

F 809 Instrumentação para Ensino

# Estudos de vibrações em placas: Figuras de Chladni



Aluno: Júlio César da Silva RA:009027

Orientadora: Profª. Iris Torriani

## Resumo

O estudo de vibrações de placas iniciou-se com os trabalhos de Ernest Chladni – físico e músico alemão – há mais de 200 anos atrás<sup>[1]</sup>. A sua experiência consistiu em polvilhar areia sobre a placa enquanto esta era posta a vibrar com um arco de violino. O intuito era analisar o comportamento vibracional de superfícies planas, mostrando os padrões formados pelas linhas nodais. O que ele observou foi que os padrões formavam figuras que emergiam da areia, e que foram chamadas “Figuras de Chladni” em sua homenagem. Esse fenômeno é bastante simples. As vibrações produzem ondas bidimensionais estacionárias nas placas, formando os nodos (regiões sem vibração) e antinodos (regiões de máxima vibração). Entendido isso, fica fácil perceber como as figuras se formam. A conclusão que se chega então, é que os grãos de areia vão se posicionar sobre as regiões nodais da placa, já que ali eles não serão incomodados e ficarão parados até que algo lhes tirem desse estado. Esses nodos são geralmente linhas nodais que podem assumir formas de círculos, quadrados, de um X, de um anel, entre outras. O que se consegue com isso, são figuras devidas a esses padrões e essas são as figuras que Chladni obteve.

## Introdução

Ernest Florens Friedrich Chladni da Saxônia é freqüentemente referenciado como “o Pai da Acústica”. Seus trabalhos com vibrações de placas serviram como inspiração para os trabalhos de muitos outros cientistas, incluindo Faraday, Strehlke, Savart, Young, e, especialmente, Mary Desiree Waller<sup>(1)</sup>. A experiência de Chladni consistia em polvilhar areia fina sobre uma placa fixa e circular, que por sua vez era atritada com um arco de violino na sua extremidade. Isso fazia com que a areia fosse formando os vários padrões de vibração e linhas nodais sobre a placa. Nesse estudo ele mostrou que as freqüências de vibração de uma placa variam de acordo com a relação  $f \sim (m+2n)^2$ , onde n é o número de nodos circulares e m é o número de nodos estendidos diametralmente a placa – relação essa que Lord Rayleigh chamou de Lei de Chladni<sup>[2]</sup>. Quanto a teoria matemática desenvolvida para essas vibrações, esta é bastante complexa e exige o conhecimento de matemática avançada. Por esse motivo ela está apresentada resumidamente apresentada no apêndice.

Os resultados obtidos são realmente impressionantes. De fato, as demonstrações de Chladni, feitas em muitas instituições acadêmicas e científicas, freqüentemente reuniam grandes multidões que ficavam impressionadas com a qualidade estética dos sofisticados padrões das placas vibrando. O próprio Napoleão ficou tão deslumbrado com o trabalho que financiou os estudos posteriores dos princípios matemáticos da vibração das placas, o que impulsionou as pesquisas em ondas e acústica<sup>[1]</sup>. Enquanto métodos e equipamentos têm sido melhorados nos últimos 200 anos, a Lei de Chladni e seus padrões são ainda regularmente empregados no estudo de vibração de placas. Além disso, a acústica é um assunto de grande importância na arquitetura e na construção de instrumentos musicais<sup>[3]</sup>.

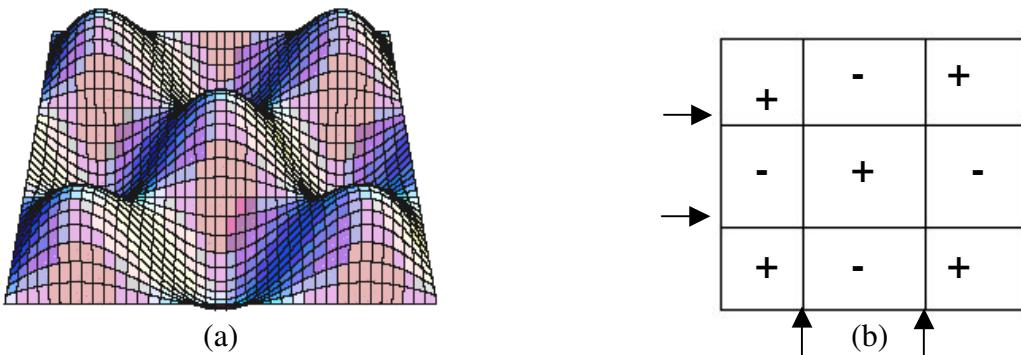
O objetivo desse projeto é fazer demonstrações de algumas dessas figuras de Chladni sobre placas vibrando, como feito por Chladni. O público-alvo são os alunos, tanto do ensino médio quanto o início de um curso superior em Física. Com isso, pretende-se mostrar que o estudo dos modos de vibração pode ser mais interessante e bonito do que parece, além de exibir a conexão que há entre som, vibrações e física. Também mostra a presença da física na música e em nosso cotidiano.

