RELATÓRIO FINAL DE F809

UM BANQUINHO, UM VIOLÃO ...
E UMA ONDA EM PROPAGAÇÃO.
(PROPRIEDADES DAS ONDAS NUMA CORDA)

Aluna: Giorgia Taiacol Aleixo - RA 991828
Orientador: Antonio Manoel Mansanares

IFGW / UNICAMP
Junho/2003

1. Introdução

Neste projeto, um instrumento bastante comum, o violão, foi utilizado para a apresentação e discussão das propriedades das ondas numa corda, tais como:

a. Relação entre freqüência, comprimento, tensão e densidade da corda.
b. Ressonância e batimento.
c. Composição de Fourier (análise de Fourier).

Será explicitada a relação entre freqüência e nota musical, bem como entre a composição de Fourier e o timbre do instrumento (ou da nota na corda). A característica harmônica do instrumento será evidenciada (d), em contraposição a outros instrumentos não-harmônicos. Tanto na discussão das ressonâncias, quanto na análise de Fourier, a excitação dos modos normais (e) na corda será tratada.

O projeto pode ser dirigido ao ensino médio (itens (a) e (b)) e ao ensino de graduação (itens (c), (d) e (e)). A íntima relação com a música pode ser usada como motivador para o entendimento de conceitos físicos básicos. Além disso, o projeto pode servir de inspiração para a abordagem de outros aspectos da física da Música no ensino de Física.

Para a análise de Fourier usamos o programa "Cool Edit". Com ele fazemos a aquisição do som de determinadas notas, usando-se um microfone, e a partir daí fazemos a transformada rápida de Fourier para a obtenção do espectro de freqüências. Em particular, mostramos a relação entre timbre e análise de Fourier da onda sonora adquirindo um sinal através do microfone em função do tempo da nota $Lá_3$ percutida em diferentes posições da corda. Além disso, gravamos as notas dos acordes de Dó maior e de Dó maior com sétima; obtivemos seus espectros de freqüências e evidenciamos as consonâncias existentes entre as notas dos acordes.

Um outro tipo de experimento, utilizado para demonstrar as propriedades das ondas numa corda de extremidades fixas, consistiu na medida do comprimento da corda para as diferentes notas (medida da posição dos trastes do violão). A relação entre freqüência do harmônico fundamental e comprimento da corda foi assim demonstrada.

Este projeto envolveu conhecimentos da teoria musical e da física da acústica dos instrumentos. Nas seções a seguir, vamos explicar alguns desses conceitos básicos que permitirão a compreensão do que foi feito neste trabalho. A seguir apresentamos os resultados obtidos nos experimentos demonstrativos.

2. Produção do som

O som é produzido ao criarmos algum tipo de mecanismo que altere a pressão do ar em nossa volta. Podemos dizer que o som é produzido ao colocarmos uma quantidade de ar em movimento. É a variação da pressão sobre a massa de ar que causa os diferentes sons, dentre eles os que são combinados para criar a música.

A vibração de determinados materiais é transmitida às moléculas de ar sob a forma de ondas sonoras. Ouvimos os sons porque, as ondas no ar, causadas por essa variação de pressão, chegam aos nossos ouvidos e fazem os tímpanos vibrarem. As vibrações são transformadas em impulsos nervosos, levadas até o cérebro e decodificadas.

Uma nota musical é um som cuja vibração encontra-se dentro de um intervalo perceptível pelo ouvido humano e a música é a combinação, sob as mais diversas formas, de uma seqüência de notas em diferentes intervalos. Entretanto, uma mesma nota emitida por diferentes instrumentos musicais pode ter a mesma freqüência e ainda assim soar de maneira diferente para quem ouve.

A partir dos princípios da acústica e da propagação de ondas pode-se descrever com precisão todas as características associadas aos fenômenos acústicos. A teoria matemática que descreve fenômenos ondulatórios foi desenvolvida por Jean Baptiste Fourier no início do século XIX. Esta teoria afirma que qualquer onda pode ser decomposta em uma combinação de ondas primitivas, todas com a forma de uma senóide. A soma de ondas senoidais formando ondas complexas é chamada de síntese de Fourier; a decomposição de uma onda complexa em suas componentes senoidais é conhecida como análise de Fourier. O gráfico das amplitudes das ondas senoidais que formam uma onda complexa é chamado de espectro de Fourier, e cada onda senoidal recebe o nome de componente de Fourier.[1]

A figura 1 representa uma senóide. Esta função pode ser completamente descrita especificando sua amplitude, comprimento de onda e freqüência.

O comprimento de onda é a grandeza física que define o "tamanho do ciclo", ou seja, qual a distância percorrida por um ciclo de onda até que ele volte a se repetir.

A amplitude é o afastamento da forma de onda da origem, na direção vertical. Neste caso, a onda tem 4 unidades de comprimento de onda e amplitude máxima de 10 unidades.

[1] Uma explicação mais detalhada do método de Fourier é feita na referência 1 e na referência 2 encontramos uma página interessante de espectros de freqüência da voz humana.

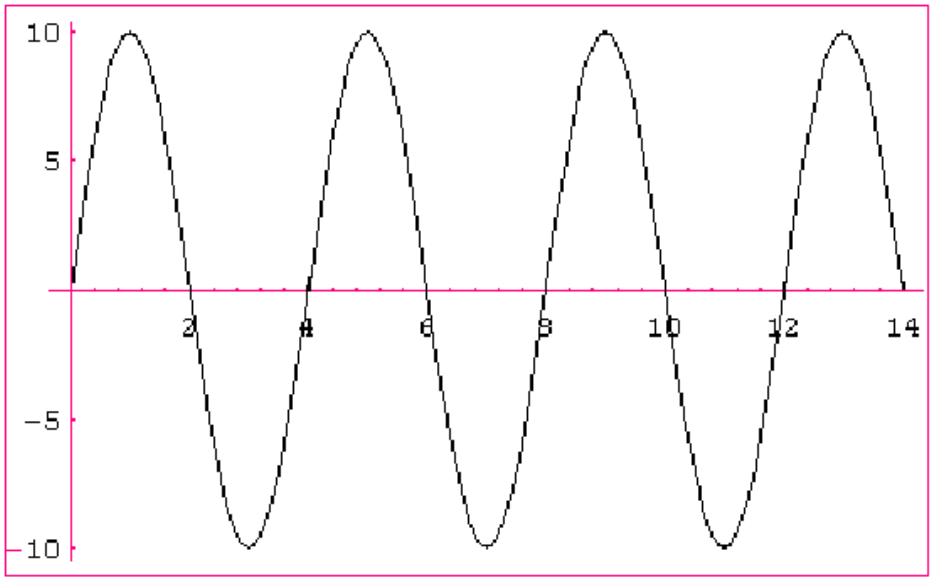

Figura 1 – Gráfico de uma função seno onde o eixo horizontal representa o deslocamento da onda com 3,5 ciclos e o eixo vertical a amplitude da onda igual a 10 unidades.

A freqüência descreve o número de vibrações por segundo, ou seja, quantos ciclos completos a onda percorre por segundo. A freqüência é medida em Hertz (Hz): 1 Hz corresponde a um ciclo de vibração por segundo.

Por exemplo, quando colocamos um diapasão para vibrar, suas hastes vibrarão a uma freqüência de 440 Hz, ou 440 ciclos por segundo, correspondente à nota musical Lá. Essa nota pode ser perfeitamente descrita pela sua freqüência (440 Hz), comprimento de onda[2] (0,77 m no ar) e uma amplitude que vai depender da energia utilizada para colocá-lo em vibração e que descreve a intensidade na variação de pressão do ar.

Outra característica importante de uma onda é que ela transporta energia sem transportar matéria. Isso pode ser observado quando jogamos uma pedra num lago de água parada. Não há transporte das moléculas de água, mas observamos uma "perturbação" se propagando do ponto onde jogamos a pedra para todos os pontos da beira do lago. Podemos ver que ela transporta energia, caso haja uma folha na superfície da água. Quando a perturbação passar pela folha, ela vai entrar em movimento (na direção vertical, atingindo o pico da onda, e depois descendo passando pelo "vale" da onda), voltando ao repouso depois da passagem.

[2] O comprimento de onda é calculado através da relação $v=\lambda f$, onde v é a velocidade da onda, λ o comprimento e f a freqüência.

3. Freqüências naturais

Qualquer corpo sólido e mesmo as pequenas moléculas que formam os objetos macroscópicos possuem uma certa vibração natural, uma "freqüência característica".

