p}{4}\cot^2\theta.\cos\theta + \frac{2}{3}h\cos\theta,$$

de onde vem $$x' - x = \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}(h-k)\right\}.$$

A fim de que o segmento do parabolóide possa girar na direção que aumenta o ângulo *PTN*, *x'* precisa ser maior que *x*, ou seja, a expressão encontrada precisa ser positiva.

Este será sempre o caso, seja qual for o valor de θ, se

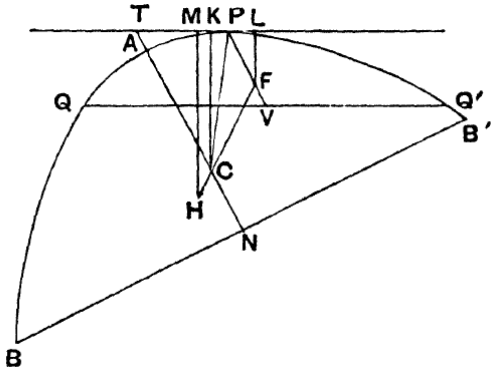
$$\frac{p}{2} \nless \frac{2h}{3},$$

ou $$h \ngtr \frac{3}{4}p.$$

Proposição 3

Se um segmento reto de um parabolóide de revolução cujo eixo não é maior que $\frac{3}{4}p$ *(onde p é o parâmetro), e cuja gravidade específica é menor que a de um fluido, for colocado no fluido com seu eixo inclinado de qualquer ângulo com a vertical, ma de forma que sua base esteja inteiramente submersa, o sólido não permanecerá nesta posição, mas retornará à posição na qual o eixo é vertical.*

Seja *AN* o eixo do parabolóide e através de *AN* trace um plano perpendicular à superfície do fluido, interseccionando o parabolóide na parábola *BAB'*, a base do segmento em *BNB'*, e o plano da superfície do fluido na corda *QQ'* da parábola.



Então, uma vez que *AN*, como colocado, não é perpendicular à superfície do fluido, *QQ'* e *BB'* não serão paralelos.

Trace *PT* paralelo a *QQ'* e tocando a parábola em *P*. Faça *PT* encontrar o prolongamento de *NA* em *T*. Trace o diâmetro *PV* dividindo ao meio *QQ'* em *V*. Então *PV* é o eixo da porção do parabolóide acima da superfície do fluido.

Seja *C* o centro de gravidade do segmento completo do parabolóide e *F* [o centro de gravidade] da porção acima da superfície. Una *FC* e o prolongue até *H*, de forma que *H* seja o centro de gravidade da porção imersa.

Então, uma vez que $AC \ngtr \frac{p}{2}$, o ângulo *CPT* é um ângulo agudo, como na proposição anterior.

Portanto, se *CK* for traçado perpendicular a *PT*, *K* estará entre *P* e *T*. Também, se *HM e FL* forem traçados paralelos a *CK*, eles serão perpendiculares à superfície do fluido.

E a força atuando na porção submersa atuará para cima, ao longo de *HM*, enquanto o peso do restante atuará para baixo ao longo do prolongamento de *LF*.

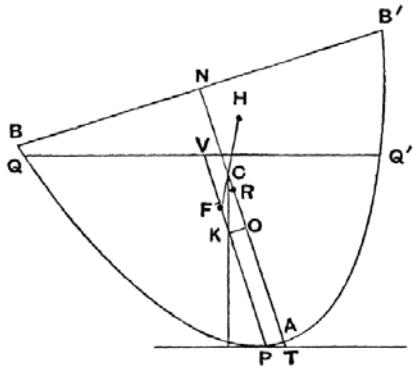
Desta forma o parabolóide girará até que assuma a posição na qual *AN* seja vertical.

Proposição 4

Dado um segmento reto de um parabolóide de revolução cujo eixo AN é maior que $\frac{3}{4}p$ *(onde p é o parâmetro), e cuja gravidade específica é menor que a de um fluido, mas tem em relação a ele uma razão não menor que* $\left(AN - \frac{3}{4}p\right)^2 : AN^2$*, se o segmento do parabolóide*

for colocado no fluido com seu eixo inclinado de qualquer ângulo em relação a vertical, mas de forma que sua base não toque a superfície do fluido, ele não permanecerá nesta posição, mas retornará à posição na qual seu eixo seja vertical.

Seja *AN* o eixo do segmento do parabolóide, e deixe um plano ser traçado através de *AN* perpendicularmente à superfície do fluido e interseccionando o segmento na parábola *BAB'*, a base do segmento em *BB'*, e a superfície do fluido na corda *QQ'* da parábola.



Então *AN*, como colocado, não será perpendicular a *QQ'*.

Trace *PT* paralelo a *QQ'* e tocando a parábola em *P*. Trace o diâmetro *PV* dividindo ao meio *QQ'* em *V*. Desta forma *PV* será o eixo da porção submersa do sólido.

Seja *C* o centro de gravidade do sólido completo e *F* [o centro de gravidade] da porção imersa. Una *FC* e o prolongue até *H*, de forma que *H* seja o centro de gravidade da porção restante.

Agora, uma vez que $$AN = \frac{3}{2}AC,$$

e $$AN > \frac{3}{4}p,$$

segue que $$AC > \frac{p}{2}.$$

Meça *CO* ao longo de *CA* igual a $\frac{p}{2}$, e *OR* ao longo de *OC* igual a $\frac{1}{2}AO$.

Então, uma vez que $$AN = \frac{3}{2}AC,$$

e $$AR = \frac{3}{2}AO,$$

temos, por subtração, $$NR = \frac{3}{2}OC,$$

Isto é,

$$AN - AR = \frac{3}{2}OC$$
$$= \frac{3}{4}p,$$

ou $$AR = \left(AN - \frac{3}{4}p\right).$$

Então $$\left(AN - \frac{3}{4}p\right)^2 : AN^2 = AR^2 : AN^2,$$

e, portanto, a razão da gravidade específica do sólido para a do fluido é, pelo enunciado, não menos que a razão $AR^2 : AN^2$.

Mas, pela Prop. 1, a razão anterior é igual à razão da porção imersa para todo o sólido, isto é, [é igual] à razão $PV^2 : AN^2$ [*Sobre Conóides e Esferóides*, Prop. 24].

Assim $$PV^2 : AN^2 \nless AR^2 : AN^2 \ ,$$

ou $$PV \nless AR \ .$$

Segue que

$$PF\left(= \frac{2}{3}PV\right) \nless \frac{2}{3}AR$$

$$\nless AO \, .$$

Se, portanto, *OK* for traçado a partir de *O* perpendicularmente em relação a *AO*, ele encontrará *PF* entre *P* e *F*.

Também, se *CK* for unido, o triângulo *KCO* será igual e similar ao triângulo formado pela normal, pela subnormal e pela ordenada em *P* (uma vez que $CO = \frac{1}{2}p$ ou a subnormal, e *KO* é igual à ordenada).

Logo, *CK* é paralelo à normal em *P* e, portanto, perpendicular à tangente em *P* e [perpendicular] à superfície do fluido.

Portanto, se forem traçados paralelos a *CK* através de *F* e de *H*, eles serão perpendiculares à superfície do fluido, e a força agindo na porção submersa do sólido atuará para cima, ao longo do primeiro, enquanto o peso da outra porção atuará para baixo ao longo do segundo.

Portanto o sólido não permanecerá em sua posição, mas irá girar até que *AN* assuma uma posição vertical.

[Usando a mesma notação de antes (nota seguindo a Prop. 2), temos

$$x' - x = \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}(h-k)\right\},$$

e o valor *mínimo* da expressão dentro das chaves, para diferentes valores de θ, é

$$\frac{p}{2} - \frac{2}{3}(h-k),$$

correspondendo à posição na qual *AM* é vertical, ou $\theta = \frac{\pi}{2}$. Portanto, somente haverá equilíbrio estável nesta posição, se

$$k \nless \left(h - \frac{3}{4}p\right),$$

ou, se *s* for a razão da gravidade específica do sólido para a do fluido (= k^2/h^2 neste caso),

$$s \nless \left(h - \frac{3}{4}p\right)^2 \Big/ h^2 \text{ .]}$$

Proposição 5

Dado um segmento reto de um parabolóide de revolução tal que seu eixo AN é maior que $\frac{3}{4}p$ *(onde p é o parâmetro), e sua gravidade específica é menor que a de um fluido, mas em uma razão para ela não maior do que a razão* $\left\{AN^2 - \left(AN - \frac{3}{4}p\right)^2\right\} : AN^2$, *se o segmento for colocado no fluido com seu eixo inclinado de qualquer ângulo em relação à vertical, mas de forma que sua base esteja completamente submersa, ele não permanecerá nesta posição, mas retornará à posição na qual AN é vertical*

Seja um plano traçado por *AN*, como colocado, perpendicular à superfície do fluido e cortando o segmento do parabolóide na parábola *BAB'*, a base do segmento em *BB'*, e o plano da superfície do fluido na corda *QQ'* da parábola.

Trace a tangente *PT* paralela a *QQ'* e o diâmetro *PV*, dividindo ao meio *QQ'*, será conseqüentemente o eixo da porção do parabolóide acima da superfície do fluido.

Seja *F* o centro de gravidade da porção acima da superfície, *C* [o centro de gravidade] de todo o sólido, e prolongue *FC* até *H*, o centro de gravidade da porção imersa.

Como na última proposição, $AC > \frac{p}{2}$, e medimos CO ao longo de CA igual a $\frac{p}{2}$, e OR ao longo de OC igual a $\frac{1}{2}AO$

Então $AN = \frac{3}{2}AC$ e $AR = \frac{3}{2}AO$;

e derivamos, como antes,

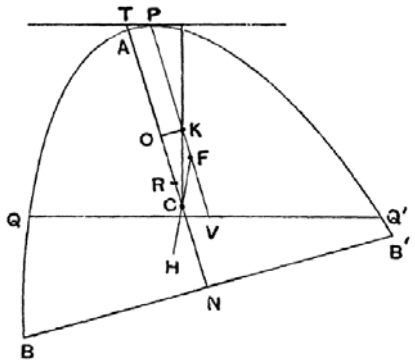
$$AR = \left(AN - \frac{3}{4}p \right).$$

Agora, por hipótese,

(gravidade específica do sólido) : (gravidade específica do fluido)

$$\ngtr \left\{ AN^2 - \left(AN - \frac{3}{4}p \right)^2 \right\} : AN^2$$

$$\ngtr \left(AN^2 - AR^2 \right) : AN^2 .$$



Portanto

(porção submersa) : (todo o sólido) $\ngtr \left(AN^2 - AR^2 \right) : AN^2$,

e (todo o sólido) : (porção acima da superfície) $\ngtr AN^2 : AR^2$.

Assim $AN^2 : PV^2 \ngtr AN^2 : AR^2$,

do que segue que $PV \nless AR$,

e $PF \nless AR$

$\nless AO$.

Portanto, se for traçada uma perpendicular até *AC* a partir de *O*, ela encontrará *PF* em alguma ponto *K* entre *P* e *F*.

E, uma vez que $CO = \frac{1}{2}p$, *CK* será perpendicular a *PT*, como na última proposição.

Agora a força atuando na porção submersa do sólido atuará para cima através de *H*, e o peso da outra porção atuará para baixo através de *F*, em direções paralelas, em ambos os casos, a *CK*; de onde segue a proposição.

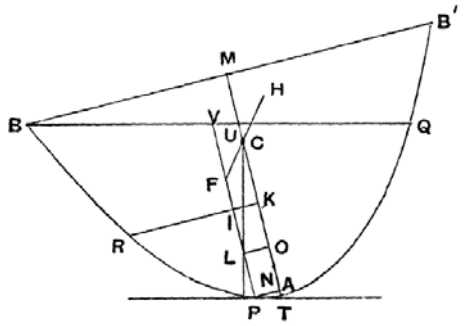
Proposição 6

Se um segmento reto de um parabolóide mais leve que um fluido for tal que seu eixo AM seja maior que $\frac{3}{4}p$*, mas* $AM : \frac{1}{2}p < 15:4$*, e se o segmento for colocado no fluido com seu eixo tão inclinado em relação à vertical que sua base toque o fluido, ele nunca permanecerá em uma posição tal que a base toque a superfície somente em um ponto.*

Suponha que o segmento do parabolóide seja colocado na posição descrita, e deixe o plano através do eixo *AM* perpendicular à superfície do fluido interseccionar o segmento do parabolóide no segmento parabólico *BAB'* e o plano da superfície do fluido em *BQ*.

Tome *C* em *AM* tal que *AC* = *2CM* (ou tal que *C* seja o centro de gravidade do segmento do parabolóide), e meça *CK* ao longo de *CA* tal que

$$AM : CK = 15 : 4.$$



Então $AM : CK > AM : \frac{1}{2}p$, por hipótese; portanto, $CK < \frac{1}{2}p$.

Meça *CO* ao longo de *CA* igual a $\frac{1}{2}p$. Também trace *KR* perpendicular a *AC* encontrando a parábola em *R*.

Trace a tangente *PT* paralela a *BQ*, e através de *P* trace o diâmetro *PV* dividindo ao meio *BQ* em *V* e encontrando *KR* em *I*.

Então $$PV : PI \geq KM : AK ,$$

"o que já está provado".[4]

E $$CK = \frac{4}{15} AM = \frac{2}{5} AC ;$$

de onde vem que $$AK = AC - CK = \frac{3}{5} AC = \frac{2}{5} AM .$$

Então $$KM = \frac{3}{5} AM .$$

Portanto $$KM = \frac{3}{2} AK .$$

Segue que $$PV \geq \frac{3}{2} PI ,$$

de forma que $$PI \leq 2IV .$$

---

[4] [N. H.] Não temos nenhuma pista sobre o trabalho no qual a prova desta proposição estava contida. A prova a seguir é mais curta que a de Robertson (no Apêndice da edição de Torelli).

Deixe *BQ* encontrar *AM* em *U*, e faça *PN* ser a ordenada a partir de *P* até *AM*.

Temos que provar que $PV.AK \geq PI.KM$, ou em outras palavras que

$(PV.AK - PI.KM)$ é positivo ou zero.

Agora $$PV.AK - PI.KM = AK.PV - (AK - AN)(AM - AK)$$

$$= AK^2 - AK(AM + AN - PV) + AM.AN$$

$$= AK^2 - AK.UM + AM.AN$$

(uma vez que *AN* = *AT*).

Agora $$UM : BM = NT : PN ,$$

Portanto $$UM^2 : p.AM = 4AN^2 : p.AN ,$$

de onde vem que $$UM^2 = 4AM.AN ,$$

ou $$AM.AN = \frac{UM^2}{4} .$$

Portanto $$PV.AK - PI.KM = AK^2 - AK.UM + \frac{UM^2}{4} = \left(AK - \frac{UM}{2} \right)^2 ,$$

e, conseqüentemente, $(PV.AK - PI.KM)$ não pode ser negativo.

Seja F o centro de gravidade da porção imersa do parabolóide, tal que $PF = 2FV$. Prolongue FC até H, o centro de gravidade da porção acima da superfície.

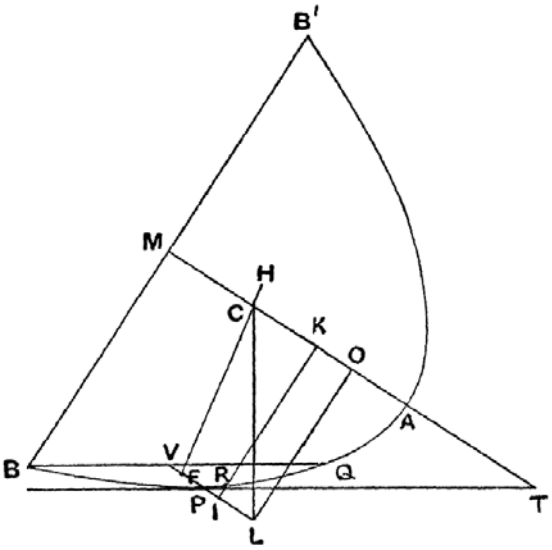
Trace OL perpendicular a PV.

Então, uma vez que $CO = \frac{1}{2}p$, CL precisa ser perpendicular a PT e, portanto, [perpendicular] à superfície do fluido.

E as forças atuando na porção imersa do parabolóide e a porção acima da superfície agem, respectivamente, para cima e para baixo ao longo de linhas que passam por F e H e são paralelas a CL.

Portanto, o parabolóide não pode permanecer na posição na qual B apenas toca a superfície, mas precisa girar na direção na qual o ângulo PTM aumenta.

A prova é a mesma no caso onde o ponto I não está sobre VP, mas sim sobre o prolongamento de VP, como na segunda figura[5].



[Com a notação usada ao final da Proposição 2, se a base BB' tocar a superfície do fluido em B, temos

$$BM = BV\, sen\theta + PN,$$

e, pela propriedade da parábola,

$$\begin{aligned} BV^2 &= (p + 4AN)PV \\ &= pk(1 + \cot^2\theta). \end{aligned}$$

[5] [N. H.] É curioso que as figuras dadas por Torelli, Nizze e Heiberg são todas incorretas, uma vez que todas elas fazem o ponto o qual chamei de I situar-se sobre BQ, ao invés do prolongamento de VP.

Portanto, $$\sqrt{ph} = \sqrt{pk} + \frac{p}{2}\cot\theta .$$

Para obter o resultado da proposição, temos que eliminar *k* entre esta equação e

$$x' - x = \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}(h-k)\right\}.$$

Temos, da primeira equação,

$$k = h - \sqrt{ph}\cot\theta + \frac{p}{4}\cot^2\theta ,$$

ou $$h - k = \sqrt{ph}\cot\theta - \frac{p}{4}\cot^2\theta .$$

Portanto,

$$x' - x = \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{ph}\cot\theta - \frac{p}{4}\cot^2\theta\right)\right\}$$

$$= \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\frac{5}{3}\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}\sqrt{ph}\cot\theta\right\}.$$

Então, se o sólido não pode nunca permanecer na posição descrita, mas precisa girar na direção na qual o ângulo *PTM* aumenta, a expressão dentro das chaves precisa ser positiva seja qual for o valor de θ.