A combinação das freqüências de todos os átomos cria um "padrão de vibração" que caracteriza os corpos.

As freqüências ligadas à música são criadas por um estímulo ao corpo que será posto para vibrar.

A energia natural de vibração depende da densidade, rigidez, constituição molecular, forma e uma enorme variedade de outros fatores relacionados ao material que vibra.

Um exemplo de padrões de vibração característicos pode ser observado se uma pancada leve for dada no tampo de um violão ou no tampo da caixa de ressonância de um piano. É notável a diferença de som produzido.

A combinação desse padrão de vibração (a soma das diversas freqüências individuais) pode ser representada, genericamente, na forma descrita abaixo:

$$\text{SOM} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} C_i \quad (1)$$

onde N é um número inteiro qualquer e cada termo C_i corresponde a uma determinada freqüência, múltipla da freqüência do termo C_1 para sons harmônicos.[3]

Chamamos essa série de "série harmônica" e cada termo da série é chamado de harmônico.

O termo fundamental, C_1, é o tom (fundamental) e os termos seguintes são os sobretons. Como exemplo podemos decompor a nota musical Lá fundamental do piano ($Lá_4$) que vibra a uma freqüência de 440 Hz. O segundo harmônico (primeiro sobretom) vibrará em 880 Hz, o terceiro (segundo sobretom) em 1320 Hz e assim por diante.

A música caracteriza-se por um conjunto definido de freqüências e os instrumentos musicais devem ser capazes de produzir essas freqüências e amortecer outras. A produção do som está associada à transferência de energia por um elemento excitador (por exemplo o arco de um violino) para o veículo produtor do som, seguida da colocação do ar em movimento e da sustentação da intensidade em níveis aceitáveis para que o som possa ser aproveitado em termos musicais.

Cada tipo de instrumento tem uma espécie de "assinatura", um conjunto de características sonoras associado que possui uma descrição matemática precisa.

O que diferencia um instrumento de outro são as amplitudes e o tempo de duração de cada um dos harmônicos presentes no som resultante e o resultado acústico da combinação das duas propriedades tem o nome de timbre.

---

[3] Nem todo instrumento musical é harmônico e nem todo som pode ser representado por uma série harmônica.

A percepção sonora de um ouvinte numa sala de concerto ou em um ambiente fechado, por exemplo, não é só resultado da forma como o som é produzido no instrumento. Uma série de fenômenos ligados à teoria da produção de ondas influencia essa percepção de modo muitas vezes dramático. Por exemplo, podemos citar as tentativas muitas vezes frustradas de se fazer shows de bandas de rock em locais fechados como ginásios esportivos. Todos nós percebemos a interferência e uma espécie de "eco" com o qual os engenheiros de som sempre têm problemas. A percepção do som da banda é uma se estamos de frente para o palco, diferente se nos encontramos fora do "eixo" das caixas de som e ainda outro se estivermos do lado de fora do ginásio. Em todos esses casos, estaremos ouvindo a mesma banda, tocando a mesma música, mas algumas das propriedades ligadas à propagação das ondas afetam essa percepção. Os principais efeitos são a refração, a difração, a reflexão, a interferência e os efeitos de transmissão, absorção e dispersão das ondas.

A refração é a variação na direção da transmissão do som causada por uma variação espacial na velocidade de propagação do som no meio. No nosso caso, consideramos sempre o meio como sendo o ar. Notamos o efeito que a refração tem na propagação do som ao ligarmos um aparelho de som dentro de um quarto fechado e tentarmos ouvir o que está sendo tocado colando o ouvido na porta do quarto. A velocidade de propagação da onda na madeira da porta modifica a nossa percepção, fazendo com que, embora a característica principal da música se mantenha, alguns detalhes e freqüências sejam amortecidos ou ressaltados.

A difração é a mudança na direção da propagação da onda devido à passagem do som por um obstáculo qualquer. Isso permite que possamos ouvir o rádio num local da casa diferente de onde o rádio se encontra. É notável a relação entre o comprimento de onda, as dimensões do obstáculo e a difração. Quanto maior a razão entre os dois primeiros, maior é a difração.

A reflexão, observada quando existe o encontro de uma onda com uma superfície rígida, mantém as características da onda incidente e ocorre sempre que as dimensões da superfície rígida forem muito maiores do que o comprimento de onda. Um exemplo interessante de reflexão sonora é o eco, observado sempre que a onda incidente possui intensidade suficiente e permite um atraso tal que a onda refletida seja percebida distintamente.

A absorção e a transmissão (onda refratada), de uma certa forma modificam as características da onda incidente. A absorção ocorre quando uma onda atinge um obstáculo qualquer e deposita parte de sua energia sonora, sendo refletida, transmitida ou refratada com uma intensidade menor. A parcela de energia depositada normalmente é transformada em calor. A transmissão acontece em praticamente todos os refletores ou absorvedores de som, causando uma propagação da onda na superfície rígida que causou a reflexão, por exemplo.

4. Análise dos sons

O ouvido humano médio é capaz de distinguir cerca de 1400 freqüências discretas, variando entre aproximadamente 20 Hz e 20000 Hz. Sons fora deste intervalo não são percebidos, ou porque não possuem energia suficiente para excitar o tímpano, ou porque a freqüência é tão alta que o tímpano não consegue perceber. Entretanto, quando o som situa-se no intervalo mencionado, a vibração do tímpano gera uma corrente elétrica, um estímulo, que será enviado ao cérebro. A estes estímulos físicos mensuráveis correlacionamos sensações mentais. Fisicamente, detecta-se uma freqüência, uma amplitude e uma composição de diferentes senóides num espectro sonoro, todas múltiplas da fundamental para sons harmônicos.

A cada um desses parâmetros físicos está associada uma interpretação mental dos sons quanto à sua altura, à sua intensidade e ao seu timbre, respectivamente.

Podemos então fazer dois tipos de análise sobre o som. Uma delas é a análise qualitativa, que descreve as propriedades sonoras em termos da nossa percepção, conforme a receita mencionada acima. Esse tipo de análise não pode ser quantificado e, muitas vezes, modifica-se de acordo com as nossas emoções. A outra forma, matemática, descreve as propriedades físicas do som e é mensurável univocamente.

Em termos perceptivos, o som pode ser descrito através da sua altura, timbre e intensidade. O timbre está associado à qualidade do som. Ele pode ser comparado a uma "receita mental" para distinguir sons complexos (formados por uma superposição de diversos sons relacionados entre si). Sons provenientes de instrumentos diferentes são perfeitamente distintos, mesmo que exatamente a mesma nota musical seja tocada, uma vez que eles possuem diferentes "receitas de composição".

O timbre está associado à série harmônica do som (no caso de instrumentos harmônicos), onde cada nota musical é composta de uma nota fundamental e uma combinação de harmônicos superiores com diferentes freqüências (múltiplas da freqüência fundamental), diferentes intensidades e diferentes durações.

A altura está ligada à percepção de mais agudo e mais grave. Quanto mais alto é um som, mais agudo ele é. Esta diferenciação é baseada nas variações da freqüência de vibração destes sons. Aos sons graves relacionam-se as baixas freqüências e aos agudos as altas. A freqüência é um conceito objetivo e pode ser cientificamente medido. A altura do som depende da percepção sonora de quem está ouvindo o som e é bastante subjetivo. Entretanto, a relação direta entre os dois pode ser claramente percebida.

Quanto à intensidade pode-se dizer que um som é forte ou fraco. Intensidade pode ser interpretada como a quantidade de energia sonora que chega aos nossos ouvidos, ou seja, classifica-se como mais fortes os sons provenientes de vibradores que oscilam em maiores amplitudes exercendo assim uma maior pressão sobre o ar.

Considerando os fatores acima citados, vemos que o som é bastante afetado pelas condições do ambiente. Quando percebemos um som, diversos fatores externos à fonte sonora influenciam na qualidade deste: as paredes e as propriedades de seu revestimento, o volume de ar da sala, a densidade do ar, a umidade, o coeficiente de reverberação do recinto, etc. Portanto, uma fonte sonora não produz o mesmo som em ambientes diferentes, principalmente se esta fonte for um instrumento musical. Nesse caso, ele está sempre sujeito a alterações de timbre e volume quando submetido às alterações climáticas. As ondas sonoras, ao deixarem a fonte, sofrem uma série de alterações qualitativas.