Portanto, $$\left(\frac{2}{3}\right)^2 ph < \frac{5}{6}p^2 ,$$

ou $$h < \frac{15}{8}p .]$$

Proposição 7

Dado um segmento reto de um parabolóide de revolução mais leve que um fluido e tal que seu eixo AM é maior que $\frac{3}{4}p$, *mas* $AM : \frac{1}{2}p < 15:4$, *se o segmento for colocado no fluido de forma que sua base esteja inteiramente submersa, ele nunca irá permanecer em uma posição em que a base toca a superfície do fluido somente em um ponto.*

Suponha o sólido colocado de forma que somente um ponto (*B*) da base toca a superfície do fluido. Deixe o plano através de *B* e o eixo *AM* cortar o sólido no segmento parabólico *BAB'* e o plano da superfície do fluido [cortar o sólido] na corda *BQ* da parábola.

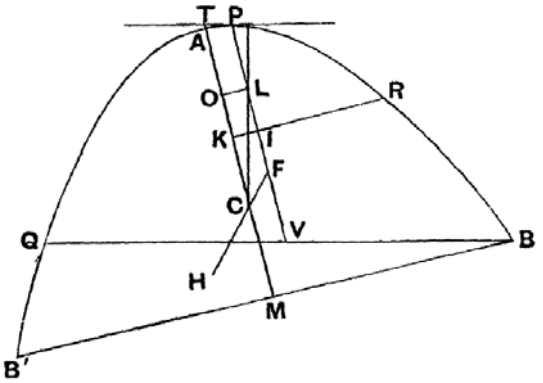
Seja *C* o centro de gravidade do segmento, de forma que *AC* = 2*CM*; e meça *CK* ao longo de *CA*, tal que

$$AM : CK = 15 : 4 .$$

Segue que $$CK < \frac{1}{2} p \ .$$

Meça *CO* ao longo de *CA* igual a $\frac{1}{2} p$. Trace *KR* perpendicular a *AM* encontrando a parábola em *R*.

Seja *PT*, tocando (a parábola) em *P*, a tangente à parábola que é paralela a *BQ*, e seja *PV* o diâmetro dividindo ao meio *BQ*, isto é, o eixo da porção do parabolóide acima da superfície.



Então, como na proposição anterior, provamos que

$$PV \geq \frac{3}{2} PI \ ,$$

e $$PI \leq 2IV \ .$$

Seja *F* o centro de gravidade da porção do sólido acima da superfície; una *FC* e o prolongue até *H*, o centro de gravidade da porção submersa.

Trace *OL* perpendicular a *PV*; e, como antes, uma vez que $CO = \frac{1}{2} p$, *CL* é perpendicular à tangente *PT*. E as linhas através de *H* e *F* paralelas a *CL* são perpendiculares à superfície do fluido; portanto, a proposição é estabelecida como antes.

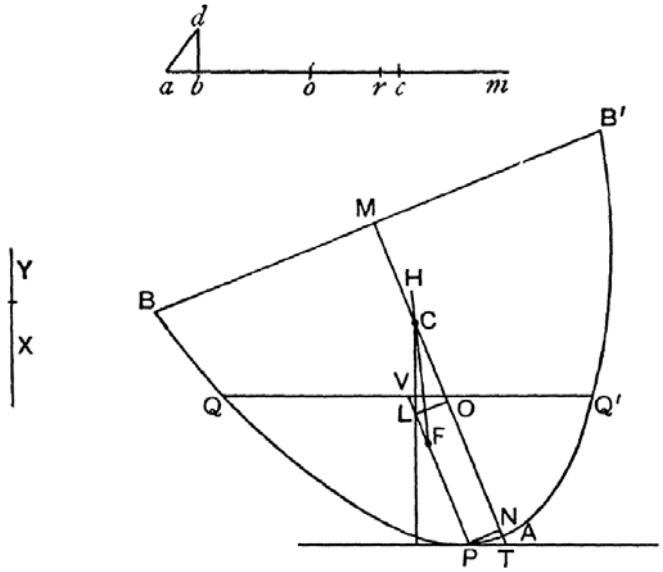
A prova é a mesma se o ponto *I* não está sobre *VP*, mas sobre o prolongamento de *VP*.

Proposição 8

Dado um sólido na forma de um segmento reto de um parabolóide de revolução, cujo eixo AM é maior que $\frac{3}{4} p$, *mas tal que* $AM : \frac{1}{2} p < 15 : 4$, *e cuja gravidade específica está*

para a de um fluido em uma razão menor que $\left(AM - \frac{3}{4}p\right)^2 : AM^2$*, então, se o sólido for colocado no fluido de forma que sua base não toque o fluido e seu eixo esteja inclinado de um ângulo com a vertical, o sólido não retornará à posição na qual seu eixo é vertical e não permanecerá em qualquer posição exceto aquela na qual seu eixo forma com a superfície do fluido um certo ângulo a ser descrito*

Seja *am* tomado igual ao eixo *AM* e seja *c* um ponto sobre *am* tal que *ac* = 2*cm*. Meça *co* ao longo de *ca* igual a $\frac{1}{2}p$ e *or* ao longo de *oc* igual a $\frac{1}{2}ao$.



Seja *X* + *Y* uma linha reta tal que

(gravidade específica do sólido) : (gravidade específica do fluido) = $(X + Y)^2 : am^2$ .. (α), e suponha que *X* = 2*Y*.

Agora
$$ar = \frac{3}{2}ao = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}am - \frac{1}{2}p\right)$$
$$= am - \frac{3}{4}p$$
$$= AM - \frac{3}{4}p\,.$$

Portanto, por hipótese,
$$(X + Y)^2 : am^2 < ar^2 : am^2\,,$$
de onde vem que $(X + Y) < ar$, e, portanto, $X < ao$.

Meça *ob* ao longo de *oa* igual a *X*, e trace *bd* perpendicular a *ab* e de comprimento tal que

$$bd^2 = \frac{1}{2} co.ab \text{ ..... } (\beta)$$

Una *ad*.

Agora seja o sólido colocado no fluido com seu eixo *AM* inclinado de um ângulo com a vertical. Através de *AM* trace um plano perpendicular à superfície do fluido, e faça este plano cortar o parabolóide na parábola *BAB'* e o plano da superfície do fluido na corda *QQ'* da parábola.

Trace a tangente *PT* paralela a *QQ'*, tocando em *P*, e seja *PV* o diâmetro dividindo ao meio *QQ'* em *V* (ou o eixo da porção imersa do sólido), e seja *PN* a ordenada a partir de *P*.

Meça *AO* ao longo de *AM* igual a *ao*, e meça *OC* ao longo de *OM* igual a *oc*, e trace *OL* perpendicular a *PV*.

I. Suponha o ângulo *OTP* maior que o ângulo *dab*.

Deste modo $PN^2 : NT^2 > db^2 : ba^2$.

Mas $PN^2 : NT^2 = p : 4AN$

$= co : NT$,

e $db^2 : ba^2 = \frac{1}{2} co : ab$, por ($\beta$).

Portanto, $NT < 2ab$,

ou $AN < ab$,

de onde vem que $NO > bo$ (uma vez que *ao* =*AO*)

$> X$.

Agora $(X+Y)^2 : am^2 = (\text{gravidade específica do sólido}) : (\text{gravidade específica do fluido})$

$= (\text{porção imersa}) : (\text{restante do sólido})$

$= PV^2 : AM^2$,

de forma que $X + Y = PV$.

Mas $PL(= NO) > X$

$> \frac{2}{3}(X+Y)$, uma vez que $X = 2Y$,

$> \frac{2}{3} PV$,

ou $PV < \frac{3}{2} PL$,

e, portanto, $PL > 2LV$.

Tome um ponto F sobre PV de forma que $PF = 2FV$, isto é, de forma que F seja o centro de gravidade da porção imersa do sólido.

Também $AC = ac = \frac{2}{3}am = \frac{2}{3}AM$ e, portanto, C é o centro de gravidade de todo o sólido.

Una FC e o prolongue até H, o centro de gravidade da porção do sólido sobre a superfície.

Agora, uma vez que $CO = \frac{1}{2}p$, CL é perpendicular à superfície do fluido; portanto, assim também são [perpendiculares à superfície] as paralelas a CL através de F e H. Mas a força na porção imersa age para cima através de F e aquela [força] sobre o resto do sólido [age] para baixo através de H.

Portanto, o sólido não ficará em repouso, mas vai girar na direção em que o ângulo MTP diminui.

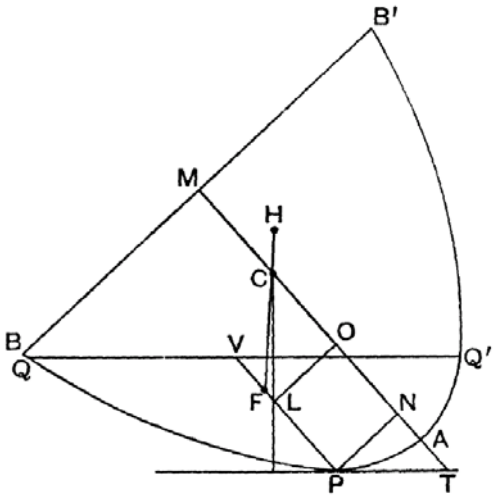
II. Suponha o ângulo OTP menor que o ângulo dab. Neste caso, teremos, ao invés dos resultados acima, o seguinte,

$$AN > ab,$$

$$NO < X.$$

Também $$PV > \frac{3}{2}PL,$$

e, portanto, $$PL < 2LV.$$



Faça PF igual a $2FV$, de forma que F seja o centro de gravidade da porção imersa.

E, procedendo como antes, provamos neste caso que o sólido girará na direção em que o ângulo MTP *aumenta*.

III. Quando o ângulo *MTP* é igual ao ângulo *dab*, igualdades substituem as desigualdades nos resultados obtidos, e o próprio *L* é o centro de gravidade da porção imersa. Assim todas as forças agem em uma linha reta, a perpendicular *CL*; portanto, há equilíbrio e o sólido permanecerá em repouso na posição descrita.

[Com a notação usada antes

$$x' - x = \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}(h-k)\right\},$$

e a posição de equilíbrio é obtida igualando a zero a expressão entre chaves. Temos então

$$\frac{p}{4}\cot^2\theta = \frac{2}{3}(h-k) - \frac{p}{2}.$$

É fácil verificar que o ângulo θ satisfazendo esta equação é idêntico ao ângulo determinado por Arquimedes. Pois, na expressão acima,

$$\frac{3X}{2} = PV = k,$$

de onde vem que $$ab = \frac{2}{3}h - \frac{p}{2} - \frac{2}{3}k = \frac{2}{3}(h-k) - \frac{p}{2}.$$

Também $$bd^2 = \frac{p}{4}.ab.$$

Segue que

$$\cot^2 dab = \frac{ab^2}{bd^2} = \frac{4}{p}\left\{\frac{2}{3}(h-k) - \frac{p}{2}\right\}.]$$

Proposição 9

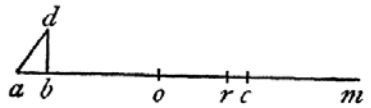
Dado um sólido na forma de um segmento reto de um parabolóide de revolução cujo eixo AM é maior que $\frac{3}{4}p$, *mas tal que* $AM : \frac{1}{2}p < 15:4$, *e cuja gravidade específica está para a de um fluido em uma razão maior que* $\left\{AM^2 - \left(AM - \frac{3}{4}p\right)^2\right\} : AM^2$, *então, se o sólido for colocado no fluido com seu eixo inclinado de um ângulo com a vertical, mas de forma que sua base esteja inteiramente abaixo da superfície, o sólido não retornará à posição na qual seu eixo esteja vertical e não permanecerá em qualquer posição exceto aquela na qual seu eixo faz com a superfície do fluido um ângulo igual àquele descrito na proposição anterior.*

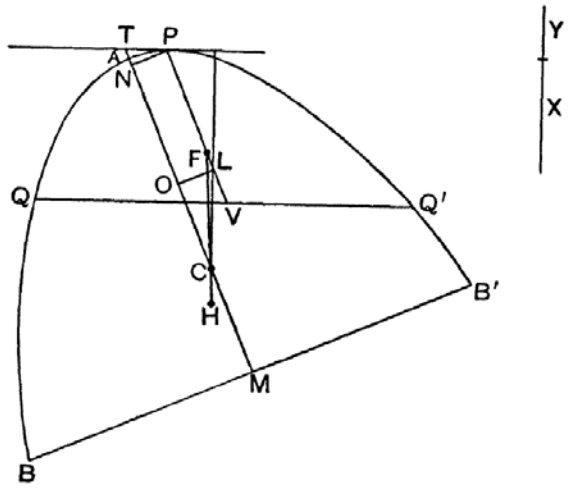
Tome *am* igual a *AM* e tome *c* sobre *am* tal que $ac = 2cm$. Meça *co* ao longo de *ca* igual a $\frac{1}{2}p$, e *ar* ao longo de *ac* tal que $ar = \frac{3}{2}ao$.

Seja $X + Y$ uma linha tal que

$$(\text{gravidade específica do sólido}):(\text{gravidade específica do fluido}) = \left\{am^2 - (X+Y)^2\right\}:am^2,$$

e suponha $X = 2Y$.





Agora
$$ar = \frac{3}{2}ao$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}am - \frac{1}{2}p\right)$$
$$= AM - \frac{3}{4}p.$$

Portanto, por hipótese,

$$am^2 - ar^2 : am^2 < \left\{am^2 - (X+Y)^2\right\}:am^2,$$

de onde vem que $X + Y < ar$,

e, portanto, $X < ao$.

Faça *ob* (medido ao longo de *oa*) igual a *X*, e trace *bd* perpendicular a *ba* e com um comprimento tal que

$$bd^2 = \frac{1}{2}co.\,ab\ .$$

Una *ad*.

Agora suponha o sólido colocado como na figura [acima] com seu eixo *AM* inclinado em relação à vertical. Faça o plano através de *AM*, perpendicular à superfície do fluido, cortar o sólido na parábola *BAB'* e a superfície do fluido em *QQ'*.

Seja *PT* a tangente paralela a *QQ'*, *PV* o diâmetro dividindo ao meio *QQ'* (ou o eixo da porção do parabolóide acima da superfície), *PN* a ordenada a partir de *P*.

I. Suponha o ângulo *MTP* maior que o ângulo *dab*. Seja *AM* cortado como antes em *C* e *O* tal que $AC = 2CM$ e $OC = \frac{1}{2}p$, e da mesma forma *AM* e *am* são igualmente divididos. Trace *OL* perpendicular a *PV*.

Então, temos, como na proposição anterior,

$$PN^2 : NT^2 > db^2 : ba^2,$$

de onde vem que

$$co : NT > \frac{1}{2} co : ab,$$

e, portanto,

$$AN < ab.$$

Segue que

$$NO > bo$$
$$> X.$$

Novamente, uma vez que a gravidade específica do sólido está para a do fluido assim como a porção imersa do sólido está para todo [o sólido],

$$AM^2 - (X+Y)^2 : AM^2 = AM^2 - PV^2 : AM^2,$$

ou

$$(X+Y)^2 : AM^2 = PV^2 : AM^2.$$

Isto é,

$$X + Y = PV.$$

E

$$PL(\text{ou } NO) > X$$
$$> \frac{2}{3} PV,$$

de forma que

$$PL > 2LV.$$

Tome *F* sobre *PV* de forma que $PF = 2FV$. Então, *F* é o centro de gravidade da porção do sólido sobre a superfície.

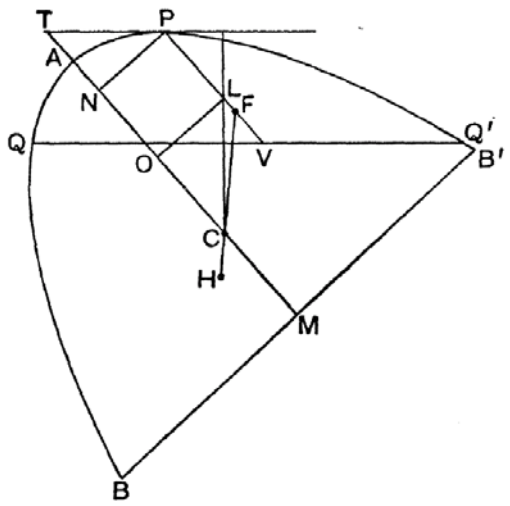
Também *C* é o centro de gravidade de todo o sólido. Ligue *FC* e o prolongue até *H*, o centro de gravidade da porção imersa.

Então, uma vez que $CO = \frac{1}{2}p$, *CL* é perpendicular a *PT* e à superfície do fluido; e a força atuando sobre a porção imersa do sólido age para cima ao longo da paralela a *CL* através

de *H*, enquanto o peso da parte restante do sólido age para baixo ao longo da paralela a *CL* através de *F*.

Portanto, o sólido não ficará em repouso, mas vai girar na direção em que o ângulo *MTP* diminui.

II. Exatamente com na proposição anterior, provamos que, se o ângulo *MTP* for menor que o ângulo *dab*, o sólido não permanecerá em sua posição, mas girará na direção em que o ângulo *MTP* aumenta.



III. Se o ângulo *MTP* é igual ao ângulo *dab*, o sólido permanecerá em repouso nesta posição, porque *L* e *F* coincidirão, e todas as forças atuarão ao longo da linha *CL*.

Proposição 10

Dado um sólido na forma de um segmento reto de um parabolóide de revolução no qual o eixo AM tem um comprimento tal que $AM : \frac{1}{2}p > 15:4$, *e supondo o sólido colocado em um fluido com gravidade específica maior [que a sua] de forma que sua base esteja inteiramente sobre a superfície do fluido, investigar as posições de repouso.*

(**Preliminar**.)

Suponha que o segmento de um parabolóide seja cortado, por um plano através de seu eixo *AM*, no segmento parabólico BAB_1 do qual BB_1 é a base.

Divida *AM* em *C* de forma que $AC = 2CM$, e meça *CK* ao longo de *CA* tal que

$$AM : CK = 15:4 \text{ ..... } (\alpha),$$

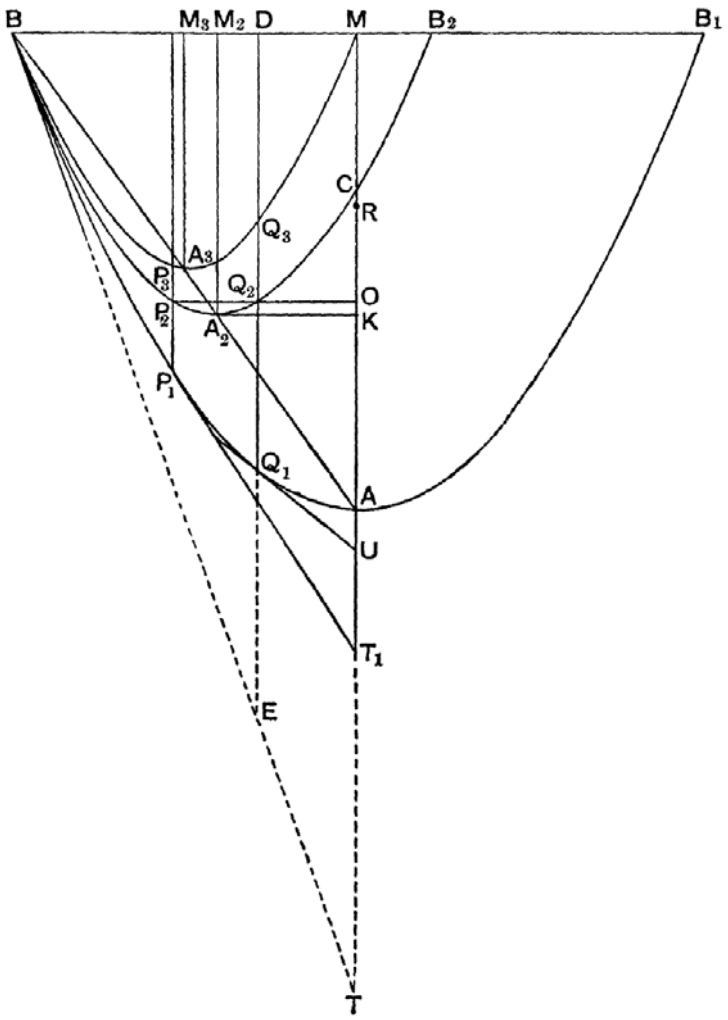
de onde vem, por hipótese, que $CK > \frac{1}{2}p$.

Suponha *CO*, medido ao longo de *CA*, igual a $\frac{1}{2}p$ e tome um ponto *R* sobre *AM* tal que $MR = \frac{3}{2}CO$.

Portanto,

$$\begin{aligned} AR &= AM - MR \\ &= \frac{3}{2}(AC - CO) \\ &= \frac{3}{2}AO. \end{aligned}$$

Una *BA*, trace KA_2 perpendicular a *AM* encontrando *BA* em A_2, divida ao meio *BA* em A_3 e trace A_2M_2 e A_3M_3 paralelos a *AM*, encontrando *BM* em M_2 e M_3, respectivamente.



Tomando A_2M_2 e A_3M_3 como eixos, descreva segmentos parabólicos similares ao segmento BAB_1. (Segue, por semelhança de triângulos, que BM será a base do segmento cujo eixo é A_3M_3 e BB_2 [será] a base daquele [segmento] cujo eixo é A_2M_2, onde $BB_2 = 2BM_2$.)

A parábola BA_2B_2 passará então através de C.

[Pois

$$\begin{aligned} BM_2 : M_2M &= BM_2 : A_2K \\ &= KM : AK \\ &= CM + CK : AC - CK \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15}\right)AM : \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\right)AM \\ &= 9 : 6 \quad \text{...} (\beta) \\ &= MA : AC \ . \end{aligned}$$

Então vê-se que [o ponto] C está sobre a parábola BA_2B_2 pela inversa da Prop. 4 da *Quadratura da Parábola*.]

Também, se uma perpendicular a AM for traçada a partir de O, ela encontrará a parábola BA_2B_2 em dois pontos, em Q_2 e P_2. Trace $Q_1Q_2Q_3D$ através de Q_2 paralelo a AM encontrando as parábolas BAB_1 e BA_3M, respectivamente, em Q_1, e Q_3, e BM em D; e seja $P_1P_2P_3$ a paralela correspondendo a AM [passando] através de P_2. Faça as tangentes à parábola externa em P_1 e Q_1 encontrarem o prolongamento de MA em T_1 e U, respectivamente.

Então, uma vez que os três segmentos parabólicos são similares e estão similarmente situados, com suas bases na mesma linha reta e tendo uma extremidade comum e, uma vez que $Q_1Q_2Q_3D$ é um diâmetro comum aos três segmentos, segue que:

$$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = (B_2B_1 : B_1B).(BM : MB_2)\text{[6]}.$$

---

[6] [N. H.] Este resultado é assumido sem prova, sem dúvida como sendo uma dedução fácil a partir da Prop. 5 da *Quadratura da Parábola*. Ele pode ser estabelecido como segue.

Primeiro, uma vez que AA_2A_3B é uma linha reta e $AN = AT$ em notação ordinária (onde PT é a tangente em P e PN [é] a ordenada), segue, por semelhança de triângulos, que a tangente em B à parábola externa é a tangente a cada uma das outras duas parábolas no mesmo ponto B.

Agora, pela proposição citada, se o prolongamento de $DQ_3Q_2Q_1$ encontra a tangente BT em E,

$$EQ_3 : Q_3D = BD : DM \ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{de onde vem que } EQ_3 : ED = BD : BM. \\ \text{Similarmente } EQ_2 : ED = BD : BB_2, \\ \text{e } EQ_1 : ED = BD : BB_1. \end{array}\right\}$$

As duas primeiras proposições são equivalentes a

Agora $B_2B_1 : B_1B = MM_2 : BM$ (dividindo por 2)

$= 2:5,$ através de (β) acima.

E $BM : MB_2 = BM : (2BM_2 - BM)$

$= 5:(6-5),$ através de (β),

$= 5:1.$

Segue que

$$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = 2:1,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ou } Q_1Q_2 = 2Q_2Q_3.\\ \text{Similarmente, } P_1P_2 = 2P_2P_3.\end{array}\right\}$$

Também, uma vez que $MR = \frac{3}{2}CO = \frac{3}{4}p,$

$$AR = AM - MR$$

$$= AM - \frac{3}{4}p.$$

(**Enunciado.**)

Se o segmento do parabolóide for colocado no fluido com sua base inteiramente acima da superfície, então

(I.) *se*

$$(\textit{gravidade específica do sólido}):(\textit{gravidade específica do fluido}) \nless AR^2 : AM^2$$

$$[\nless (AM - 3p/4)^2 : AM^2],$$

o sólido ficará em repouso na posição na qual seu eixo AM é vertical;

(II.) *se*

$$(\textit{gravidade específica do sólido}):(\textit{gravidade específica do fluido}) < AR^2 : AM^2$$

$$\textit{mas} > Q_1Q_3{}^2 : AM^2,$$

$$EQ_3 : ED = BD.BB_2 : BM.BB_2,$$

e $$EQ_2 : ED = BD.BM : BM.BB_2.$$

Por subtração,

$$Q_2Q_3 : ED = BD.MB_2 : BM.BB_2.$$

Similarmente, $$Q_1Q_2 : ED = BD.B_2B_1 : .BB_2.BB_1.$$

Segue que

$$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = (B_2B_1 : B_1B).(BM : MB_2).$$

o sólido não ficará em repouso com sua base tocando a superfície do fluido em apenas um ponto, mas em uma posição tal que sua base não toque a superfície em qualquer ponto e seu eixo faça com a superfície um ângulo maior que U;

(III. *a*) se

$$(gravidade\ específica\ do\ sólido):(gravidade\ específica\ do\ fluido) = Q_1Q_3{}^2 : AM^2,$$

o sólido ficará em repouso e permanecerá na posição na qual a base toca a superfície do fluido em apenas um ponto e o eixo fará com a superfície um ângulo igual a U;

(III. *b*) *se*

$$(gravidade\ específica\ do\ sólido):(gravidade\ específica\ do\ fluido) = P_1P_3{}^2 : AM^2,$$

o sólido ficará em repouso com sua base tocando a superfície do fluido em apenas um ponto e com seu eixo inclinado em relação à superfície em um ângulo igual a T_1;

(IV.) *se*

$$(gravidade\ específica\ do\ sólido):(gravidade\ específica\ do\ líquido) > P_1P_3{}^2 : AM^2$$

$$mas < Q_1Q_3{}^2 : AM^2,$$

o sólido permanecerá em repouso e ficará em uma posição com sua base mais submersa;

(V.) *se*

$$(gravidade\ específica\ do\ sólido):(gravidade\ específica\ do\ fluido) < P_1P_3{}^2 : AM^2,$$

o sólido permanecerá em repouso em uma posição na qual seu eixo esteja inclinado em relação à superfície do fluido em um ângulo menor que T_1, mas de modo que a base nem mesmo toque a superfície em um ponto.

(**Prova.**)

(I.) Um vez que $AM > \frac{3}{4}p$, e

$$(gravidade\ específica\ do\ sólido):(gravidade\ específica\ do\ fluido) \geq \left(AM - \frac{3}{4}p\right)^2 : AM^2$$

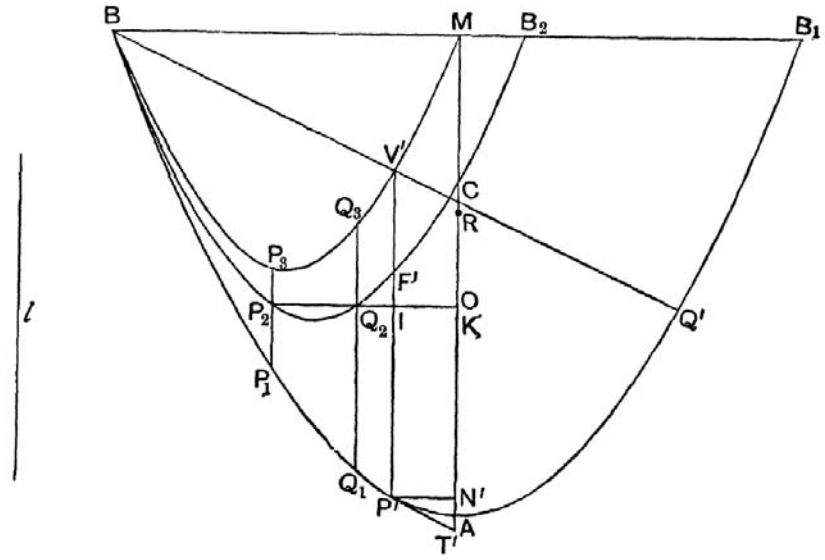
,

segue, pela Prop. 4, que o sólido estará em equilíbrio estável com seu eixo na vertical.

(II.) Neste caso

$$(\text{gravidade específica do sólido}):(\text{gravidade específica do fluido}) < AR^2 : AM^2$$

$$\text{mas} > Q_1Q_3{}^2 : AM^2 .$$



Suponha a razão entre as gravidades específicas ser igual a

$$l^2 : AM^2 \ ,$$

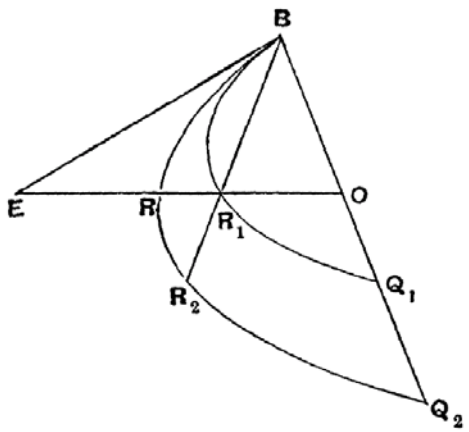
de forma que $l < AR$ mas $> Q_1Q_3$.

Coloque *P'V'* entre as duas parábolas BAB_1 e BP_3Q_3M igual a *l* e paralelo a *AM*[7]; e faça *P'V'* encontrar a parábola intermediária em *F'*.

---

[7] [N. H.] Arquimedes não dá a solução deste problema, mas ela pode ser apresentada como segue.

Sejam BR_1Q_1 e BRQ_2 dois segmentos parabólicos similares e similarmente situados, com suas bases na mesma linha reta e seja *BE* a tangente comum em *B*.



Suponha o problema resolvido, e faça ERR_1O, paralelo aos eixos, encontrar as parábolas em *R* e R_1, e BQ_2 em *O*, fazendo o segmento RR_1 igual a *l*.

Então temos, como usual,

$$ER_1 : EO = BO : BQ_1 ,$$

Então, pela mesma prova como antes, obtemos

$$P'F' = 2F'V'.$$

Faça *P'T'*, a tangente em *P'* à parábola externa, encontrar *MA* em *T'*, e seja *P'N'* a ordenada em *P'*.

Una *BV'* e o prolongue para encontrar a parábola externa em *Q'*. Faça OQ_2P_2 encontrar *P'V'* em *I*.

Agora, uma vez que, em dois segmentos parabólicos similares e similarmente situados, com bases *BM* e BB_1 na mesma linha reta, *BV`* e *BQ'* são traçados fazendo o mesmo ângulo com as bases,

$$BV' : BQ' = BM : BB_1$$ [8]

$$= 1 : 2 \ ,$$

de forma que $$BV' = V'Q'.$$

Suponha o segmento do parabolóide colocado no fluido, como descrito, com seu eixo inclinado de um ângulo em relação à vertical, e com sua base tocando a superfície somente em um ponto *B*. Seja o sólido cortado por um plano [passando] através do [seu] eixo e

---

$$= BO \cdot BQ_2 : BQ_1 \cdot BQ_2 ,$$

e $$ER : EO = BO : BQ_2$$

$$= BO \cdot BQ_1 : BQ_1 \cdot BQ_2 .$$

Por subtração, $$RR_1 : EO = BO.Q_1Q_2 : BQ_1.BQ_2 ,$$

ou $$BO \cdot OE = l \cdot \frac{BQ_1.BQ_2}{Q_1Q_2}$$, o qual é conhecido.

E a razão $BO : OE$ é conhecida. Portanto, BO^2 , ou OE^2, pode ser encontrado e, portanto, *O* [também pode ser encontrado].

[8] [N. H.] Para provar isso, suponha que, na figura da nota anterior, BR_1 seja prolongado para encontrar a parábola externa em R_2.

Temos, como antes,

$$ER_1 : EO = BO : BQ_1 ,$$

$$ER : EO = BO : BQ_2 ,$$

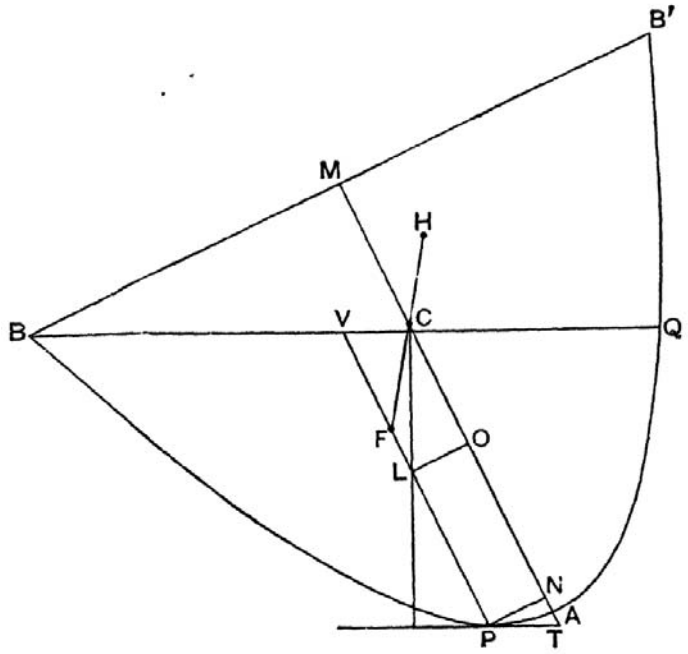
de onde vem que $$ER_1 : ER = BQ_2 : BQ_1 .$$

E, uma vez que R_1 é um ponto interno à parábola externa,

$$ER : ER_1 = BR_1 : BR_2$$, de uma forma semelhante.

Portanto, $$BQ_1 : BQ_2 = BR_1 : BR_2 .$$

perpendicular à superfície do fluido, e faça o plano cortar o sólido no segmento parabólico *BAB'* e [cortar] o plano da superfície do fluido em *BQ*.



Tome os pontos *C* e *O* sobre *AM* como descrito anteriormente. Trace a tangente paralela a *BQ* tocando a parábola em *P* e encontrando *AM* em *T*; e seja *PV* o diâmetro dividindo ao meio *BQ* (isto é, o eixo da porção imersa do sólido).

Então

$$l^2 : AM^2 = (\text{gravidade específica do sólido}) : (\text{gravidade específica do fluido})$$
$$= (\text{porção imersa}) : (\text{todo o sólido})$$
$$= PV^2 : AM^2,$$

de onde vem que $P'V' = l = PV$.

Então os segmentos nas duas figuras, isto é, *BP'Q'* e *BPQ*, são iguais e similares.

Portanto, $\angle PTN = \angle P'T'N'$.