A escolha de um bom instrumento musical é algo extremamente delicado, uma vez que a análise de sua qualidade sonora pode ser comprometida em função do local em que ele se encontra, ou das condições climáticas da época, além da percepção sonora da pessoa que toca o instrumento.

É interessante ressaltar que a percepção do timbre e do volume está relacionada com a série harmônica e com a quantidade de energia sonora gerada por um instrumento musical. Portanto, diferenças sonoras sutis podem não ser percebidas quando dois instrumentistas tocam um certo instrumento, mas são detectadas por medidas físicas.

5. Intervalos musicais

Se tomarmos duas notas musicais, a primeira mais grave, com uma freqüência de m Hz e uma mais aguda, com freqüência de n Hz, o intervalo entre elas é, por definição, a razão n/m, em que m e n são números inteiros.

Essa razão entre as freqüências e as alturas dos sons pode ser determinada no comprimento das cordas de uma harpa, no tamanho da coluna de ar dentro de uma flauta e ao se olhar dentro da caixa de um piano: as cordas mais curtas e as menores colunas de ar corresponderão sempre aos sons mais agudos e vice-versa.

Uma forma de analisar o conceito de intervalo é pensarmos em freqüências relativas. O ouvido humano está mais preparado para "entender" diferenças entre freqüências do que para identificar uma nota solta. Por isso, ao tocarmos uma determinada nota no piano, por exemplo, é difícil saber se aquela nota é um Dó, um $Dó_{\#}$ ou um Si. E mesmo os ouvidos mais treinados, capazes de perceber essa diferença, não têm condições fisiológicas de distinguir intervalos inferiores ou iguais a 81/80, ou 1,0125, a chamada coma. Essa limitação fisiológica leva a duas conseqüências importantes na música. A primeira é que, embora exista um número infinito de freqüências (um "continuum"), somente é possível definir um número finito de intervalos perceptíveis ao ouvido humano, a partir das 1400 freqüências discretas mencionadas na seção anterior. Isso leva à noção de escala musical. A outra

é que, dentro do intervalo de uma coma, uma pequena "desafinação" é perfeitamente tolerável.

O conceito de raiz harmônica está diretamente ligado ao conceito de interferência. Se tocarmos duas notas musicais com freqüências de ***m*** Hz e ***n*** Hz, a sua raiz harmônica é uma nota mais grave, produzida pela interferência entre elas, dada pelo máximo divisor comum das duas. A raiz harmônica da combinação do Dó 3 (264 Hz) e do Sol 3 (396 Hz) é o Dó 2 (132 Hz). A sensação que se tem quando tocamos a combinação Dó 3 – Sol 3 é que se está ouvindo um Dó 2 desfalcado de alguns harmônicos, inclusive da nota fundamental.

A proximidade entre a raiz harmônica de um intervalo e a mais grave de duas notas tocadas simultaneamente define o "parentesco" entre essas duas notas. Especificamente, sejam duas notas de freqüências ***m*** Hz e ***n*** Hz, ***m*** e ***n*** sendo números inteiros ($n > m$) e ***q*** o máximo divisor comum de ***m*** e ***n***. O parentesco entre as duas notas é, por definição, o inteiro ***m/q***. A relação de parentesco entre notas é definida a partir do intervalo entre elas. Genericamente, se este intervalo é expresso pela razão ***p/q*** ($p > q$), o parentesco entre elas é de ordem ***q***. Assim, num intervalo de uma oitava, temos uma relação ***p/q*** = 2/1, então o parentesco é de primeiro grau (a segunda nota está inteiramente contida dentro da senóide da primeira); num intervalo de quinta perfeita, a relação é ***p/q*** = 3/2, o parentesco é de segundo grau. Na quarta perfeita, ***p/q*** = 4/3 e temos um parentesco de terceiro grau e assim por diante.

Veremos que a idéia de parentesco tem implicações diretas na combinação de sons, criando os conceitos de consonância e dissonância. Essas relações são resultado das possibilidades discretas para a criação dos cerca de 1400 intervalos comentados anteriormente. Certas combinações, dentro desse conjunto de intervalos, são mais agradáveis ao ouvido humano que outras.

6. Escalas musicais

As escalas musicais são, a rigor, a divisão da seqüência de notas contidas dentro de uma oitava. Essa divisão pode ser feita de diversas formas, obedecendo principalmente a critérios estéticos, quer em termos da melodia que as notas formam, quer em termos das relações harmônicas entre elas. Sem entrar em detalhes no processo da construção das escalas, vemos que a divisão da escala musical é feita em sete notas principais: tom – tom – semitom – tom – tom – tom – semitom.

A idéia de parentesco entre as notas (ligada à relação harmônica entre elas) pode ser analisada novamente à luz das séries de Fourier, uma vez que combinações de formas sonoras cujas freqüências não tenham entre si alguma possibilidade de interferência construtiva dentro de uma ou duas oitavas quase certamente não formarão nenhum tipo de relação harmônica, pelo menos dentro da estética ocidental.

Por exemplo, na escala de Dó maior, alguns intervalos foram arranjados para que se tornassem iguais a 9/8, ou seja, um intervalo de um tom. São esses os intervalos dó-ré, fá-sol e lá-si. Já os intervalos ré-mi e sol-lá são iguais a 10/9, ligeiramente inferiores a um tom.

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
f	*9f/8*	*5f/4*	*4f/3*	*3f/2*	*5f/3*	*15f/8*	*2f*

9/8 10/9 16/15 9/8 10/9 9/8 16/15

Como a diferença relativa entre 9/8 e 10/9 é igual a uma coma, a diferença é imperceptível. O intervalo entre mi e fá e si e dó (16/15) é ligeiramente superior a um semitom, mas também menos que uma coma. As diferenças mencionadas acima criaram duas assimetrias: uma assimetria que os músicos chamam de "primeiro grau" e que é próxima de um intervalo de ½ tom; a outra é uma assimetria de "segundo grau" e está relacionada ao intervalo de cerca de uma coma. Essas assimetrias levaram à criação de notas estranhas às presentes na escala de Dó maior. Isso ocorreu para permitir que uma mesma melodia pudesse ser cantada a partir de uma tônica diferente, isto é, mantendo as mesmas assimetrias (a estrutura de 2 tons, um semitom, 3 tons e mais um semitom) presentes na escala maior de sete notas.

Duas soluções foram criadas para resolver o problema das notas intermediárias. Uma delas foi a introdução das notas alteradas (sustenidos e bemóis), formadas a partir da multiplicação ou divisão da nota original por 25/24. A multiplicação criava uma nota sustenida e a divisão criava uma nota bemol. Com isso a escala de sete notas passava a ter vinte e uma notas, todas elas guardando algum parentesco com a tônica. O intervalo entre duas notas sucessivas nunca excede 25/24, que é menor do que três comas e, portanto, perceptível somente para os ouvidos mais treinados. Assim, qualquer nota imaginável, nos cerca de 1400 intervalos perceptíveis para o ouvido humano, se aproximaria de uma das 21 notas da escala de naturais, sustenidos e bemóis com um erro menor do que uma coma e meia. Esta escala é chamada de escala justa.

A outra solução, ideal para os instrumentos de teclado, foi dividir a afinação e distribuir esse erro, inevitável por causa da forma da divisão da escala, entre notas vizinhas. Dividiu-se a oitava em 12 intervalos rigorosamente iguais à raiz duodécima de 2, ou seja, a razão entre as notas passou a ser de 1,059 entre semitons e 1,122 por tom. Com isso, o dó sustenido se iguala ao ré bemol, o mi sustenido ao fá e o fá bemol ao mi, reduzindo as 21 notas iniciais a 12. Esta escala é chamada de escala temperada.

É interessante notar que, devido à distribuição de freqüências ser contínua, essa divisão não alterou em nada a análise física dos sons. Ao medir o espectro sonoro de

uma nota musical, observamos exatamente os mesmos harmônicos e freqüências que seriam esperados em uma série normal.

O que se altera é a definição de onde fica a freqüência fundamental da nota. Por exemplo, a junção do Dó$_{\#}$ com o Ré$_{b}$ faz com que a freqüência fundamental da nota (já que, na escala temperada ambos são a mesma coisa e na justa não) seja ligeiramente deslocada para um ponto entre ambas as notas.

Na escala justa, as notas guardam sempre uma relação de parentesco com a tônica, uma vez que a construção da escala é feita sempre a partir de uma subdivisão de intervalos racionais. Na escala temperada esse parentesco não existe, uma vez que a relação entre as freqüências é expressa por números irracionais. A sensação de parentesco resulta, na melhor das hipóteses, da ilusão auditiva resultante da falta de sensibilidade a intervalos de uma ou duas comas. A Tabela 1 mostra, de forma comparativa, a diferença entre as freqüências e as relações entre notas nas escalas justa e temperada. Note-se a existência de intervalos na escala justa que foram simplesmente eliminados na escala temperada, por uma questão de simplificação.

O grande problema ligado às escalas diferentes encontra-se quando instrumentos temperados como o piano e o violão tocam com instrumentos não temperados, como o violino, por exemplo. A única coisa a ser feita, nesse caso, é o violinista ouvir e ajustar a nota tocada ao temperamento do outro instrumento, para que não haja um choque harmônico muito grande.

Tabela 1 – Relação entre as notas musicais, intervalos e freqüências correspondentes

Nota	Intervalo com a nota básica	Afinação natural	Freqüência (Hz)	Afinação temperada	Freqüência (Hz)
Dó	Uníssono	1=1,000	132,000	1,000	132,000
Dó #	Semitom	25/24=1,042	137,544	1,059	139,788
Ré $_{b}$	Segunda diminuta	27/25=1,080	142,560	1,059	139,788
Ré	Segunda maior	9/8=1,125	148,500	1,122	148,104
Ré #	Segunda aumentada	76/64=1,172	154,704	1,189	156,948
Mi $_{b}$	Terça menor	6/5=1,200	158,400	1,189	156,948
Mi	Terça maior	5/4=1,250	165,000	1,260	166,320
Fá $_{b}$	Quarta diminuta	32/25=1,280	168,96	1,260	166,320
Mi #	Terça aumentada	125/96=1,302	171,864	1,335	176,220
Fá	Quarta perfeita	4/3=1,333	175,956	1,335	176,220
Fá #	Quarta aumentada	25/18=1,389	183,348	1,414	186,648

Sol $_b$	Quinta diminuta	36/25=1,440	190,080	1,414	186,648
Sol	Quinta perfeita	3/2=1,500	198,000	1,498	197,736
Sol #	Quinta aumentada	25/16=1,563	206,316	1,587	209,484
Lá $_b$	Sexta menor	8/5=1,600	211,200	1,587	209,484
Lá	Sexta maior	5/3=1,667	220,044	1,682	222,024
Lá #	Sexta aumentada	125/72=1,737	229,284	1,782	235,224
Si $_b$	Sétima menor	9/5=1,800	237,600	1,782	235,224
Si	Sétima maior	15/8=1,875	247,50	1,888	249,216
Dó $_b$	Oitava diminuta	48/25=1,920	253,440	1,888	249,216
Si #	Sétima aumentada	125/64=1,953	257,796	2,000	264,000
Dó	Oitava perfeita	2=2,000	264,000	2,000	264,000

7. Ondas sonoras

As ondas sonoras complexas geradas por um instrumento musical sempre poderão ser representadas por uma série de Fourier, composta das notas fundamentais e da série de harmônicos ou sobretons, cada um com a sua amplitude e fase. A expressão matemática de uma onda complexa poderia ter a seguinte forma:

$$P_1 = \text{sen } \omega t + 1/2 \text{ sen } 2\omega t + 1/3 \text{ sen } 3\omega t + 1/4 \text{ sen } 4\omega t + 1/5 \text{ sen } 5\omega t \qquad (2)$$

As figuras abaixo mostram as componentes individuais da série acima construídas separadamente, em conjunto e o resultado das somas de todas (P) respectivamente.

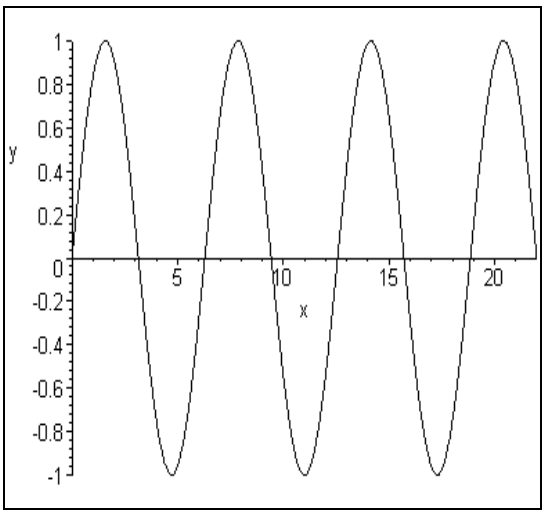

Figura 2 – Gráfico da função sen ωt.

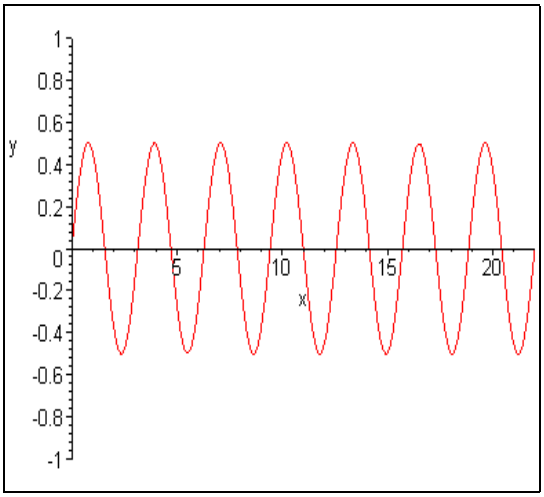

Figura 3 – Gráfico da função 1/2 sen 2 ωt .

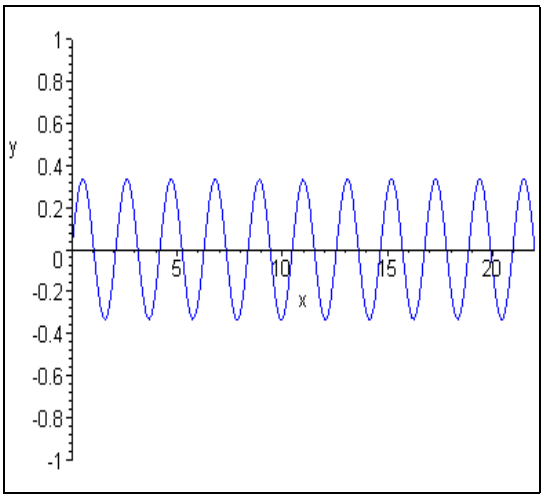

Figura 4 – Gráfico da função 1/3 sen 3ωt.

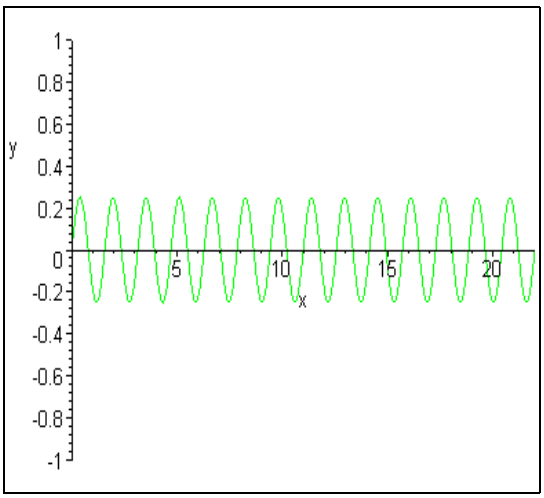

Figura 5 – Gráfico da função 1/4 sen 4ωt.

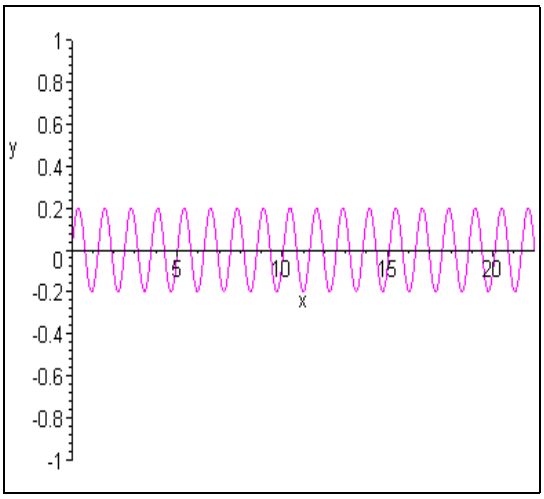

Figura 6 – Gráfico da função 1/5 sen 5ωt .