Também $AT = AT',\ AN = AN',\ PN = P'N'$.

Agora, na primeira figura, $P'I < 2IV'$.

Portanto, se *OL* for perpendicular a *PV* na segunda figura,

$$PL < 2LV .$$

Tome *F* sobre *LV* de forma que $PF = 2FV$, isto é, de forma que *F* seja o centro de gravidade da porção imersa do sólido. E seja *C* o centro de gravidade de todo o sólido. Una *FC* e o prolongue até *H*, o centro de gravidade da porção acima da superfície.

Agora, uma vez que $CO = \frac{1}{2}p$, *CL* é perpendicular à tangente em *P* e à superfície do fluido. Portanto, como antes, provamos que o sólido não ficará em repouso com *B* tocando a superfície, mas girará na direção em que o ângulo *PTN* aumenta.

Assim, na posição de repouso, o eixo *AM* precisa fazer com a superfície do fluido um ângulo maior que o ângulo *U* que a tangente em Q_1 faz com *AM*.

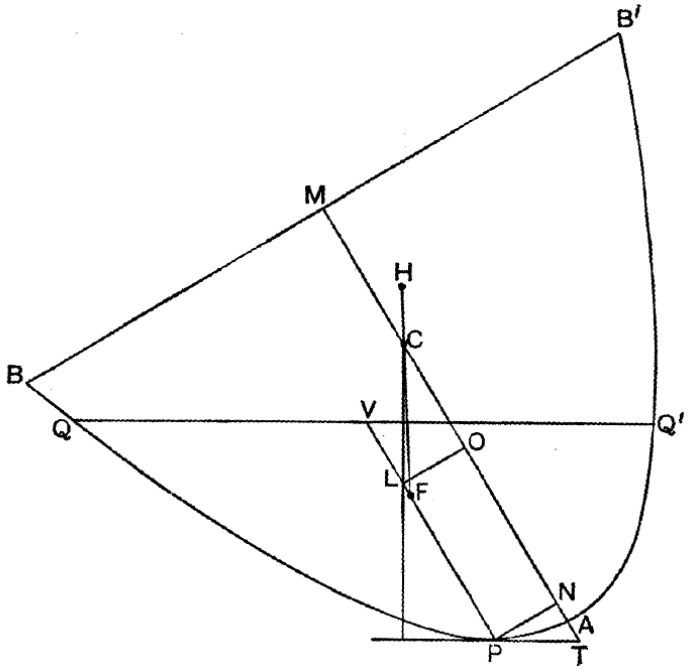
(III. *a*) Neste caso

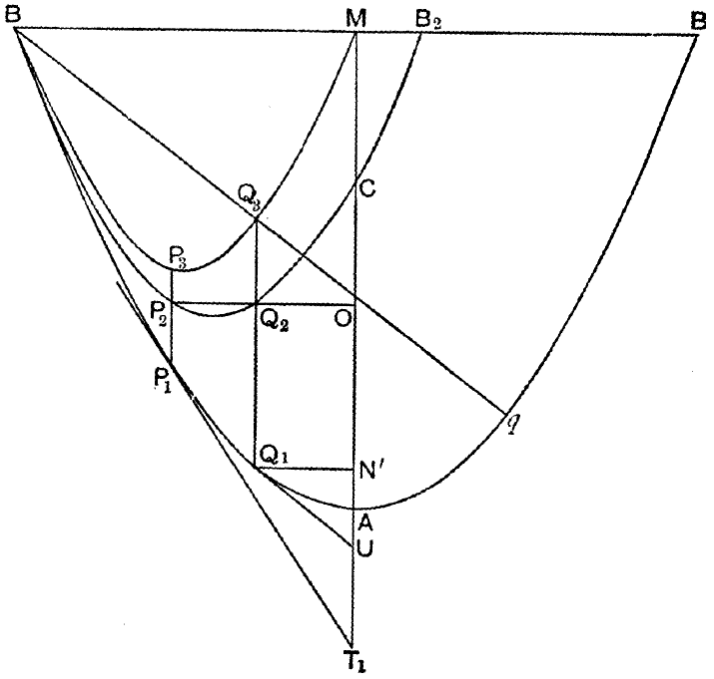
$$(\text{gravidade específica do sólido}):(\text{gravidade específica do fluido}) = Q_1Q_3{}^2 : AM^2.$$

Seja o segmento do parabolóide colocado no fluido de forma que sua base não toque em lugar algum a superfície do fluido, e tal que seu eixo esteja inclinado de um ângulo com a vertical.

Faça o plano através de *AM* perpendicular à superfície do fluido cortar o parabolóide na parábola *BAB'* e [cortar] o plano da superfície do fluido em *QQ'*. Seja *PT* a tangente paralela a *QQ'*, *PV* o diâmetro dividindo ao meio *QQ'*, e *PN* a ordenada em *P*.

Divida *AM* como antes em *C* e *O*.





Na outra figura, seja Q_1N' a ordenada em Q_1. Una BQ_3 e o prolongue para encontrar a parábola externa em q. Então $BQ_3 = Q_3p$, e a tangente Q_1U é paralela a Bq. Agora,

$$Q_1Q_3{}^2 : AM^2 = (\text{gravidade específica do sólido}) : (\text{gravidade específica do fluido})$$
$$= (\text{porção imersa}) : (\text{todo o sólido})$$
$$= PV^2 : AM^2 .$$

Portanto, $Q_1Q_3 = PV$; e os segmentos QPQ' e BQ_1q do parabolóide são iguais em volume. E a base de um passa através de B, enquanto a base do outro passa através de Q, um ponto mais próximo de A do que B está.

Segue que o ângulo entre QQ' e BB' é menor que o ângulo B_1Bq.

Portanto, $\angle U < \angle PTN$,

de onde vem que $AN' > AN$,

e, portanto, $N'O$ (ou Q_1Q_2) $< PL$,

onde OL é perpendicular a PV.

Segue, uma vez que $Q_1Q_2 = 2Q_2Q_3$, que

$$PL > 2LV .$$

Portanto F, o centro de gravidade da porção imersa do sólido, está entre P e L, enquanto, como antes, CL é perpendicular à superfície do fluido.

Prolongando *FC* até *H*, o centro de gravidade da porção do sólido acima da superfície, vemos que o sólido precisa girar na direção em que o ângulo *PTN* diminui, até que um ponto *B* da base toque a superfície do fluido.

Quando este é o caso, teremos um segmento *BPQ* igual e similar ao segmento BQ_1q, o ângulo *PTN* será igual ao ângulo *U*, e *AN* será igual a *AN'*.

Portanto, neste caso, $PL = 2LV$, e *F* coincide com *L*, de forma que *F*, *C* e *H* estão todos em uma linha reta vertical.

Assim, o parabolóide permanecerá na posição na qual um ponto *B* da base toca a superfície do fluido e o eixo faz com a superfície um ângulo igual a *U*.

(III. *b*) No caso onde

$$(\text{gravidade específica do sólido}):(\text{gravidade específica do fluido}) = P_1P_3^{\,2} : AM^2,$$

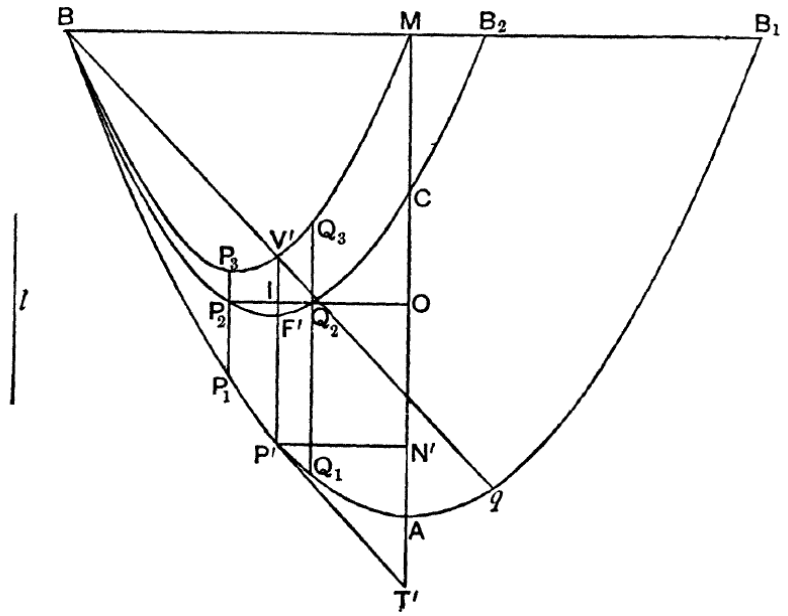
podemos, da mesma forma, provar que, se o sólido for colocado no fluido de forma que seu eixo esteja inclinado em relação à vertical e sua base não toque em nenhum lugar a superfície do fluido, o sólido se deslocará e ficará em repouso na posição na qual somente um ponto da base toca a superfície e o eixo estará inclinado em relação a ela de um ângulo igual a T_1 (na primeira figura da Prop. 10).

(IV.) Neste caso

$$(\text{gravidade específica do sólido}):(\text{gravidade específica do fluido}) > P_1P_3^{\,2} : AM^2$$

$$\text{mas} < Q_1Q_3^{\,2} : AM^2.$$

Suponha que a razão seja igual a $l^2 : AM^2$, de forma que *l* seja maior que P_1P_3, mas menor que Q_1Q_3.

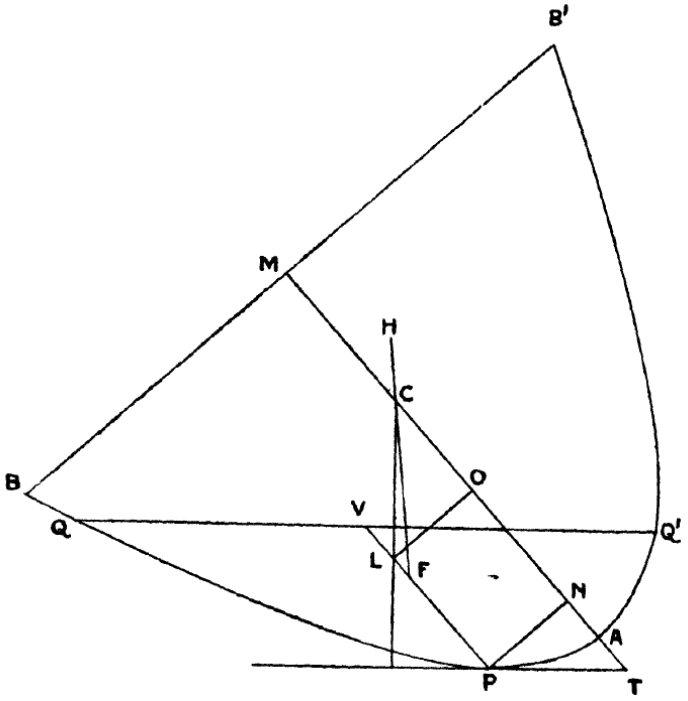


Coloque *P'V'* entre as parábolas BP_1Q_1 e BP_3Q_3 de forma que *P'V'* seja igual a *l* e paralelo a *AM*, e faça *P'V'* encontrar a parábola intermediária em *F'* e OQ_2P_2 em *I*.

Una *BV'* e o prolongue até encontrar a parábola externa em *q*.

Então, como antes, *BV'=V'q*, e assim a tangente *P'T'* em *P'* é paralela a *Bq*. Seja *P'N'* a ordenada de *P'*.

1. Agora seja o segmento colocado no fluido, *primeiro*, com seu eixo tão inclinado em relação à vertical que sua base não toque em nenhum lugar a superfície do fluido.



Faça o plano através de *AM* perpendicular à superfície do fluido cortar o parabolóide na parábola *BAB'* e [cortar] o plano da superfície do fluido em *QQ'*. Seja *PT* a tangente paralela a *QQ'*, [e seja] *PV* o diâmetro dividindo ao meio *QQ'*. Divida *AM* em *C* e *O* como antes, e trace *OL* perpendicular a *PV*.

Então, como antes, temos *PV = l = P'V'*.

Portanto, os segmentos *BP'q* e *QPQ'* do parabolóide são iguais em volume; e segue que o ângulo entre *QQ'* e *BB'* é menor que o ângulo B_1Bq.

Portanto, $\angle P'T'N' < \angle PTN$,

e então $AN' > AN$,

de forma que $NO > N'O$,

isto é, $PL > P'I$

$> P'F'$, *a fortiori.*

Portanto, $PL > 2LV$, de modo que *F*, o centro de gravidade do porção imersa do sólido, está entre *L* e *P*, enquanto *CL* é perpendicular à superfície do fluido.

Se, então, prolongarmos *FC* até *H*, o centro de gravidade da porção do sólido acima da superfície, provamos que o sólido não ficará em repouso, mas girará na direção em que o ângulo *PTN* diminui.

2. A seguir, seja o parabolóide colocado no fluido de forma que sua base toque a superfície do fluido somente em um ponto *B*, e proceda à construção como anteriormente.

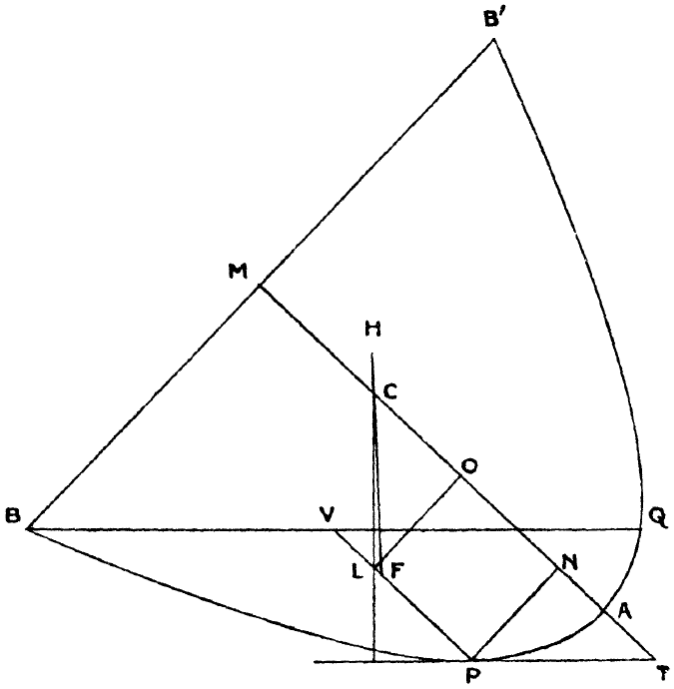
Então $PV = P'V'$ e os segmentos *BPQ* e *BP'q* são iguais e similares, de forma que

$$\angle PTN = \angle P'T'N'.$$

Segue que $AN = AN',\ NO = N'O$,

e, portanto, $P'I = PL$,

de onde vem que $PL > 2LV$.



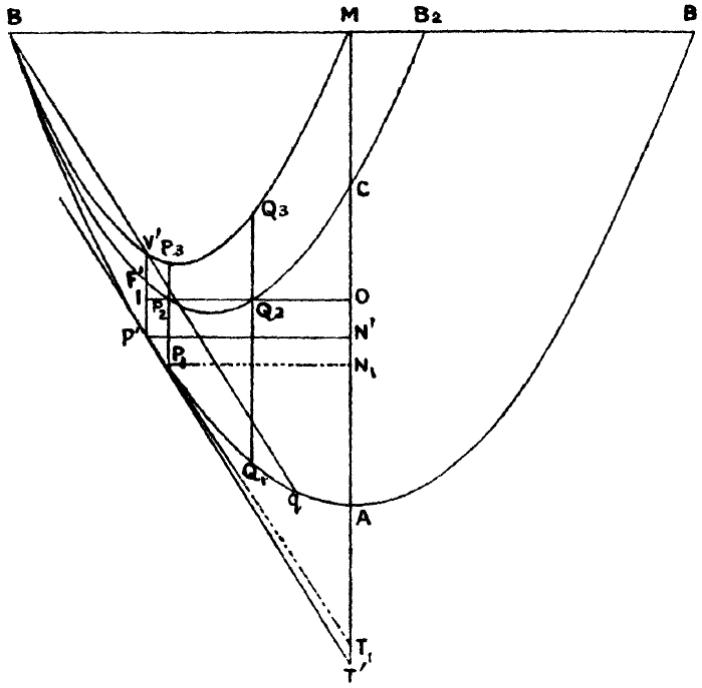
Portanto, *F* novamente se encontra entre *P* e *L*, e, como antes, o parabolóide girará na direção em que o ângulo *PTN* diminui, isto é, de forma que a base será mais submersa.

(V.) Neste caso

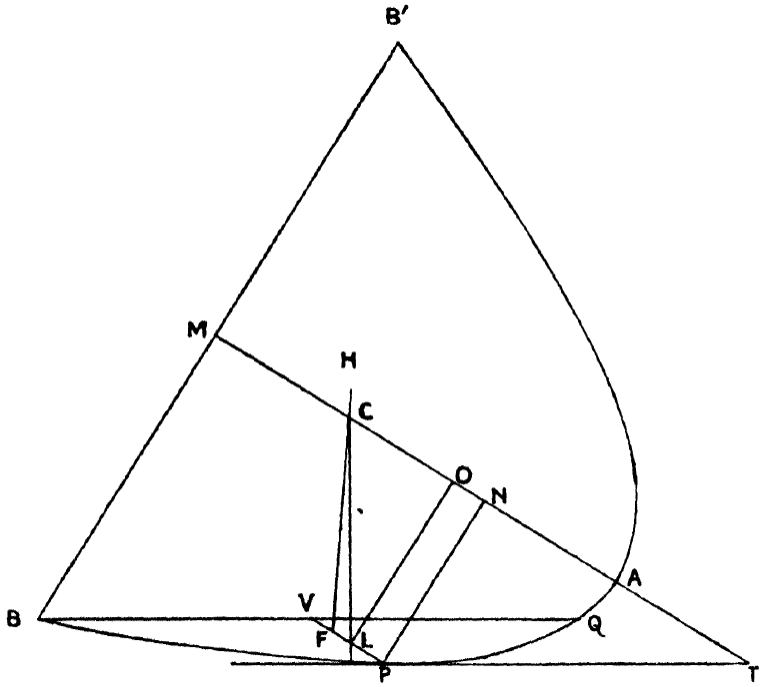
$$(\text{gravidade específica do sólido}) : (\text{gravidade específica do fluido}) < P_1P_3^{\,2} : AM^2.$$

Se então a razão é igual a $l^2 : AM^2$, $l < P_1P_3$. Coloque *P'V'* entre as parábolas BP_1Q_1 e BP_3Q_3 igual em comprimento a *l* e paralelo a *AM*. Faça *P'V'* encontrar a parábola intermediária em *F'* e OP_2 em *I*.