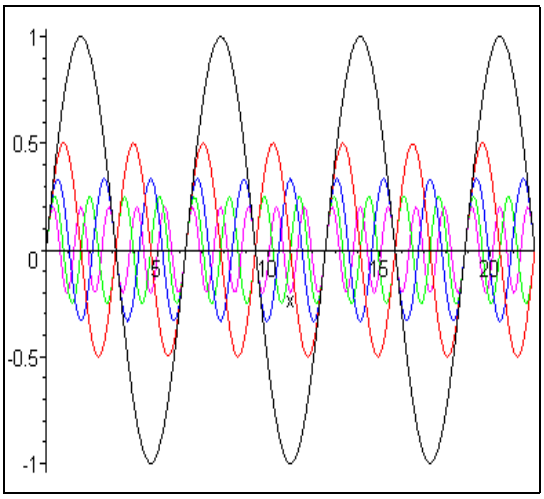

Figura 7 – Gráfico das 5 componentes individuais.

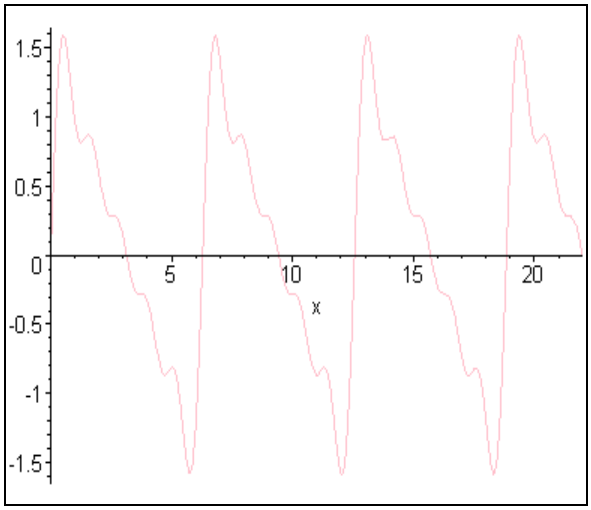

Figura 8 – Gráfico da onda complexa P_1.

A estrutura de uma onda sonora produzida por um instrumento pode ser extremamente complexa. Como exemplo temos duas ondas complexas e suas respectivas formas:

$$P_2 = \cos \omega t + 0{,}7 \cos 2\omega t + 0{,}5 \cos 3\omega t \qquad (3)$$

$$P_3 = \text{sen}\omega t - 0{,}5\text{sen}3\omega t + 0{,}33\text{sen}5\omega t - 0{,}25\text{sen}7\omega t \quad (4)$$

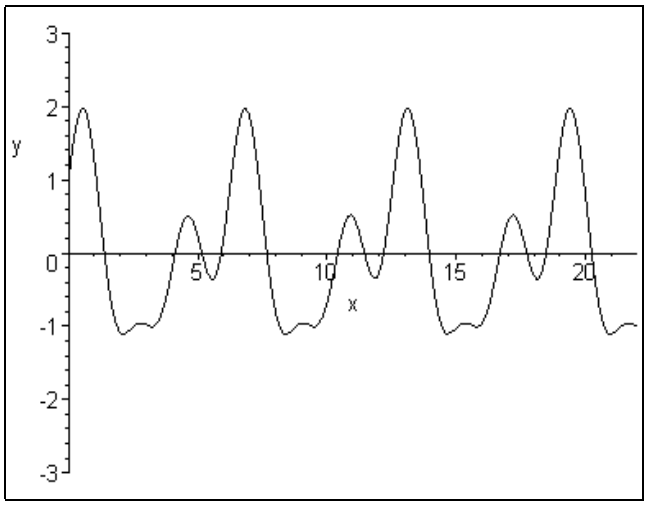

Figura 9 – Gráfico da onda complexa P_2.

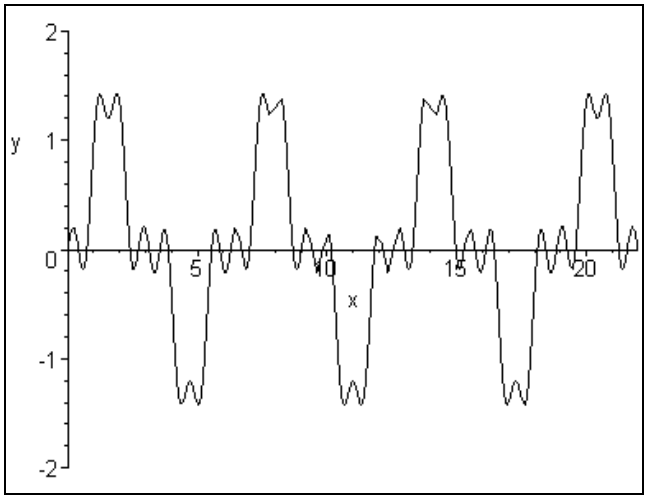

Figura 10 – Gráfico da onda complexa P_3.

O espectro sonoro é uma forma de mostrar a estrutura de uma onda complexa. Ele é capaz de mostrar quais são as freqüências principais que constituem um determinado som. Então, ao invés de um gráfico onde temos a amplitude em função do tempo, teremos um gráfico de amplitude x freqüência. Essa mudança é conhecida como transformada de Fourier e será usada na análise das notas musicais nas seções abaixo. Para facilitar os cálculos computacionais foi utilizada a transformada rápida de Fourier.[4]

O que diferencia um instrumento do outro é exatamente a distribuição de freqüências e das formas de ondas que vimos nas figuras anteriores. Instrumentos de corda são, em geral, bem mais ricos em termos de harmônicos e possuem a forma de onda mais complexa que outros.

A freqüência fundamental de ressonância dos instrumentos de corda é dada pela fórmula abaixo. Sistemas acionados por cordas vibrantes possuem uma freqüência fundamental que depende da tensão, massa e comprimento da corda:

$$f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (5)$$

onde L é o comprimento da corda, T a tensão e ρ a densidade linear. Utilizando as expressões:

$$v = \lambda f \qquad (6)$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (7)$$

[4] Uma explicação mais detalhada da transformada rápida de Fourier é feita na referência 1.

encontramos:

$$f_0 = \frac{v}{2L} \qquad (8)$$

As freqüências presentes na corda são um múltiplo inteiro n de f_0:

$$f = \frac{nv}{2L} \qquad (9)$$

8. Experimentos visando a demonstração das propriedades das ondas numa corda

8.1. Relação entre comprimento e freqüência

A tabela 2 mostra as notas musicais que conseguimos se pressionamos sobre cada traste (os cinco primeiros) a sexta corda do violão (correspondente à nota mi).

A segunda coluna corresponde ao comprimento da corda do ponto onde ela é fixa até o traste correspondente à nota. A primeira linha, portanto, é o comprimento total da corda. Assumimos o valor da freqüência calculada a partir do comprimento total da corda como sendo igual ao tabelado[5] e calculamos os seguintes através da equação (9). As medidas da distância entre os trastes foram feitas com uma régua (erro intrínseco de 0,5 mm). Consideramos no erro a espessura dos trastes e a da corda[6].

Tabela 2 – Relação entre as notas, comprimento da corda do violão, freqüência tabelada e freqüência calculada a partir dos comprimentos respectivos.

Nota	Comprimento da corda (cm)	Freqüência tabelada na afinação temperada (Hz)	Freqüência calculada a partir do comprimento da corda (Hz)
Mi	61,0 ± 0,3	83,160	83,160
Fá	57,7 ± 0,3	88,110	87,92 ± 0,63
Fá#	54,7 ± 0,3	93,324	92,74 ± 0,68
Sol	51,9 ± 0,3	98,868	97,74 ± 0,74
Sol#	49,3 ± 0,3	104,742	102,90 ± 0,81
Lá	46,8 ± 0,3	111,012	108,39 ± 0,88

[5] Ver tabela 1, dividindo as freqüências por 2 (uma oitava abaixo).
[6] Os cálculos de erro foram baseados na referência 8.

8.2. Análise de Fourier

A figura 11 foi obtida gravando a nota musical Sol com um violão no programa "Coll Edit". Nesta janela podemos ampliar a forma da onda, normalizar e obter o espectro de freqüência (figura 12).

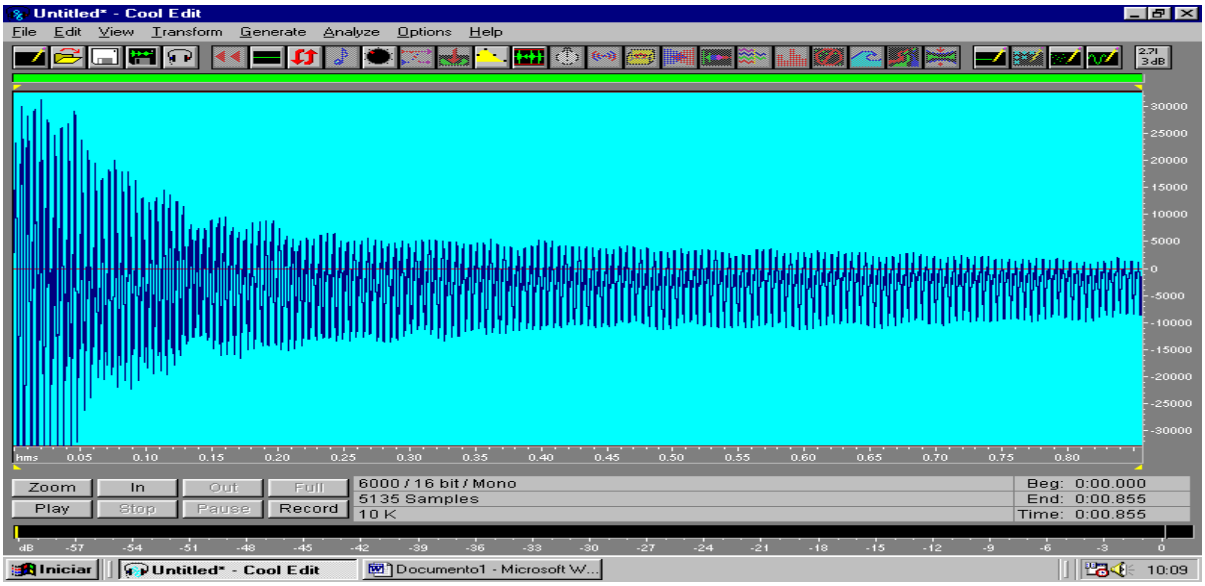

Figura 11 – Gráfico correspondente ao sinal obtido para a nota musical Sol.

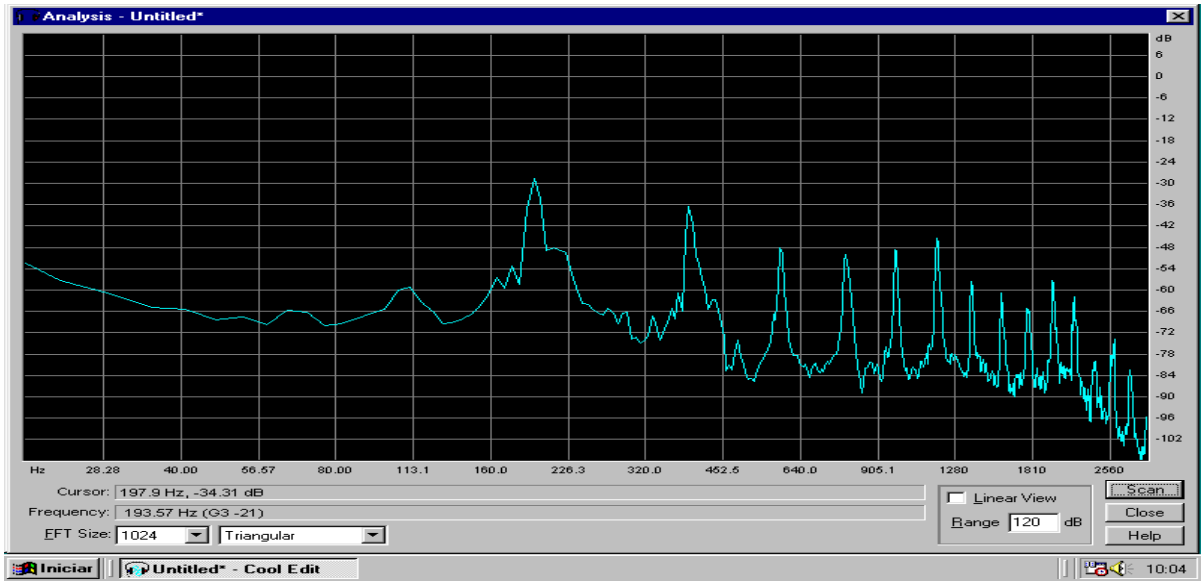

Figura 12 –Espectro de freqüência.

O espectro de freqüências foi obtido fazendo-se a transformada rápida de Fourier do sinal da figura 11, para todo o intervalo de tempo. Nota-se os picos correspondentes às freqüências 194 Hz (determinado pelo programa); 3,8 x 10^2 Hz (determinado com uma régua); 5,9 x 10^2 Hz; 7,9 x 10^2 Hz; 1,0 x 10^3 Hz; 1,2 x 10^3 Hz; 1,4 x 10^3 Hz;

1,6 x 10^3 Hz; 1,8 x 10^3 Hz; 2,0 x 10^3 Hz; 2,2 x 10^3 Hz; 2,4 x 10^3 Hz; 2,6 x 10^3 Hz e 2,8 x 10^3 Hz, que são o harmônico fundamental e os harmônicos superiores do Sol_2.

8.3. Análise de Fourier evidenciando as consonâncias (ou parentesco) das notas de um acorde

Fizemos a análise de Fourier das notas componentes do acorde de Dó maior (Dó-Mi-Sol) e do acorde de Dó maior com sétima (Dó-Mi-Sol-Si_b), para evidenciar as consonâncias entre os harmônicos superiores de cada nota.

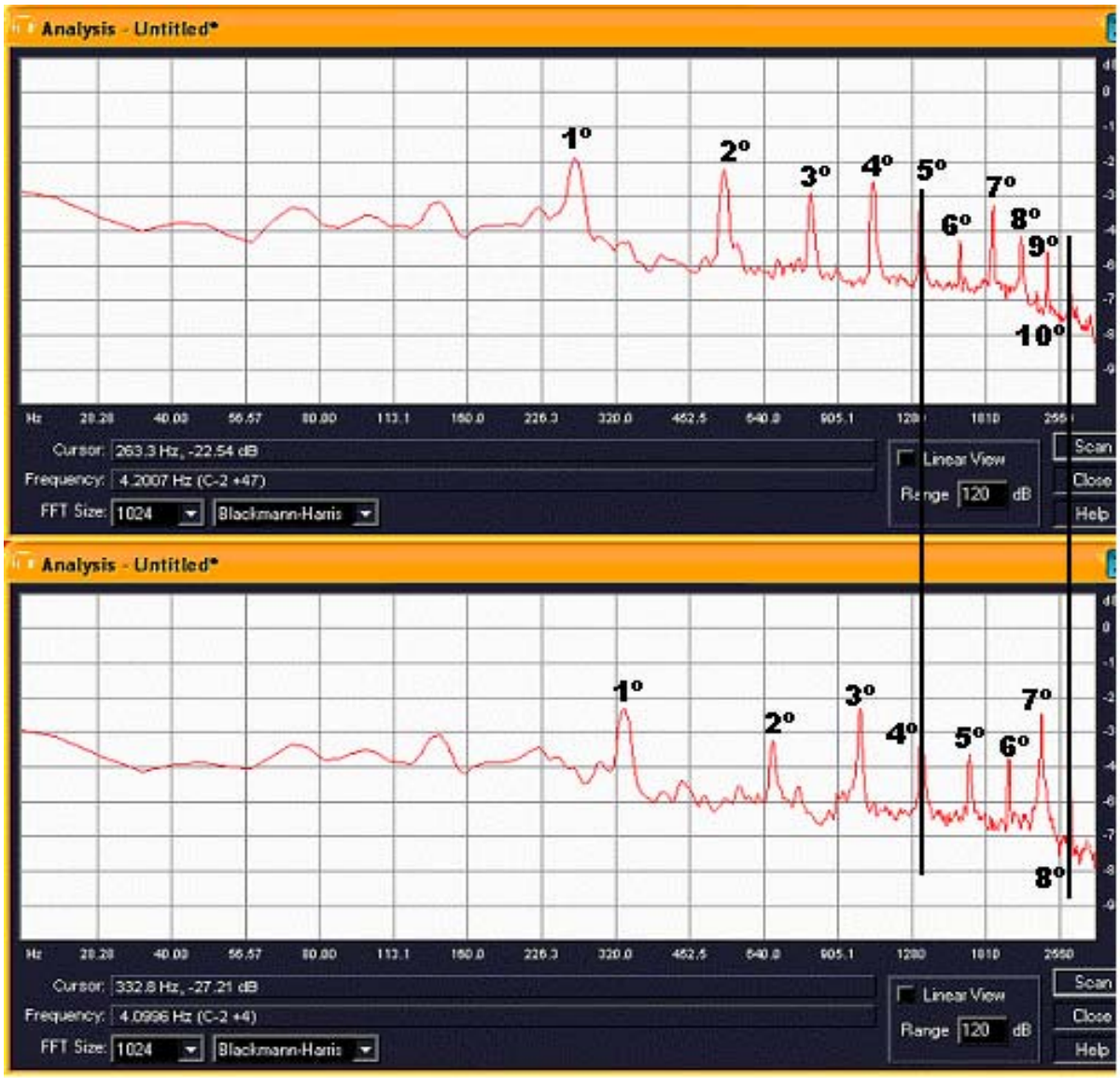

Figura 13 – Gráficos correspondentes ao Dó com freqüência de 264 Hz (tabelado) e ao Mi de 332,64 Hz respectivamente.