Una *BV'* e o prolongue até encontrar a parábola externa em *q*. Então, como antes, $BV' = V'q$ e a tangente *P'T'* é paralela a *Bq*.



1. Seja o parabolóide colocado no fluido de forma que sua base toque a superfície somente em um ponto.



Faça o plano através de *AM* perpendicular à superfície do fluido cortar o parabolóide na seção parabólica *BAB'* e [cortar] o plano da superfície do fluido em *BQ*.

Fazendo a construção usual, encontramos

$$PV = l = P'V',$$

e os segmentos *BPQ* e BP_1q são iguais e similares.

Portanto, $$\angle PTN = \angle P'T'N',$$

e $$AN = AN',\ N'O = NO.$$

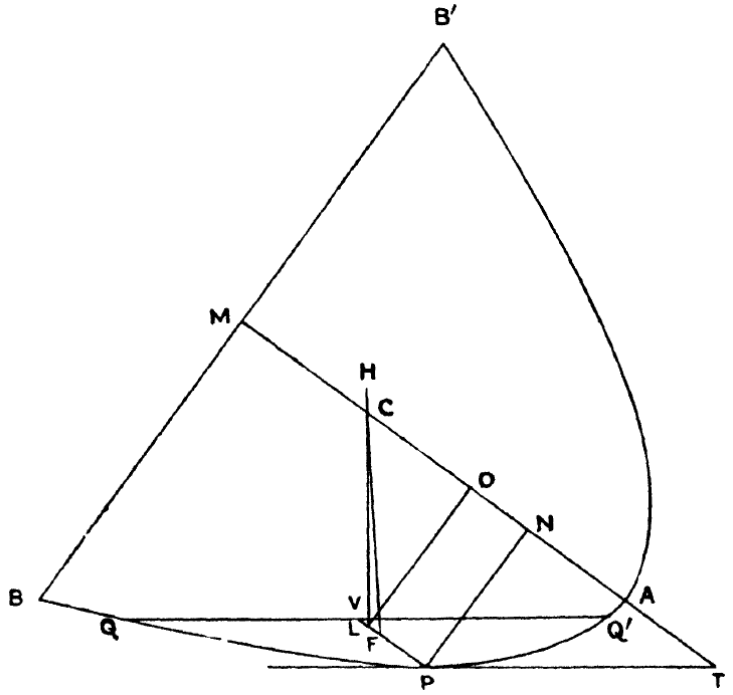
Portanto, $$PL = P'I,$$

de onde segue que $$PL < 2LV.$$

Portanto *F*, o centro de gravidade da porção imersa do sólido, encontra-se entre *L* e *V*, enquanto *CL* é perpendicular à superfície do fluido.

Prolongando *FC* até *H*, o centro de gravidade da porção acima da superfície, provamos, da forma usual, que não haverá repouso, mas o sólido girará na direção em que o ângulo *PTN* aumenta, de forma que a base não tocará a superfície em qualquer lugar.

2. O sólido, entretanto, ficará em repouso em uma posição onde seu eixo faz com a superfície do fluido um ângulo menor que T_1.



Pois seja [o sólido] colocado de forma que o ângulo *PTN* não é menor que T_1.

Então, com a mesma construção de antes, $PV = l = P'V'$.

E, uma vez que $$\angle T \nless \angle T_1,$$

$$AN \ngtr AN_1,$$

e, portanto, $NO \nless N_1O$, onde P_1N_1 é a ordenada de P_1.

Portanto, $PL \nless P_1P_2$.

Mas $P_1P_2 > P'F'$.

Portanto, $PL > \frac{2}{3}PV$,

de forma que *F*, o centro de gravidade da porção imersa do sólido, encontra-se entre *P* e *L*.

Assim, o sólido girará na direção em que o ângulo *PTN* diminui, até que este ângulo fique menor que T_1.

[Como antes, se *x* e *x'* forem as distâncias a partir de *T* das projeções ortogonais de *C* e *F*, respectivamente, sobre *TP*, temos

$$x' - x = \cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}(h-k)\right\} \text{ .....(1)},$$

onde $h = AM$, $k = PV$.

Também, se a base *BB'* toca a superfície do fluido em um ponto *B*, temos ainda, como na nota acompanhando a Prop. 6,

$$\sqrt{ph} = \sqrt{pk} + \frac{p}{2}\cot\theta \text{ .....(2)},$$

e

$$h - k = \sqrt{ph}\cot\theta - \frac{p}{4}\cot^2\theta \text{ .....(3)}.$$

Portanto, para encontrar a relação entre *h* e o ângulo θ no qual o eixo do parabolóide está inclinado em relação à superfície do fluido em uma posição de equilíbrio, com *B* apenas tocando a superfície, eliminamos *k* e igualamos a zero a expressão em (1); então

$$\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta + 2\right) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{ph}\cot\theta - \frac{p}{4}\cot^2\theta\right) = 0,$$

ou

$$5p\cot^2\theta - 8\sqrt{ph}\cot\theta + 6p = 0 \text{ .....(4)}.$$

Os dois valores de θ são dados pelas equações

$$5\sqrt{p}\cot\theta = 4\sqrt{h} \pm \sqrt{16h - 30p} \text{ .....(5)}.$$

O sinal inferior corresponde, na proposição de Arquimedes, ao ângulo *U* e o sinal superior ao ângulo T_1, como pode ser verificado assim.

Na primeira figura de Arquimedes (primeira figura da Prop. 10) temos

$$AK = \frac{2}{5}h,$$

$$M_2D^2 = \frac{3}{5}p.OK = \frac{3}{5}p\left(\frac{2}{3}h - \frac{2}{5}h - \frac{1}{2}p\right)$$

$$= \frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right).$$

Se $P_1P_2P_3$ encontra BM em D', segue que

$$\left.\begin{matrix} M_3D \\ M_3D' \end{matrix}\right\} = M_2D \pm M_3M_2$$

$$= \sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)} \pm \frac{1}{10}\sqrt{ph}\ ,$$

e

$$\left.\begin{matrix} MD \\ MD' \end{matrix}\right\} = MM_2 \mp M_2D$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{ph} \mp \sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)}\ .$$

Agora, da propriedade da parábola,

$$\cot U = 2\frac{MD}{p},$$

$$\cot T_1 = 2\frac{MD'}{p},$$

de forma que $$\frac{p}{2}\cot\left\{\begin{matrix} U \\ T_1 \end{matrix}\right\} = \frac{2}{5}\sqrt{ph} \mp \sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)}\ ,$$

ou $$5\sqrt{p}\cot\left\{\begin{matrix} U \\ T_1 \end{matrix}\right\} = 4\sqrt{h} \mp \sqrt{16h - 30p}\ ,$$

o que concorda com o resultado (5) acima.

Para encontrar a razão correspondente das gravidades específicas, ou k^2/h^2, temos que usar as equações (2) e (5) e expressar k em termos de h e p.

A equação (2) fornece, pela substituição nela do valor de $\cot\theta$ contido em (5),

$$\sqrt{k} = \sqrt{h} - \frac{1}{10}\left(4\sqrt{h} \pm \sqrt{16h - 30p}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{h} \mp \frac{1}{10}\sqrt{16h - 30p}\ ,$$

de onde obtemos, elevando ao quadrado,

$$k = \frac{13}{25}h - \frac{3}{10}p \mp \frac{3}{25}\sqrt{h(16h - 30p)} \text{ .....(6).}$$

O sinal inferior corresponde ao ângulo U e o superior ao ângulo T_1, e, a fim de verificar os resultados de Arquimedes, temos que mostrar simplesmente que os dois valores de k são iguais a Q_1Q_3 e P_1P_3, respectivamente.

Agora, é fácil ver que

$$Q_1Q_3 = \frac{h}{2} - \frac{MD^2}{p} + 2\frac{M_3D^2}{p},$$

$$P_1P_3 = \frac{h}{2} - \frac{MD'^2}{p} + 2\frac{M_3D'^2}{p}.$$

Portanto, usando os valores de MD, MD', M_3D e M_3D' determinados acima, temos

$$\left.\begin{matrix} Q_1Q_3 \\ P_1P_3 \end{matrix}\right\} = \frac{h}{2} + \frac{3}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right) - \frac{7h}{50} \pm \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3h}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)}$$

$$= \frac{13}{25}h - \frac{3}{10}p \pm \frac{3}{25}\sqrt{h(16h - 30p)},$$

que são os valores de k dados em (6) acima.]

---

[i] ASSIS, A. K. T., "Sobre os corpos flutuantes - tradução comentada de um texto de Arquimedes," Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência, Vol. 16, pp. 69-80 (1996)..

[ii] ARCHIMEDES, "The Works of Archimedes". Tradução de T. L. Heath. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. Great Books of the Western World, volume 11.

[iii] DIJKSTERHUIS, E. J., "Archimedes", Copenhagen: Ejnar Mundsgaard, 1956.

[iv] Ramalho Jr., F., Ferraro, N.G., Soares, P.A.T., "Os fundamentos da física", Editora Moderna Ltda., São Paulo, Brasil, 1995.

[v] Silva, D. S., "Princípio de Arquimedes, uma demonstração qualitativa e quantitativa", Relatório final da disciplina F809- Instrumentação para o ensino, 2006.

[vi] Stein, S., "Archimedes, What did he do besides cry eureka?", The Mathematical Association of America, USA, 1999.

[vii] Aaboe, A, "Episodes from the early history of mathematics", Washington, D.C., 1964.

[viii] ARCHIMEDES, "The method of mechanical theorems". Tradução de T. L. Heath em "A history of Greek mathematics II**",** Oxford, 1931.

Anexo
Textos adicionais a respeito de Arquimedes encontrados na Internet

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes.html

http://cricket.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html

http://pet.mtm.ufsc.br/bioarq.html

http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/history/arquimedes/arquimedes.html

http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/Archimedes.html

http://scienceworld.wolfram.com/biography/Archimedes.html

http://tqjunior.thinkquest.org/4116/History/archimedes.htm?tqskip=1

http://web01.shu.edu/projects/reals/history/archimed.html

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Archimedes.html

http://www-maths.mcs.st-andrews.ac.uk/~gmp/gmpANA.html

Archimedes of Syracuse

287 BC - 212 BC

Click the picture above
to see eleven larger pictures

Archimedes was the greatest mathematician of his age. His contributions in geometry revolutionised the subject and his methods anticipated the integral calculus 2,000 years before Newton and Leibniz. He was also a thoroughly practical man who invented a wide variety of machines including pulleys and the Archimidean screw pumping device.

Full MacTutor biography [Version for printing]

List of References (82 books/articles)

Some Quotations (7)

A Poster of Archimedes

Mathematicians born in the same country

Show birthplace location

Additional Material in MacTutor

1. Archimedes on mechanical and geometric methods
2. Archimedes' *Quadrature of the parabola*
3. Archimedes on statics

Honours awarded to Archimedes
(Click below for those honoured in this way)

Lunar features **Crater Archimedes** and **Rimae Archimedes** and **Montes Archimedes**

Other Web sites

1. Encyclopaedia Britannica
2. Astroseti (A Spanish translation of this biography)
3. NNDB
4. NAHSTE
5. G M Philips (Archimedes' calculation of π)
6. University of Waterloo (*The Sandreckoner*)
7. C Rorres
8. Science Museum Florence
9. Vatican exhibition
10. MathWorld
11. G Don Allen
12. Kevin Brown (Some information about Archimedes' calculation of square roots)
13. Kevin Brown (On spheres and cylinders)
14. MIT (Plutarch's account of Archimedes' war machines and of his death)
15. Peter Alfeld

Previous (Chronologically) Next Main Index
Previous (Alphabetically) Next Biographies index

JOC/EFR © January 1999

The URL of this page is:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Archimedes.html

Detail of a painting by Jusepe de Ribera (Spanish 1591-1652) in the Museo del Prado (Madrid, Spain) 125 x 81 cm

Enlargements:
352 x 480 pixels, 30K
1457 x 1985 pixels, 269K

Spanish postage stamp:
March 24, 1963
Scott Catalogue Number 1159
378 x 430 pixels, 56K
757 x 861 pixels, 208K

ARCHIMEDES

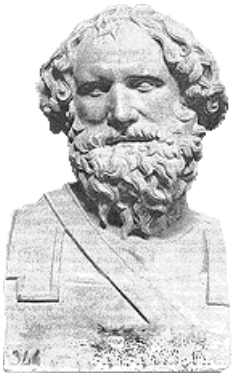
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

This site is a collection of Archimedean miscellanea under continual development with the following contents . . .

- Timeline
- Siege of Syracuse
- Archimedes' Claw New!
- Death of Archimedes
- Tomb of Archimedes
- Burning Mirrors
- The Golden Crown
- Archimedes Screw
- Stomachion
- The Cattle Problem
- Archimedean Solids
- Spheres and Planetaria
- The Lever
- Royal Family of Syracuse
- Coins of Syracuse
- Books on Archimedes
- Archimedes Crater
- Stamps of Archimedes
- Pictures of Archimedes
- On Floating Bodies New!

Quick facts about Archimedes . . .

Born	About 287 BC in Syracuse, Sicily. At the time Syracuse was an independent Greek city-state with a 500-year history.
Died	212 or 211 BC in Syracuse when it was being sacked by a Roman army. He was killed by a Roman soldier who did not know who he was.
Education	Probably studied in Alexandria, Egypt, under the followers of Euclid.
Family	His father was an astronomer named Phidias and he was probably related to Hieron II, the king of Syracuse. It is not known whether he was married or had any children.
Inventions	Many war machines used in the defense of Syracuse, compound pulley systems, planetarium, water screw (possibly), water organ (possibly), burning mirrors (very unlikely).
Fields of Science Initiated	Hydrostatics, static mechanics, pycnometry (the measurement of the volume or density of an object). He is called the "father of integral calculus" and also the "father of mathematical physics".
Major Writings	On plane equilibriums, Quadrature of the parabola, On the sphere and cylinder, On spirals, On conoids and spheroids, On floating bodies, Measurement of a circle, The Sandreckoner, On the method of mechanical problems.
Place in History	Generally regarded as the greatest mathematician and scientist of antiquity and one of the three greatest mathematicians of all time (together with Isaac Newton (English 1643-1727) and Carl Friedrich Gauss (German 1777-1855)).



A statue in the National Museum (Naples, Italy) widely claimed to represent Archimedes. It actually is a bust of Archidamos III, a third-century BC king of Sparta.

Italian postage stamp honoring Archimedes
May 2, 1983
Scott Catalogue Number 1559
523 x 401 pixels, 77K
1047 x 803 pixels, 175K

This site was created and is maintained by Chris Rorres

E-mail: rorres@vet.upenn.edu

[Site established October 1995]

Biografia

Arquimedes de Siracusa

Arquimedes nasceu em Siracusa, na Sicília em 287 a.C., e foi educado em Alexandria, no Egito. Consagrou-se à Matemática, mais especialmente à Geometria. Muito jovem ainda começou a distinguir-se por seus trabalhos científicos. De regresso à Siracusa consagrou-se ao estudo da Geometria e da Mecânica, conseguindo descobrir princípios e fazer aplicações que o imortalizaram.

Descobertas: Embora Arquimedes seja mais famoso pelo princípio da Hidrostática que traz seu nome, talvez sejam mais notáveis suas investigações sobre a quadratura do círculo, que vem a ser a descoberta da relação entre a circunferência e o seu diâmetro. Na Hidrostática, o "Princípio de Arquimedes" pode e deve ser considerado uma importante descoberta que determinou grande adiantamento no estudo das ciências físicas e produziu felizes resultados. Possui aplicações nas ciências naturais, na Farmácia e mesmo nas freqüentes atividades do cotidiano. Podemos enunciar esse Princípio em duas partes:

a) Todo corpo submerso em um líquido, desloca desse líquido uma quantidade determinada, cujo volume é exatamente igual ao volume do corpo submerso.
b) O corpo submerso no líquido "perde" de seu peso uma quantidade igual ao peso do volume de líquido igual ao volume submerso do corpo.
Arquimedes inventou a balança que tem seu nome e foi o primeiro a determinar as leis do equilíbrio na balança. As atividades de seu pai, o astrônomo Fídias, influíram, sem dúvida, na vocação e formação científica de Arquimedes que, desde jovem, esteve em Alexandria, onde travou amizade com vários mestres alexandrinos.

Heureca!

De volta a Siracusa, dedicou toda a sua vida à pesquisa científica. Uma das estórias mais conhecidas a respeito de Arquimedes é a da "Coroa de ouro de Hieron", contada da seguinte maneira: "Entre o grande número de descobertas realizadas por Arquimedes, é necessário assinalar a seguinte: Quando Hieron reinava em Siracusa, propôs oferecer, em um certo templo, uma coroa de ouro aos deuses imortais. Combinou a confecção da obra com um artesão mediante uma boa soma de dinheiro e a entrega da quantidade de ouro em peso. O artesão entregou a coroa na data combinada com o Rei, que a achou executada com perfeição, parecendo que contivesse todo o ouro que lhe havia sido entregue. Sabendo, porém, que o artesão retirara parte do ouro, substituíndo-o por um peso equivalente em prata, o rei, indignado diante desse engodo e não tendo em mãos os meios para provar ao artesão sua fraude, encarregou a Arquimedes que se ocupasse da questão e que com sua inteligência encontrasse esses meios. Um dia em que Arquimedes, preocupado com esse assunto, entrou por acaso em uma casa de banhos, percebeu que à medida que entrava na banheira, a água transbordava da mesma. Esta observação lhe fez descobrir a razão que procurava e, sem mais esperar, pela alegria que este fato lhe produzia, saiu do banho ainda nu e correndo para sua casa, gritava: Heureka! Heureka!, isto é, "encontrei! encontrei!".

Sobre a base desta descoberta, tomou, então, duas massas de igual peso que o da coroa: uma de ouro e outra de prata. Mergulhou depois a massa de prata em um vaso, o que fez sair uma quantidade de água igual ao volume dessa massa; tirou, então, a massa e voltou a encher o vaso com uma quantidade de água igual à que se derramara e que se preocupara em medir, de maneira que pode conhecer a quantidade de água que correspondia à massa de prata que introduzira no vaso. Depois desta experiência, mergulhou igualmente a massa de ouro no vaso cheio de água e, depois de havê-lo retirado, mediu novamente a água transbordada, encontrando que a massa de ouro não deslocara tanta água como a de prata e que a diferença para menos era igual à diferença entre os volumes da massa de ouro e da massa de prata em igual peso. Finalmente, voltou a encher o vaso, mergulhando desta vez a coroa, que deslocou mais água do que deslocara a massa de ouro de igual peso, porém menos que a massa de prata. Calculando, então, de acordo com estas experiências, em quanto a quantidade de água que a coroa desalojara era maior que aquela que deslocara a massa de ouro, soube quanta era a prata que fora misturada ao ouro, mostrando, assim, claramente, a fraude do artesão".

A morte de Arquimedes

A morte de Arquimedes é narrada de diferentes maneiras. Segundo Plutarco, a morte de Arquimedes veio depois que o exército romano conquistou as partes mais importantes da cidade sitiada:

"Tomadas também estas, na mesma manhã marchou Marcelo para os Hexápilos, dando-lhe parabéns todos os chefes que estavam às suas ordens; mas dele mesmo se diz que ao ver e registrar do alto a grandeza e beleza de semelhante cidade, derramou muitas lágrimas, compadecendo-se do que iria acontecer... ...os soldados que haviam pedido se lhes concedesse o direito ao saque... e que fosse incendiada e destruída. Em nada disso consentiu Marcelo e, só por força e com repugnância, condescendeu em que se aproveitassem dos bens e dos escravos... mandando expressamente que não se desse morte, nem se fizesse violência, nem se escravizasse nenhum dos siracusanos... Mas, o que principalmente afligiu a Marcelo foi o que ocorreu com Arquimedes: encontrava-se este, casualmente, entregue ao exame de certa figura matemática e, fixo nela seu espírito e sua vista, não percebeu a invasão dos romanos, nem a conquista da cidade. Apresentou-se-lhe repentinamente um soldado, dando-lhe ordem de que o acompanhasse à casa de Marcelo; ele, porém, não quis ir antes de resolver o problema e chegar até a demonstração; com o que, irritado, o soldado desembainhou a espada e matou-o... Marcelo o sentiu muito e ordenou ao soldado assassino que se retirasse de sua presença como abominável, e mandando buscar os parentes do sábio, tratou-os com o maior apreço e distinção".

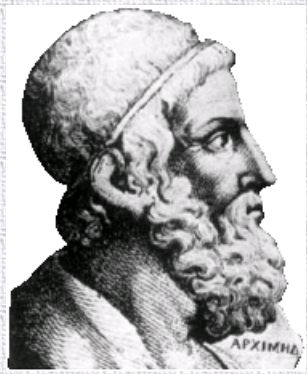
Na produção de Arquimedes revela-se exclusivamente o investigador. Seus escritos são verdadeiras memórias científicas, trabalhos originais, nos quais se dá por conhecido todo o produzido antes sobre o tema e apresentam-se elementos novos, próprios. As principais obras de arquimedes foram sobre:

1. A esfera e o cilindro - Um dos mais belos escritos de Arquimedes. Entre os seus resultados, a área lateral do cone e do cilindro.
2. Os conóides e os esferóides. - Refere-se aos sólidos que hoje designamos elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução.
3. As espirais. - É um estudo monográfico de uma curva plana, hoje chamada espiral de Arquimedes, que se obtém por uma simples combinação de movimentos de rotação e translação. Entre os resultados, encontra-se um processo para retificar a circunferência.
4. A medida do círculo. - Contém apenas 3 proposições e é um dos trabalhos que melhor revela a mente matemática de Aristóteles. Em uma ostentação técnica combinam-se admiravelmente a matemática exata e a aproximada, a aritmética e a geometria, para impulsionar e encaminhar em nova direção o clássico problema da quadratura do círculo.
5. Quadratura da Parábola. - Este escrito oferece o primeiro exemplo de quadratura, isto é, de determinação de um polígono equivalente, de uma figura plana mistilínea: o segmento da parábola.
6. O Arenário. - Arquimedes realiza um estudo, no qual intercala um sistema de numeração próprio, que lhe permite calcular e, sobretudo exprimir quantidades enormes, e uma série de considerações astronômicas de grande importância histórica, pois nelas se alude ao sistema heliocêntrico da antiguidade, devido a Aristarco de Samos.
7. O equilíbrio dos planos. - É o primeiro tratado científico de estática. A alavanca, os centros de gravidade de alguns polígonos, entre outros resultados.
8. Dos corpos flutuantes. (Livro I e II). - As bases científicas da hidrostática.
9. Do método relativo aos teoremas mecânicos. - Arquimedes aproxima-se extraordinariamente de nosso conceitos atuais de cálculo integral.
10. O Stomachion. - É um jogo geométrico, espécie de puzzle, formado por uma série de peças poligonais que completam um retângulo.
11. O problema dos bois. - Um problema referente a teoria dos números.

Dados retirados do site somatemática.
Voltar para Biografias

O PET de Matemática agradece sua visita.

Arquimedes de Siracusa



∗ 287 AC em Siracusa, Sicília

† 212 AC em Siracusa, Sicília

Galeria da Fama

Demócrito
460-370 AC

Eudoxo
408-355 AC

Arquimedes
287-212 AC

Al-Haitham
965-1040 DC

Descartes
1323-1382 DC

Oresme
1596-1650 DC

Fermat
1601-1665 DC

Newton
1643-1727 DC

Leibniz
1646-1716 DC

Rolle
1652-1719 DC

Euler
1707-1783 DC

Cauchy
1789-1857 DC

Arquimedes, filho do astrônomo Fídeas, era nativo de Siracusa, na Sicília. Há relatos de sua visita ao Egito, onde inventou um sistema de bombeamento chamado *Parafuso de Arquimedes*, em uso ainda hoje.

Há indícios muito fortes de que em sua juventude, Arquimedes tenha estudado com os sucessores de Euclides, em Alexandria. Com certeza ele era completamente familiarizado com a Matemática lá desenvolvida, conhecendo pessoalmente os matemáticos daquela região. Ele mesmo mandava alguns de seus resultados para Alexandria com mensagens pessoais.

No prefácio de *Sobre espirais* Arquimedes nos conta uma história curiosa acerca de seus amigos em Alexandria. Ele tinha o hábito de mandar o texto de seus últimos teoremas, mas sem as demonstrações. Aparentemente alguém em Alexandria estava roubando os resultados de Arquimedes e afirmando que eram seus. Na última vez que fez isso, enviou dois resultados falsos...

> *... aqueles que afirmam descobrir tudo, mas não produzem provas de suas afirmações, podem estar enganados fingindo descobrir o impossível.*

De fato, existem inúmeras referências a Arquimedes nos escritos de sua época, dada a reputação quase sem par que ele ganhou neste período. Curiosamente a razão para isso não era um interesse generalizado em Matemática, mas sim nas máquinas que inventou para serem usadas na guerra. Estas armas foram particularmente eficientes na defesa de Siracusa contra os Romanos, liderados por Marcelo.

Escreve Plutarco:

> *... quando Arquimedes começou a manejar suas máquinas, ele de uma só vez atirou contra as forças terrestres todos os tipos de mísseis, e imensas massas de rocha que caíram com barulho e violência inacreditáveis, contra as quais nenhum homem poderia resistir em pé ...*

Outras invenções de Arquimedes, como a polia composta, também colaboraram para que sua fama se perpetuasse. Novamente citando Plutarco:

> *[Arquimedes] afirmou [em uma carta ao Rei Hierão] que, dada uma força, qualquer peso poderia ser movido, e até mesmo se gabando, disse que se houvesse outra Terra, esta poderia ser movida. Hierão maravilhou-se com isto e pediu uma demonstração prática. Arquimedes tomou um dos navios da frota do rei - que não podia ser movido a não ser por muitos homens - carregou-o com muitos passageiros e lotou-o de carga. Arquimedes colocou-se a distância e puxou as polias, movendo o navio em linha reta suavemente, como se*

estivesse no mar.

Mesmo tendo Arquimedes obtido fama por suas invenções mecânicas, ele acreditava que a Matemática em sua forma mais pura era a única coisa que valia a pena.

As conquistas de Arquimedes são de tirar o fôlego. Ele é considerado por muitos historiadores como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele chegou a aperfeiçoar um método de integração que permitia calcular áreas, volumes e áreas de superfícies de muitos corpos.

Arquimedes foi capaz de aplicar o *método da exaustão*, que é uma forma primitiva de integração, para obter uma vasta gama de resultados importantes, alguns dos quais chegaram até os dias de hoje.

- O tratado *Sobre equilíbrios planos* aborda os princípios fundamentais da mecânica, usando métodos geométricos. Arquimedes descobriu teoremas fundamentais a respeito do centro de gravidade de figuras planas, todos constantes deste trabalho. Em particular ele encontra, no livro 1, o centro de gravidade do paralelogramo, do triângulo e do trapézio.

- O livro 2 é inteiramente devotado a encontrar o centro de gravidade de um segmento de parábola. Na *Quadratura da parábola* Arquimedes encontra a área de um segmento de parábola formado pelo corte de uma corda qualquer.

- No primeiro volume de *Sobre a esfera e o cilindro* Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é quatro vezes a do grande círculo, acha a área de qualquer segmento da esfera, mostra que o volume de uma esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito, e que a superfície da esfera é dois terços da superfície do cilindro circunscrito, incluindo-se as bases.

- Em *Sobre espirais* Arquimedes define uma espiral e estabelece as propriedades fundamentais relacionando o comprimento do vetor raio com os ângulos de revolução que geram as espirais. Ele também apresenta resultados sobre tangentes às espirais, bem como demonstra como calcular áreas de partes da espiral.

- Em *Sobre conóides e esferóides* Arquimedes examina os parabolóides de revolução, hiperbolóides de revolução e esferóides obtidos pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos.

- *Sobre corpos flutuantes* é o trabalho onde Arquimedes estabelece os princípios básicos da Hidrostática. Seu teorema mais famoso - que dá o peso de um corpo imerso em um líquido - chamado *Princípio de Arquimedes*, consta deste trabalho.

- Em *Medidas do círculo* Arquimedes mostra que o valor exato de π situa-se entre $3^{10}/_{71}$ e $3^{1}/_{7}$. Ele obteve este resultado circunscrevendo e inscrevendo um círculo com polígonos regulares com 96 lados!

- O *Contador de areia* é um trabalho memorável em que Arquimedes propõe um sistema numérico capaz de expressar números até $8x10^{16}$ (em notação moderna). Seu argumento é de que este número seria suficiente para contar o número de grãos de areia do Universo. Bem, naturalmente Arquimedes enfrentou o problema anterior: o tamanho do Universo. Quando cita resultados acerca do tamanho do Universo, ele usa resultados de Euxodo,

Fídias (seu pai) e Aristarco.

Há referências a outros trabalhos de Arquimedes, que estão hoje perdidos. Pappus refere-se a um trabalho de Arquimedes sobre poliedros semi-regulares e o próprio Arquimedes refere-se a um trabalho sobre o sistema numérico proposto no *Contador de areia*. Pappus também menciona um tratado sobre balanças e alavancas, e Theon menciona um tratado sobre espelhos.

Arquimedes foi morto em 212 AC durante a captura de Siracusa pelos Romanos na segunda guerra Púnica, depois que todos seus esforços para manter os romanos na baía com suas máquinas de guerra falharam.

Esta página, escrita por Renato Cantão, foi baseada, com a permissão dos autores, no The MacTutor History of Mathematics archive, página de história da Matemática.

Archimedes

born: 287 BC in Syracuse, Sicily
died: 212 BC in Syracuse

Archimedes, who combined a genius for mathematics with a physical insight, must rank with Newton, who lived nearly two thousand years later, as one of the founders of mathematical physics.
(Alfred North Whitehead)

One of the greatest mathematicians of all time. Method of Exhaustion -- integration. "Eureka" -- the first law of hydrostatics. Discovered the laws of levers and used pulleys. His mechanical inventions defeated the Roman fleet of Marcellus.

Archimedes was an aristocrat, the son of an astronomer, but little is known of his early life except that he studied for a time in Alexandria, Egypt. Several of his books were preserved by the Greeks and Arabs into the Middle Ages, and, fortunately, the Roman historian Plutarch described a few episodes from his life. In many areas of mathematics as well as in hydrostatics and statics, his work and results were not surpassed for over 1500 years!

He approximated the area of circles (and the value of ¼) by summing the areas of inscribed and circumscribed rectangles, and generalized this "method of exhaustion," by taking smaller and smaller rectangular areas and summing them, to find the areas and even volumes of several other shapes. This anticipated the results of the calculus of Newton and Leibniz by almost 2000 years!

He found the area and tangents to the curve traced by a point moving with uniform speed along a straight line which is revolving with uniform angular speed about a fixed point. This curve, described by $r = a\theta$ in polar coordinates, is now called the "spiral of Archimedes." With calculus it is an easy problem; without calculus it is very difficult.

The king of Syracuse once asked Archimedes to find a way of determining if one of his crowns was pure gold without destroying the crown in the process. The crown weighed the correct amount but that was not a guarantee that it was pure gold. The story is told that as Archimedes lowered himself into a bath he noticed that some of the water was displaced by his body and flowed over the edge of the tub. This was just the insight he needed to realize that the crown should not only weigh the right amount but should displace the same volume as an equal weight of pure gold. He was so excited by this idea that he reportedly ran naked through the streets shouting "Eureka" ("I have found it").

"Give me a place to stand and I will move the earth" was his boast when he discovered the laws of levers and pulleys. Since it was impossible to challenge that statement directly, he was asked to move a ship which had required a large group of laborers to put into position. Archimedes did so easily by using a compound pulley system.

During the war between Rome and Carthage, the Roman fleet decided to attack Syracuse, but Archimedes had been at work devising a few surprises. There were catapults with adjustable ranges which could throw objects which weighted over 500 pounds. The ships which survived the catapults were met with poles which reached over the city walls and dropped heavy stones onto the ships. Large grappling hooks attached to levers lifted the ships out of the water and then dropped them. During another failed assault, it is said that Archimedes had the soldiers of Syracuse use specially shaped and shined shields to focus the sunlight onto the sails to set them afire. This was more than the terrified sailors could stand, and the fleet withdrew. Unfortunately, the city began celebrating a bit early, and Marcellus captured Syracuse by attacking from the landward side during the celebration. "Archimedes, who was then, as fate would have it, intent upon working out some problem by a diagram, and having fixed his mind alike and his eyes upon the subject of his speculation, he never noticed the incursion of the Romans, nor that the city was taken. In this transport of study and contemplation, a soldier, unexpectedly coming upon him, commanded him to follow to Marcellus, which he declined to do before he had worked out his problem to a demonstration; the soldier, enraged, drew his sword and ran him through." (Plutarch)

Archimedes requested that his tombstone be decorated with a sphere contained in the smallest possible cylinder and inscribed with the ratio of the cylinder's volume to that of the sphere. Archimedes considered the discovery of this ratio the greatest of all his accomplishments.

The results of Archimedes are all the more remarkable when one considers the times in which he lived. Archimedes made fundamental discoveries in several fields, and he then advanced them so far that his results were not improved upon for many centuries. Archimedes certainly ranks as one of the greatest minds in recorded history.

Condensed from Men of Mathematics by E.T. Bell (1937, Simon and Schuster) and An Introduction to the History of Mathematics, 4th ed., by H. Eves (1976, Holt, Rinehart and Winston). DTH

Archimedes of Syracuse (ca. 287-ca. 212 BC)

Greek mathematician who flourished in Sicily. He is generally considered to be the greatest mathematician of ancient times. Most of the facts about his life come from a biography about the Roman soldier Marcellus written by the Roman biographer Plutarch.

Archimedes performed numerous geometric proofs using the rigid geometric formalism outlined by Euclid, excelling especially at computing areas and volumes using the method of exhaustion. He was especially proud of his discovery for finding the volume of a sphere, showing that it is two thirds the volume of the smallest cylinder that can contain it. At his request, the figure of a sphere and cylinder was engraved on his tombstone. In fact, it is often said that Archimedes would have invented calculus if the Greeks had only possessed a more tractable mathematical notation. By inscribing and circumscribing polygons on a circle, for instance, he was able to constrain the value of π (pi) between 3 10/71 and 3+1/7.