Os espectros de freqüências aqui foram obtidos da mesma forma. O intervalo Dó-Mi corresponde a uma terça maior (5/4=1,250 na afinação natural e 1,260 na temperada). Os números indicados nos espectros indicam os harmônicos correspondentes e através das linhas vemos que a proporção 5/4 é mantida.

Realizamos gravações análogas para as notas Sol e Si_b e as comparamos com o mesmo Dó aqui analisado.

Há uma concordância muito boa entre a freqüência obtida tocando as cordas do violão com as encontradas na tabela 1.

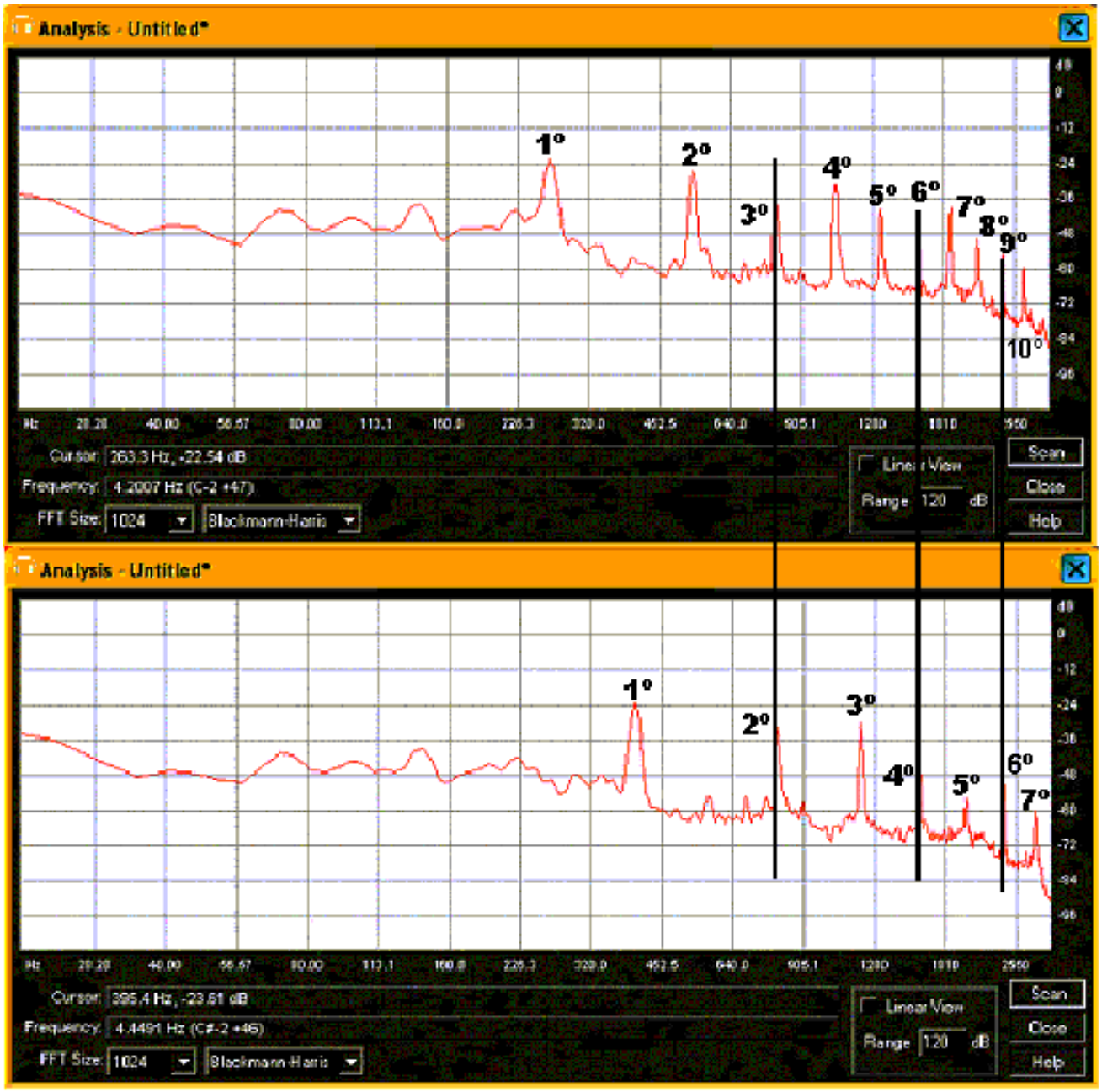

Figura 14 – Gráficos correspondentes ao Dó com freqüência de 264 Hz (tabelado) e ao Sol de 395,472 Hz respectivamente.

O intervalo Dó-Sol corresponde a uma quinta perfeita (3/2=1,500 na afinação natural e 1,498 na temperada).