Archimedes was also an outstanding engineer, formulating Archimedes' principle of buoyancy and the law of the lever. Legend has it that Archimedes discovered his principle of buoyancy, which states that the buoyancy force is equal to the weight of the liquid displaced, while taking a bath, upon which he is supposed to have run naked through the streets of Syracuse shouting "Eureka!" (I have found it). Archimedes is also purported to have invented the Archimedean screw. Some of Archimedes's geometric proofs were actually motivated by mechanical arguments which led him to the correct answer. During the Roman siege of Syracuse, he is said to have single-handedly defended the city by constructing lenses to focus the Sun's light on Roman ships and huge cranes to turn them upside down. When the Romans finally broke the siege, Archimedes was killed by a Roman soldier after snapping at him "Don't disturb my circles," a reference to a geometric figure he had outlined on the sand.

Additional biographies: MacTutor (St. Andrews), Firenze, Bonn, Greek and Roman Science and Technology

REFERENCES:

Bell, E. T. "Modern Minds in Ancient Bodies: Zeno, Eudoxus, Archimedes." Ch. 2 in *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré.* New York: Simon and Schuster, pp. 19-34, 1986.

Dijksterhuis, E. J. *Archimedes.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.

Dunham, W. "Archimedes' Determination of Circular Area." Ch. 4 in *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics.* New York: Wiley, pp. 84-112, 1990.

Heath, T. L. *The Works of Archimedes.* New York: Dover, 1953.

Kleiner, K. "Lasers Reveal Ancient Words of Wisdom." *New Scientist* **167**, 6, 22 Jul 2000.

Plutarch. *Life of Marcellus.*

Rorres, C. "Archimedes." http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html.

Stein, S. *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?* Washington, DC: Amer. Math. Soc., 1999.

© 1996-2007 Eric W. Weisstein

Related Wolfram Research Products Include:
Mathematica Mathematica CalcCenter

Archimedes

History
Archimedes
Powers Quiz
Principles
Inventions
Stories
Euclid
Elements
Fermat
Prime numbers
Gauss
Newton
Calculus
Gravity
Optics
Motion
Binomial
Gravitation
Halley's Comet
Pascal
Pascal's Triangle
Pythagoras
Angles
Theorems

Born: 298 BC in Syracuse, Sicily

Died: 212 BC in Syracuse, Sicily

Short Biography

Archimedes was a great mathematician of ancient times. His greatest contributions were in geometry. He also spent some time in Egypt, where he invented the machine now called Archimedes' screw, which was a mechanical water pump. Among his most famous works is *Measurement of the Circle*, where he determined the exact value of pi between the two fractions, 3 10/71 and 3 1/7. He got this information by inscribing and circumscribing a circle with a 96-sided regular polygon.

Archimedes made many contributions to geometry in his work on the areas of plane figures and on the areas of area and volumes of curved surfaces. His methods started the idea for calculus which was "invented" 2,000 years later by Sir Isaac Newton and Gottfried Wilhelm von Leibniz. Archimedes proved that the volume of an inscribed sphere is two-thirds the volume of a circumscribed cylinder. He requested that this formula/diagram be inscribed on his tomb.

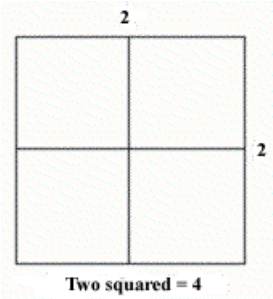
His works (that survived) include:

- Measurement of a Circle
- On the Sphere and Cylinder
- On Spirals
- The Sand Reckoner

The Roman's highest numeral was a myriad (10,000). Archimedes was not content to use that as the biggest number, so he decided to conduct an experiment using large numbers. The question: How many grains of sand there are in the universe? He made up a system to measure the sand. While solving this problem, Archimedes discovered something called powers. The answer to Archimedes' question was one with 62 zeros after it (1×10^{62})..

When numbers are multiplied by themselves, they are called powers.

Some powers of two are:



1 = 0 power=2^0

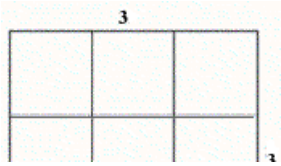
2 = 1st power=2^1

2 x 2 = 2nd power (squared)=2^2

2 x 2 x 2= 3rd power (cubed)=2^3

2 x 2 x 2 x 2= 4th power=2^4

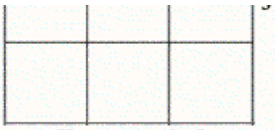
There are short ways to write exponents. For example, a short way to write 81 is 3^4.This is read as three to the fourth power.



- On Plane Equilibriums

- On Floating Bodies

This problem was after Archimedes had solved the problem of King Hiero's gold crown. He experimented with liquids. He discovered *density* and *specific gravity*.

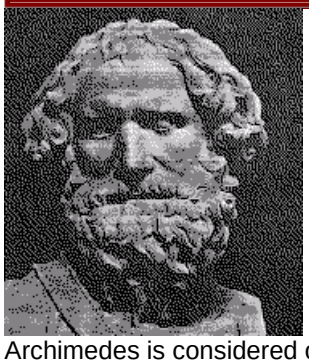


Three squared = 9

Questions or comments

10.2. Archimedes (287? -212 B.C.)

IRA



Archimedes is considered one of the three greatest mathematicians of all time along with Newton and Gauss. In his own time, he was known as "the wise one," "the master" and "the *great* geometer" and his works and inventions brought him fame that lasts to this very day. He was one of the last great Greek mathematicians.

Born in 287 B.C., in Syracuse, a Greek seaport colony in Sicily, Archimedes was the son of Phidias, an astronomer. Except for his studies at Euclid's school in Alexandria, he spent his entire life in his birthplace. Archimedes proved to be a master at mathematics and spent most of his time contemplating new problems to solve, becoming at times so involved in his work that he forgot to eat. Lacking the blackboards and paper of modern times, he used any available surface, from the dust on the ground to ashes from an extinguished fire, to draw his geometric figures. Never giving up an opportunity to ponder his work, after bathing and anointing himself with olive oil, he would trace figures in the oil on his own skin.

Much of Archimedes fame comes from his relationship with Hiero, the king of Syracuse, and Gelon, Hiero's son. The great geometer had a close friendship with and may have been related to the monarch. In any case, he seemed to make a hobby out of solving the king's most complicated problems to the utter amazement of the sovereign. At one time, the king ordered a gold crown and gave the goldsmith the exact amount of metal to make it. When Hiero received it, the crown had the correct weight but the monarch suspected that some silver had been used instead of the gold. Since he could not prove it, he brought the problem to Archimedes. One day while considering the question, "the wise one" entered his bathtub and recognized that the amount of water that overflowed the tub was proportional the amount of his body that was submerged. This observation is now known as Archimedes' Principle and gave him the means to solve the problem. He was so excited that he ran naked through the streets of Syracuse shouting "*Eureka! eureka!*" (I have found it!). The fraudulent goldsmith was brought to justice. Another time, Archimedes stated "Give me a place to stand on and I will move the earth." King Hiero, who was absolutely astonished by the statement, asked him to prove it. In the harbor was a ship that had proved impossible to launch even by the combined efforts of all the men of Syracuse. Archimedes, who had been examining the properties of levers and pulleys, built a machine that allowed him the single-handedly move the ship from a distance away. He also had many other inventions including the Archimedes' watering screw and a miniature planetarium.

Though he had many great inventions, Archimedes considered his purely theoretical work to be his true calling. His accomplishments are numerous. His approximation of π between 3-1/2 and 3-10/71 was the most accurate of his time and he devised a new way to approximate square roots. Unhappy with the unwieldy Greek number system, he devised his own that could accommodate larger numbers more easily. He invented the entire field of hydrostatics with the discovery of the Archimedes' Principle. However, his greatest invention was *integral calculus.* To determine the area of sections bounded by geometric figures such as parabolas and ellipses, Archimedes broke the sections into an infinite number of rectangles and added the areas together. This is known as *integration.* He also anticipated the invention of *differential calculus* as he devised ways to approximate the slope of the tangent lines to his figures. In addition, he also made many other discoveries in geometry, mechanics and other fields.

The end of Archimedes life was anything but uneventful. King Hiero had been so impressed with his friend's inventions that he persuaded him to develop weapons to defend the city. These inventions would prove quite useful. In 212 B.C., Marcellus, a Roman general, decided to conquer Syracuse with a full frontal assault on both land and sea. The Roman legions were routed. Huge catapults hurled 500 pound boulders at the soldiers; large cranes with claws on the end lowered down on the enemy ships, lifted them in the air, and then threw them against the rocks; and systems of mirrors focused the sun rays to light enemy ships on fire. The Roman soldiers refused to continue the attack and fled at the mere sight of anything projecting from the walls of the city. Marcellus was forced to lay siege to the city, which fell after eight months. Archimedes was killed by a Roman soldier when the city was taken. The traditional story is that the mathematician was unaware of the taking of the city. While he was drawing figures in the dust, a Roman soldier stepped on them and demanded he come with him. Archimedes responded, "Don't disturb my circles!" The soldier was so enraged that he pulled out his sword and slew the great geometer. When Archimedes was buried, they placed on his tombstone the figure of a sphere inscribed inside a cylinder and the 2:3 ratio of the volumes between them, the solution to the problem he considered his greatest achievement.

For related information on Archimedes, see: Euclid , Archimedien property.

Sources

- Bell, E.T. *Men of Mathematics.* New York: Simon and Schuster, Inc., 1937. pp. 28-34.
- Lewis, Albert C. "Archimedes." *Encyclopedia of World Biography.* New York: McGraw- Hill, Inc., 1973. vol. 1, pp.219-223.
- Muir, Jane. *Of Men and Numbers.* New York: Dodd, Mead & Company, 1962.
- Turnbull, Herbert Westren. *The Great Mathematicians.* New York: New York University Press, 1961.

Historical information compiled by **Paul Golba**

Archimedes of Syracuse

Born: 287 BC in Syracuse, Sicily
Died: 212 BC in Syracuse, Sicily

Click the picture above
to see eleven larger pictures

Show birthplace location

Previous	(Chronologically)	Next	Main Index
Previous	(Alphabetically)	Next	Biographies index

Version for printing

Archimedes' father was Phidias, an astronomer. We know nothing else about Phidias other than this one fact and we o know this since Archimedes gives us this information in one of his works, *The Sandreckoner.* A friend of Archimedes called Heracleides wrote a biography of him but sadly this work is lost. How our knowledge of Archimedes would be transformed this lost work were ever found, or even extracts found in the writing of others.

Archimedes was a native of Syracuse, Sicily. It is reported by some authors that he visited Egypt and there invented a device now known as Archimedes' screw. This is a pump, still used in many parts of the world. It is highly likely that, when he was a young man, Archimedes studied with the successors of Euclid in Alexandria. Certainly he was completely familiar with the mathematics developed there, but what makes this conjecture much more certain, he knew personally mathematicians working there and he sent his results to Alexandria with personal messages. He regarded Conon of Samos, one of the mathematicians at Alexandria, both very highly for his abilities as a mathematician and he also regarded him as a close friend.

In the preface to *On spirals* Archimedes relates an amusing story regarding his friends in Alexandria. He tells us that he was in the habit of sending them statements of his latest theorems, but without giving proofs. Apparently some of the mathematicians there had claimed results as their own so Archimedes says that on the last occasion when he sent them theorems he included two which w false [3]:-

> *... so that those who claim to discover everything, but produce no proofs of the same, may be confuted as having pretended to discover the impossible.*

Other than in the prefaces to his works, information about Archimedes comes to us from a number of sources such as stories from Plutarch, Livy, and others. Plutarch tells us that Archimedes was related to King Hieron II of Syracuse (se example [3]):-

> *Archimedes ... in writing to King Hiero, whose friend and near relation he was....*

Again evidence of at least his friendship with the family of King Hieron II comes from the fact that *The Sandreckoner* was dedicated to Gelon, the son of King Hieron.

There are, in fact, quite a number of references to Archimedes in the writings of the time for he had gained a reputation in his own time which few other mathematicians of this period achieved. The reason for this was not a widespread interest i new mathematical ideas but rather that Archimedes had invented many machines which were used as engines of war. These were particularly effective in the defence of Syracuse when it was attacked by the Romans under the command of Marcellus.

Plutarch writes in his work on Marcellus, the Roman commander, about how Archimedes' engines of war were used again the Romans in the siege of 212 BC:-

> *... when Archimedes began to ply his engines, he at once shot against the land forces all sorts of missile weapons, and immense masses of stone that came down with incredible noise and violence; against which no man could stand; for they knocked down those upon whom they fell in heaps, breaking all their ranks and files. In the meantime huge poles thrust out from the walls over the ships and sunk some by great weights which they let down from on high upon them; others they lifted up into the air by an iron hand or beak like a crane's beak and, when they had drawn them up by the prow, and set them on end upon the poop, they plunged them to the bottom of the sea; or else the ships, drawn by engines within, and whirled about, were dashed against steep rocks that*

> *stood jutting out under the walls, with great destruction of the soldiers that were aboard them. A ship was frequently lifted up to a great height in the air* (*a dreadful thing to behold*), *and was rolled to and fro, and kept swinging, until the mariners were all thrown out, when at length it was dashed against the rocks, or let fall.*

Archimedes had been persuaded by his friend and relation King Hieron to build such machines:-

> *These machines* [*Archimedes*] *had designed and contrived, not as matters of any importance, but as mere amusements in geometry; in compliance with King Hiero's desire and request, some little time before, that he should reduce to practice some part of his admirable speculation in science, and by accommodating the theoretic truth to sensation and ordinary use, bring it more within the appreciation of the people in general.*

Perhaps it is sad that engines of war were appreciated by the people of this time in a way that theoretical mathematics wa not, but one would have to remark that the world is not a very different place at the end of the second millenium AD. inventions of Archimedes such as the compound pulley also brought him great fame among his contemporaries. Again \ quote Plutarch:-

> [*Archimedes*] *had stated* [*in a letter to King Hieron*] *that given the force, any given weight might be moved, and even boasted, we are told, relying on the strength of demonstration, that if there were another earth, by going into it he could remove this. Hiero being struck with amazement at this, and entreating him to make good this problem by actual experiment, and show some great weight moved by a small engine, he fixed accordingly upon a ship of burden out of the king's arsenal, which could not be drawn out of the dock without great labour and many men; and, loading her with many passengers and a full freight, sitting himself the while far off, with no great endeavour, but only holding the head of the pulley in his hand and drawing the cords by degrees, he drew the ship in a straight line, as smoothly and evenly as if she had been in the sea.*

Yet Archimedes, although he achieved fame by his mechanical inventions, believed that pure mathematics was the onl worthy pursuit. Again Plutarch describes beautifully Archimedes attitude, yet we shall see later that Archimedes did in fact use some very practical methods to discover results from pure geometry:-

> *Archimedes possessed so high a spirit, so profound a soul, and such treasures of scientific knowledge, that though these inventions had now obtained him the renown of more than human sagacity, he yet would not deign to leave behind him any commentary or writing on such subjects; but, repudiating as sordid and ignoble the whole trade of engineering, and every sort of art that lends itself to mere use and profit, he placed his whole affection and ambition in those purer speculations where there can be no reference to the vulgar needs of life; studies, the superiority of which to all others is unquestioned, and in which the only doubt can be whether the beauty and grandeur of the subjects examined, of the precision and cogency of the methods and means of proof, most deserve our admiration.*

His fascination with geometry is beautifully described by Plutarch:-

> *Oftimes Archimedes' servants got him against his will to the baths, to wash and anoint him, and yet being there, he would ever be drawing out of the geometrical figures, even in the very embers of the chimney. And while they were anointing of him with oils and sweet savours, with his fingers he drew lines upon his naked body, so far was he taken from himself, and brought into ecstasy or trance, with the delight he had in the study of geometry.*

The achievements of Archimedes are quite outstanding. He is considered by most historians of mathematics as one o greatest mathematicians of all time. He perfected a method of integration which allowed him to find areas, volumes an surface areas of many bodies. Chasles said that Archimedes' work on integration (see [7]):-

> *... gave birth to the calculus of the infinite conceived and brought to perfection by Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz and Newton.*

Archimedes was able to apply the method of exhaustion, which is the early form of integration, to obtain a whole rang important results and we mention some of these in the descriptions of his works below. Archimedes also gave a approximation to π and showed that he could approximate square roots accurately. He invented a system for expressing large numbers. In mechanics Archimedes discovered fundamental theorems concerning the centre of gravity of plane figures and solids. His most famous theorem gives the weight of a body immersed in a liquid, called Archimedes' principle.

The works of Archimedes which have survived are as follows. *On plane equilibriums* (two books), *Quadrature of the parabola*, *On the sphere and cylinder* (two books), *On spirals*, *On conoids and spheroids*, *On floating bodies* (two books), *Measurement of a circle*, and *The Sandreckoner.*

In the summer of 1906, J L Heiberg, professor of classical philology at the University of Copenhagen, discovered a 10th century manuscript which included Archimedes' work *The method.* This provides a remarkable insight into how Archimedes discovered many of his results and we will discuss this below once we have given further details of what is in the surviv books.

The order in which Archimedes wrote his works is not known for certain. We have used the chronological order suggested by Heath in [7] in listing these works above, except for *The Method* which Heath has placed immediately before *On the sphere and cylinder.* The paper [47] looks at arguments for a different chronological order of Archimedes' works.

The treatise *On plane equilibriums* sets out the fundamental principles of mechanics, using the methods of geometry. Archimedes discovered fundame theorems concerning the centre of gravity of plane figures and these are given in this work. In particular he finds, in book 1 the centre of gravity of a parallelogram, a triangle, and a trapezium. Book two is devoted entirely to finding the centre o gravity of a segment of a parabola. In the *Quadrature of the parabola* Archimedes finds the area of a segment of a parabola

cut off by any chord.

In the first book of *On the sphere and cylinder* Archimedes shows that the surface of a sphere is four times that of a great circle, he finds the area of any segment of a sphere, he shows that the volume of a sphere is two-thirds the volume of a circumscribed cylinder, and that the surface of a sphere is two-thirds the surface of a circumscribed cylinder including its bases. A discussion of how Archimedes may have been led to some of these results using infinitesimals is given in [14]. In the second book of this work Archimedes' most important result is to show how to cut a given sphere by a plane so that the ratio of volumes of the two segments has a prescribed ratio.