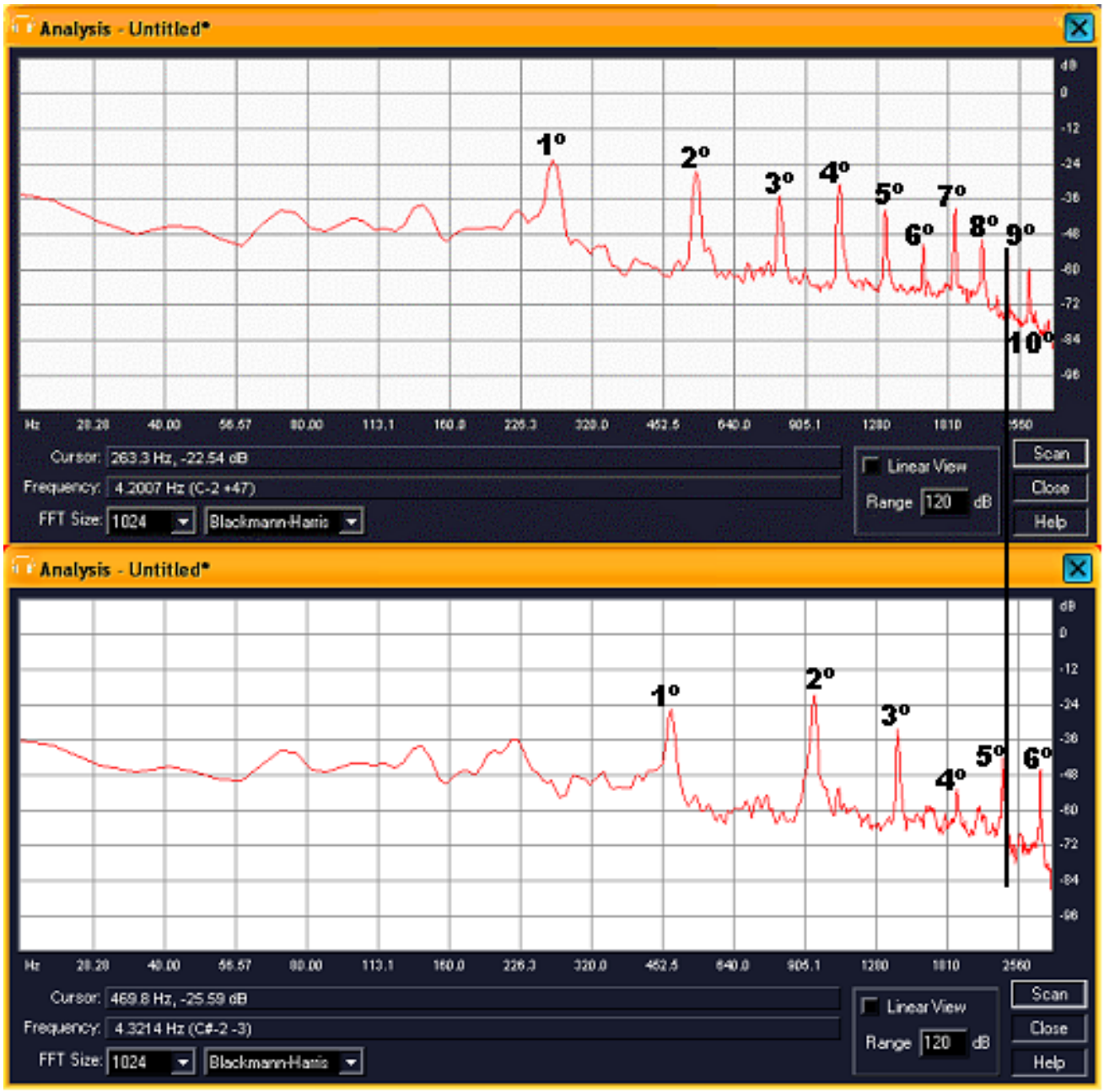

Figura 14 – Gráficos correspondentes ao Dó com freqüência de 264 Hz (tabelado) e ao Si_b de 470,448 Hz respectivamente.

O intervalo Dó-Si_b corresponde a uma sétima menor (9/5=1,800 na afinação natural e 1,782 na temperada).

8.4. Diferença no timbre de uma corda tocada em diferentes posições

Na figura 15 mostramos a diferença entre tocar a corda do violão na metade de seu comprimento (acima) e tocar na extremidade da corda (abaixo). A escala da intensidade (vertical) é em decibéis (logarítmica).

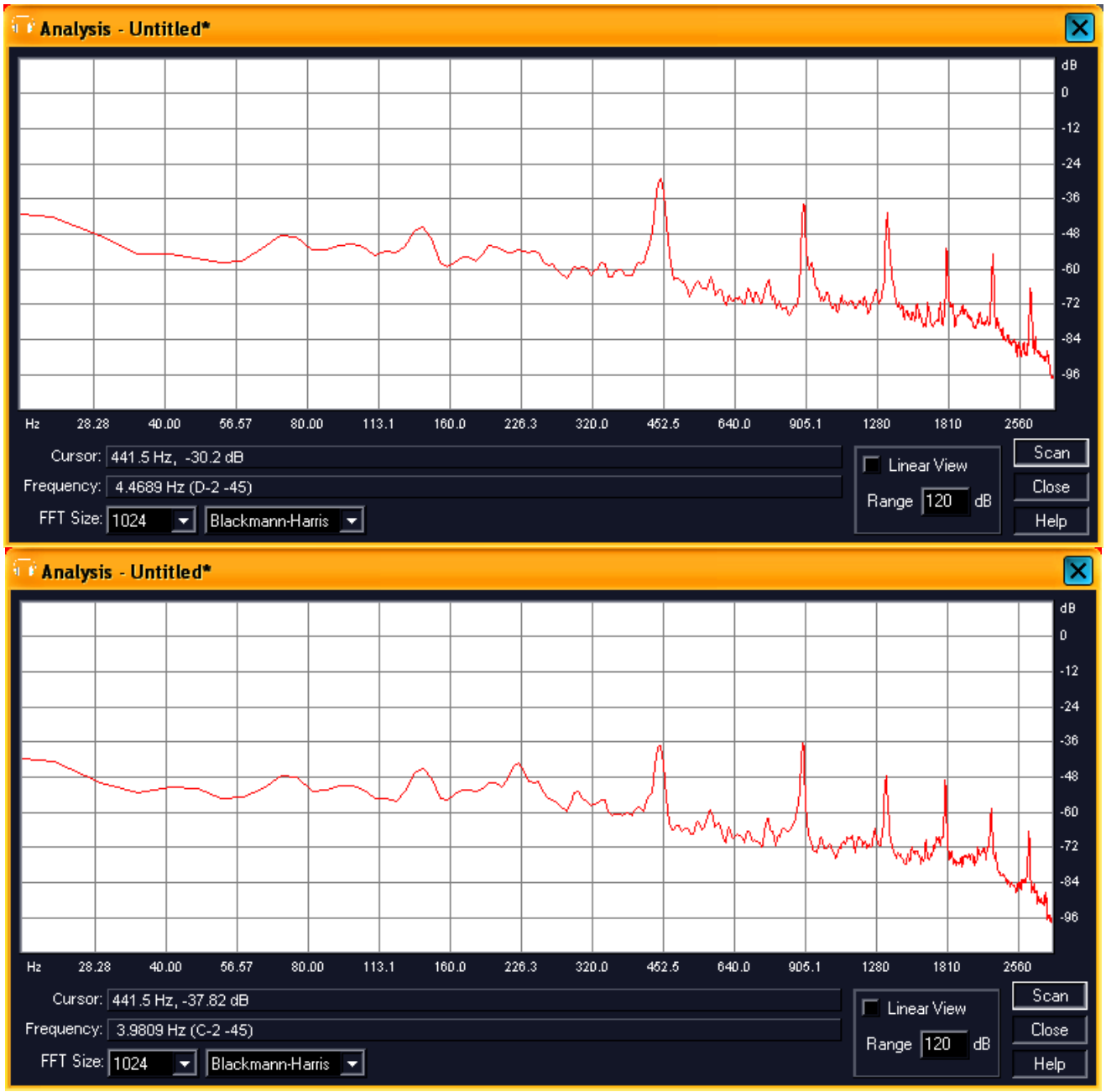

Figura 15 – Gráficos correspondentes ao Lá com freqüência de 440Hz (tabelado).

Tabela 3 – Relação entre a freqüência, o harmônico correspondente e sua intensidade.

Freqüência (Hz)	Harmônico	Intensidade (dB)	
		Centro	Extremidade
440	fundamental	- 30,2	- 37,82
880	2º	- 38	- 36
1320	3º	- 41	- 47
1760	4º	- 53	- 49
2200	5º	- 55	- 59
2640	6º	- 67	- 66

A tabela 3 mostra as intensidades de cada harmônico para os dois casos. Podemos ver que o peso de cada harmônico é diferente nas duas situações. Isto se deve ao fato da corda ter sido excitada de duas formas diferentes: no centro e na extremidade. Como conseqüência o timbre muda de uma situação para a outra.

9. Conclusões

Utilizando basicamente duas ferramentas bem simples: o violão e o programa "Cool Edit", conseguimos verificar vários aspectos das propriedades das ondas numa corda de extremidades fixas e explicar alguns conceitos da teoria musical. Os fundamentos matemáticos que estruturam esta teoria foram evidenciados de forma simples e clara, com uma precisão adequada, tornando este trabalho aplicável numa aula de Física II, onde os alunos já tiveram contato com a Ondulatória. Já a demonstração relação entre comprimento, tensão, densidade e freqüência pode ser no ensino de segundo grau.

Além disso, o projeto pode servir de inspiração para a abordagem de outros aspectos da física da Música no ensino de física.

10. Referências

1. "Mathematical Methods for Physicists" (G. Arfken, H. Weber), 5ª edição, Capítulo 14, Academic Press, 2001.
2. www.fisica.ist.utl.pt/~nfist/semfis/3sf/musica/fourier.htm
3. "Advanced Engineering Mathematics" (E. Kreyszig), 8ª edição, Capítulo 10, Wiley & Sons, 1999.
4. "Musical Acoustics" (Donald E. Hall), Brooks/Cole Publishing Company, California/USA, 1990.
5. "Fast Fourier Transforms" (J. S. Walker), CRC Press, 1996.
6. "Fast transforms: algorithms, analyses, applications" (Douglas F. Elliott, K. Ramamohan Rao), Orlando Academic, 1982.
7. www.cefetba.br/fisica/NFL/fge2/timbre.html
8. "Guia para Física Experimental: Caderno de Laboratório, Gráficos e Erros" (Carlos H. de Brito Cruz, Hugo L. Fragnito, Ivan F. da Costa e Bernardo de A.)
9. "Music, physics and engineering" (H. F. Olson). Dover publications, Inc., New Yor1k/EUA, 1967.
10. "How things work – the physics of everyday life" (Louis P. Bloomfield). John Wiley & Sons, Inc., New York/USA, 1997.
11. "The Physics of musical instruments" (N. Fletcher e T. Rossing), Springer, 2ª edição, 1998.