In *On spirals* Archimedes defines a spiral, he gives fundamental properties connecting the length of the radius vector with the angle through which it has revolved. He gives results on tangents to the spiral as well as finding the area of portions of the spiral. In the work *On conoids and spheroids* Archimedes examines paraboloids of revolution, hyperboloids of revolution, and spheroids obtained by rotating an ellipse either about its major axis or about its minor axis. The main purpose of the work is to investigate the volume of segments these three-dimensional figures. Some claim there is a lack of rigour in certain of the results of this work but the intc discussion in [43] attributes this to a modern day reconstruction.

On floating bodies is a work in which Archimedes lays down the basic principles of hydrostatics. His most famous theorem which gives the weight of a body immersed in a liquid, called *Archimedes' principle*, is contained in this work. He also studied the stability of various floating bodies of different shapes and different specific gravities. In *Measurement of the Circle* Archimedes shows that the exact value of π lies between the values $3^{10}/_{71}$ and $3^{1}/_{7}$. This he obtained by circumscribing and inscribing a circle with regular polygons having 96 sides.

The Sandreckoner is a remarkable work in which Archimedes proposes a number system capable of expressing numbers up to 8×10^{63}in modern notation. He argues in this work that this number is large enough to count the number of grains of sand which coul be fitted into the universe. There are also important historical remarks in this work, for Archimedes has to give the dimensions of the universe to be able to count the number of grains of sand which it could contain. He states that Aristarchus has proposed a system with the sun at the centre and the planets, including the Earth, revolving round it. In quoting results on the dimensions he states results due to Eudoxus, Phidias (his father), and to Aristarchus. There are other sources which mention Archimedes' work on distances to the heavenly bodies. For example in [59] Osborne reconstructs and discusses:-

> *...a theory of the distances of the heavenly bodies ascribed to Archimedes, but the corrupt state of the numerals in the sole surviving manuscript* [*due to Hippolytus of Rome, about* 220 *AD*] *means that the material is difficult to handle.*

In the *Method*, Archimedes described the way in which he discovered many of his geometrical results (see [7]):-

> *... certain things first became clear to me by a mechanical method, although they had to be proved by geometry afterwards because their investigation by the said method did not furnish an actual proof. But it is of course easier, when we have previously acquired, by the method, some knowledge of the questions, to supply the proof than it is to find it without any previous knowledge.*

Perhaps the brilliance of Archimedes' geometrical results is best summed up by Plutarch, who writes:-

> *It is not possible to find in all geometry more difficult and intricate questions, or more simple and lucid explanations. Some ascribe this to his natural genius; while others think that incredible effort and toil produced these, to all appearances, easy and unlaboured results. No amount of investigation of yours would succeed in attaining the proof, and yet, once seen, you immediately believe you would have discovered it; by so smooth and so rapid a path he leads you to the conclusion required.*

Heath adds his opinion of the quality of Archimedes' work [7]:-

> *The treatises are, without exception, monuments of mathematical exposition; the gradual revelation of the plan of attack, the masterly ordering of the propositions, the stern elimination of everything not immediately relevant to the purpose, the finish of the whole, are so impressive in their perfection as to create a feeling akin to awe in the mind of the reader.*

There are references to other works of Archimedes which are now lost. Pappus refers to a work by Archimedes on semi-regular polyhedra, Archimedes himself refers to a work on the number system which he proposed in the *Sandreckoner*, Pappus mentions a treatise *On balances and levers*, and Theon mentions a treatise by Archimedes about mirrors. Evidenc for further lost works are discussed in [67] but the evidence is not totally convincing.

Archimedes was killed in 212 BC during the capture of Syracuse by the Romans in the Second Punic War after all his efforts to keep the Romans at bay with his machines of war had failed. Plutarch recounts three versions of the story of his killin which had come down to him. The first version:-

> *Archimedes ... was ..., as fate would have it, intent upon working out some problem by a diagram, and having fixed his mind alike and his eyes upon the subject of his speculation, he never noticed the incursion of the Romans, nor that the city was taken. In this transport of study and contemplation, a soldier, unexpectedly coming*

> *up to him, commanded him to follow to Marcellus; which he declining to do before he had worked out his problem to a demonstration, the soldier, enraged, drew his sword and ran him through.*

The second version:-

> *... a Roman soldier, running upon him with a drawn sword, offered to kill him; and that Archimedes, looking back, earnestly besought him to hold his hand a little while, that he might not leave what he was then at work upon inconclusive and imperfect; but the soldier, nothing moved by his entreaty, instantly killed him.*

Finally, the third version that Plutarch had heard:-

> *... as Archimedes was carrying to Marcellus mathematical instruments, dials, spheres, and angles, by which the magnitude of the sun might be measured to the sight, some soldiers seeing him, and thinking that he carried gold in a vessel, slew him.*

Archimedes considered his most significant accomplishments were those concerning a cylinder circumscribing a sphere, and he asked for a representation of this together with his result on the ratio of the two, to be inscribed on his tomb. Cicero was in Sicily in 75 BC and he writes how he searched for Archimedes tomb (see for example [1]):-

> *... and found it enclosed all around and covered with brambles and thickets; for I remembered certain doggerel lines inscribed, as I had heard, upon his tomb, which stated that a sphere along with a cylinder had been put on top of his grave. Accordingly, after taking a good look all around ..., I noticed a small column arising a little above the bushes, on which there was a figure of a sphere and a cylinder... . Slaves were sent in with sickles ... and when a passage to the place was opened we approached the pedestal in front of us; the epigram was traceable with about half of the lines legible, as the latter portion was worn away.*

It is perhaps surprising that the mathematical works of Archimedes were relatively little known immediately after his death. As Clagett writes in [1]:-

> *Unlike the Elements of Euclid, the works of Archimedes were not widely known in antiquity. ... It is true that ... individual works of Archimedes were obviously studied at Alexandria, since Archimedes was often quoted by three eminent mathematicians of Alexandria: Heron, Pappus and Theon.*

Only after Eutocius brought out editions of some of Archimedes works, with commentaries, in the sixth century AD were the remarkable treatises to become more widely known. Finally, it is worth remarking that the test used today to determine how close to the origina text the various versions of his treatises of Archimedes are, is to determine whether they have retained Archimedes' D dialect.

Article by: *J J O'Connor* and *E F Robertson*

Click on this link to see a list of the Glossary entries for this page

---

List of References (82 books/articles)

Some Quotations (7)

A Poster of Archimedes

Mathematicians born in the same country

Additional Material in MacTutor

1. Archimedes on mechanical and geometric methods
2. Archimedes' *Quadrature of the parabola*
3. Archimedes on statics
4. Semi-regular (or Archimedean) solids
5. The Archimedean cattle problem
6. Cremona's translation of *On the Sphere and Cylinder* (1544)

Honours awarded to Archimedes
(Click below for those honoured in this way)

Lunar features

Crater Archimedes and **Rimae Archimedes** and **Montes Archimedes**

Cross-references in MacTutor

1. History Topics: Greek Astronomy
2. History Topics: Squaring the circle
3. History Topics: Doubling the cube
4. History Topics: Trisecting an angle
5. History Topics: Arabic mathematics : forgotten brilliance?
6. History Topics: How do we know about Greek mathematicians?
7. History Topics: How do we know about Greek mathematics?

8. History Topics: Mathematical games and recreations
9. History Topics: Pi through the ages
10. History Topics: A chronology of pi
11. History Topics: The rise of the calculus
12. History Topics: An overview of Indian mathematics
13. History Topics: Indian numerals
14. History Topics: Greek number systems
15. History Topics: Infinity
16. History Topics: Pell's equation
17. History Topics: Mathematics and the physical world
18. Famous Curves: Cissoid of Diocles
19. Famous Curves: Archimedes' spiral
20. Famous Curves: hyperbolic spiral
21. Chronology: 500BC to 1AD

Other Web sites

1. Encyclopaedia Britannica
2. Astroseti (A Spanish translation of this biography)
3. NNDB
4. NAHSTE
5. G M Philips (Archimedes' calculation of π)
6. University of Waterloo (*The Sandreckoner*)
7. C Rorres
8. Science Museum Florence
9. Vatican exhibition
10. MathWorld
11. G Don Allen
12. Kevin Brown (Some information about Archimedes' calculation of square roots)
13. Kevin Brown (On spheres and cylinders)
14. MIT (Plutarch's account of Archimedes' war machines and of his death)
15. Peter Alfeld

Previous	(Chronologically)	Next	Main Index
Previous	(Alphabetically)	Next	Biographies index
History Topics	Societies, honours, etc.		Famous curves
Time lines	Birthplace maps	Chronology	Search Form
Glossary index	Quotations index		Poster index
Mathematicians of the day			Anniversaries for the year

JOC/EFR © January 1999
Copyright information

School of Mathematics and Statistics
University of St Andrews, Scotland

The URL of this page is:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes.html

Archimedes

In the very long line of Greek mathematicians from Thales of Miletus and Pythagoras of Samos in the 6th century BC to Pappus of Alexandria in the 4th century AD, Archimedes of Syracuse (287 - 212 BC) is the undisputed leading figure. His pre-eminence is the more remarkable when we consider that this dazzling millenium of mathematics contains so many illustrious names, including Anaxagoras, Zeno, Hippocrates, Theodorus, Eudoxus, Euclid, Eratosthenes, Apollonius, Hipparchus, Heron, Menelaus, Ptolemy and Diophantus. (See the St Andrews archive History of Mathematics for information about these mathematicians.)

Discoveries and inventions

Although his main claim to fame is as a mathematician, Archimedes is also known for his many discoveries and inventions in physics and engineering, which include the following.

- His invention of the water-screw, still in use in Egypt, for irrigation, draining marshy land and pumping out water from the bilges of ships.
- His invention of various devices used in defending Syracuse when it was besieged by the Romans. These include powerful catapults, the burning-mirror and systems of pulleys. It was his pride in what he could lift with the aid of pulleys and levers which provoked his glorious hyperbole "Give me a place to stand and I will move the earth". (This saying of Archimedes is even more grandly laconic in Greek, in which it transliterates as the eight word sentence "dos moi pou stó kai kinó t&eacuten g&eacuten". See the reference to T L Heath at the end of the following section.)
- His discovery of the hydrostatic principle that a body immersed in a fluid is subject to an upthrust equal to the weight of fluid displaced by the body. This discovery is said to have inspired his famous cry "Eureka" ("I have found it").

Mathematical achievements

Before discussing the work covered in his book *Measurement of the Circle* , we mention briefly a few of the other significant contributions which Archimedes made to mathematics.

- He computed the area of a segment of a parabola. He used a most ingenious argument involving the construction of an infinite number of inscribed triangles which "exhausted" the area of the parabolic segment. This is a most beautiful piece of mathematics.
- He computed the area of an ellipse by essentially "squashing" a circle.
- He found the volume and surface area of a sphere. Archimedes gave instructions that his tombstone should have displayed on it a diagram consisting of a sphere with a circumscribing cylinder. C H Edwards (see reference below) writes how Cicero, while serving as quaestor in Sicily, had Archimedes' tombstone restored, and adds "The Romans had so little interest in pure mathematics that this action by Cicero was probably the greatest single contribution of any Roman to the history of mathematics."
- He discussed properties of the "Archimedean spiral", which is defined as follows : the distance from a fixed point O of any point P on the spiral is proportional to the angle between OP and a fixed line through O. In his evaluation of areas involving the spiral he anticipated methods of the calculus which were not developed until the seventeenth century AD.
- He found the volumes of various "solids of revolution" obtained by rotating a curve about a fixed straight line.

References

1. C H Edwards. *The Historical Development of the Calculus* , Springer-Verlag, New York, 1979.

2. T L Heath. *A History of Greek Mathematics (2 vols.)* , Dover, New York, 1981.

Archimedes and Pi

The following three propositions are contained in Archimedes' book *Measurement of the Circle* .

(i) The area of a circle is equal to that of a right-angled triangle where the sides including the right angle are respectively equal to the radius and circumference of the circle.

(ii) The ratio of the area of a circle to that of a square with side equal to the circle's diameter is close to 11:14. (This is of course equivalent to saying that π is close to the fraction 22 over 7.)

(iii) The circumference of a circle is less than three and one-seventh times its diameter but more than three and ten-over-seventy-one times the diameter. He obtained these inequalities by considering the circle with radius unity and estimating the perimeters of inscribed and circumscribed regular polygons of ninety-six sides.

Archimedes the Numerical Analyst

Here we summarize the main points in the paper by Phillips with the above title.

1. Let p(n) and P(n) respectively denote half the perimeter of the inscribed and circumscribed regular n-gons of the unit circle. It can be shown that p(2n) and P(2n) are simply related to p(n) and P(n). The most obvious way is to express p(2n) as a function of p(n) only, and to express P(2n) solely in terms of P(n). However, there is a more elegant way of proceeding, in which both P(n) and p(n) are used to compute each of P(2n) and p(2n) : it happens that P(2n) is the harmonic mean of P(n) and p(n), and p(2n) is the geometric mean of P(n+1) and p(n). (Click on means for definitions of the harmonic and geometric mean.)

2. It is easily verified that P(3) is 3 times the square root of 3, and p(3) one half of this. We can compute P(6) and p(6) from the "double mean" process defined above, then P(12) and p(12), and so on. After five applications of the double mean process, we find that P(96) = 3.1427 and p(96) = 3.1410 to 4 decimal places. This is consistent with Archimedes' proposition (iii) above.

3. Some analysis shows that the quantity u(n)=(2p(n) + P(n))/3 is a closer approximation to π than either of P(n) or p(n).

4. It can be shown similarly that the quantity v(n) = (4p(2n) - p(n))/3 is a closer approximation to π than either of p(n) or p(2n). The approximation p(n) differs from π by a quantity which tends to zero like one-over-n-squared; however, v(n) differs from π by a quantity which tends to zero like one-over-n-to-the-power-4. The same remarks hold if we replace "p" by "P" in the relation for v(n). The process used in computing v(n) is called *extrapolation to the limit*, also known as Richardson extrapolation.

5. In fact, the error between p(n) or P(n) and π
is a power series in the variable x = one-over-n-squared, beginning with the term in x. The computation of v(n) is defined so that the error between v(n) and π has a series in x beginning with the term in x-squared.

6. To produce still faster convergence to π
, we "remove" the term in x-squared, by computing w(n) = (16v(2n) - v(n))/15. We can extend this process further, using w(2n) and w(n) to remove the term in x-cubed from the error, and so on. This is called repeated extrapolation. For more information on extrapolation to the limit, see any text on numerical analysis. (Phillips and Taylor, *Theory and Applications of Numerical Analysis* , is one that comes to mind.)

7. Beginning with p(3), p(6), p(12), p(24), p(48) and p(96), the "raw material" computed by Archimedes, we can extrapolate five times. The final number in this calculation differs from π by less than one unit in the eighteenth decimal place. (We obtain a similar result if we use the "P" sequence in place of the "p" sequence.)

8. It is geometrically obvious that the two sequences P(n) and p(n) converge to the common limit π. What if we assign arbitrary positive values to P(3) and p(3)? It can be shown that the two sequences converge to a common limit which can be expressed as a multiple of an inverse cosine or an inverse hyperbolic cosine (cosh), depending on whether p(3) is less than or greater than P(3).

9. In particular, let us choose any value of t > 1 and write a = t-squared. Then let us choose P(3) = (a-1)/(a+1) and p(3) = (a-1)/(2t), and compute the "P" and "p" sequences using the "double mean" process defined in paragraph 1 above. Note that P(3) < p(3). In this case the two sequences converge to the common limit log t.

The above method of the logarithm should not be regarded as a serious practical algorithm, since there are faster methods available. See, for example, Borwein and Borwein, *Pi and the Arithmetic-Geometric Mean* .

"Double mean" processes

In the first paragraph of the previous section, we combined the harmonic and geometric means in a "double mean" process. In order to generalize this, Foster and Phillips used of a class of abstract means. For a definition of this class and associated material, click on means.

Foster and Phillips define an "Archimedean" process where, given positive real numbers x(0) and y(0), the sequences (x(n)) and (y(n)) are computed recursively from

x(n+1) = M(x(n),y(n)),

y(n+1) = N(x(n+1),y(n)),

for n = 0, 1, ... , where M and N are any two means belonging to the class mentioned above.

This generalizes the process defined in paragraph 1 of the previous section. It can be shown that the two sequences defined by this "Archimedean" process converge monotonically to a common limit. Moreover, assuming that the functions M and N possess continuity of their derivatives up to second order, the two sequences converge to zero in a first order manner, meaning that the errors tend to zero asymptotically like a geometric sequence. Somewhat surprisingly, no matter what means M and N we choose, with the properties specified above, the common ratio of this geometric sequence is always one-quarter. Thus about three further decimal digits of accuracy are gained for every five iterations carried out in an "Archimedean" process, since 4 to the power 5 (1024) is approximately 1000.

Foster and Phillips consider also the superficially similar "Gaussian" process where, again given positive real numbers x(0) and y(0), the sequences (x(n)) and (y(n)) are computed recursively from

x(n+1) = M(x(n),y(n)),

y(n+1) = N(x(n),y(n)),

for n = 0, 1, ... , where M and N are again any two of the means mentioned above.

This generalizes the famous "arithmetic-geometric mean" process which Gauss used to compute an elliptic integral. In this classical case, M and N are (obviously from its name) the arithmetic and geometric means, and it is well known that the "arithmetic-geometric mean" process converges *quadratically* . This means that the error in x(n+1) behaves asymptotically as a multiple of the square of the error in x(n), with the errors in y(n+1) and y(n) being related similarly.

Foster and Phillips show that this quadratic convergence carries over to the general "Gaussian" process defined above provided that the means M and N possess continuity of their derivatives up to second order.