## Importância didática

Todo estudante no início de um curso de física ou até mesmo aqueles do ensino médio merecem ver uma demonstração das figuras de Chladni em placas vibrando. Dá até para imaginar o professor e os estudantes como sendo Chladni e Napoleão, respectivamente, conforme sugerido por Thomas D. Rossing<sup>[1]</sup>, já que o fato acontecido com Napoleão serviria como uma lição para os professores. Existem com isso, pelo menos duas razões principais para se considerar a importância didática desse assunto. Primeiro que, em um país onde a física é vista como uma terrível disciplina pelos estudantes de ensino médio, uma experiência como essa poderia incentivá-los a encarar essa ciência com bons olhos. Segundo, os estudantes do início de um curso de física teriam uma motivação a mais para continuar no curso ao ver demonstrações com as figuras de Chladni. Acrescentando ainda mais um motivo, a acústica é um algo que passa despercebido na maioria das vezes em que se estudam ondas, tanto no ensino médio quanto no superior. Por isso, as figuras de Chladni poderiam despertar maior interesse dos estudantes pelo assunto, além de auxiliar aprendizado deles.

### As placas vibrando e da formação das “Figuras de Chladni”<sup>[4]</sup>

Para fazer vibrar uma placa é necessária uma fonte da oscilação, ou seja, algo que provoque a vibração. No caso deste projeto e nos trabalhos de Chladni, a fonte é um arco de violino que atrita a borda da placa, o que constantemente produz ondas diferentes na placa. Entretanto, determinadas freqüências de oscilação produzem ondas estacionárias que são criadas na placa pela superposição de ondas incidentes e ondas refletidas nas bordas. Quando isso ocorre a placa pode ser considerada ressonante em uma de suas freqüências naturais. O desenho da figura 1(a) mostra uma placa vibrando com duas linhas nodais em uma direção e outras duas na direção perpendicular. Cada placa, podendo variar o seu formato geométrico de uma para outra, tem muitas freqüências diferentes, ou modos de vibração, nos quais ondas estacionárias são criadas. Um modo de vibração é simplesmente a maneira como a placa vibra.



*Figura 1 – Vibração da Placa quadrada: (a) desenho exemplificando a vibração de uma placa quadrada com duas linhas nodais em uma direção e outras duas na direção perpendicular<sup>[4]</sup>; (b) esquema mostrando as linhas nodais, indicadas por setas, do modo (2,2) correspondente da placa. Os máximos estão representados pelo sinal de + e os mínimos, pelos de -.*

Para nomear os modos de vibração de placas de diferentes geometrias utilizam-se diferentes sistemas de nomenclatura<sup>[6]</sup>. Para uma placa retangular eles são identificados por dois números no padrão (n,m) onde n é o número de nodos correndo em uma direção da

placa, normalmente paralela ou aproximadamente paralela à borda, e  $m$  o número de nodos na direção perpendicular. Para um placa circular os modos são também chamados  $(n,m)$ , mas neste caso  $n$  é o número de nodos que são diametrais à placa e  $m$  é o número de nodos circulares. Um exemplo disso está na figura 1(b), em que está mostrado o modo para  $n=2$  e  $m=2$ , sendo este então nomeado modo  $(2,2)$  da placa quadrada. O modo com menos vibração é o que vibra na freqüência fundamental, ou seja, freqüência mais baixa, e os modos vibracionais sucessivos, com mais altas freqüências, podem ser encontrados resolvendo a equação de onda bidimensional [apêndice].

Se forem consideradas placas com extremidades livres, como são as deste experimento, estas estão livres para oscilar com máxima amplitude e são, portanto, consideradas antinodos das ondas estacionárias criadas nas placas. Também, desde que o centro das placas está preso com um parafuso ele forma um nodo. No restante da placa são encontrados nodos radiais, diametais, em formato de X ou de anel, entre outros formatos, variando conforme as várias freqüências nodais. Sendo assim, os padrões obedecidos por esses nodos vão estar formando as ‘Figuras de Chladni’.

Dessa maneira, ao se polvilhar grãos de areia sobre uma placa vibrando, a areia vai se posicionar sobre essas regiões nodais, que são regiões onde as placas não vibram. Ai vem uma curiosidade: na região de antinodos, há momentos em que ocorrem máximos (picos) de vibração e em outros, mínimos (vales); então, pergunta-se por que os grãos de areia não ficam indo para as regiões em que os vales são momentaneamente formados e voltam quando formam os picos? Isso não ocorre, porque a oscilação é rápida o suficiente para que, quando os grãos vão cair nos vales, já são formados os picos. Então, não dá tempo para os grãos saírem completamente das regiões nodais. Outra coisa interessante é que a amplitude de vibração das ondas na placa é muito pequena, algo da ordem de  $0,5 \mu\text{m}$  conforme se observa utilizando técnicas holográficas<sup>[5]</sup> para a observação das figuras. Mesmo assim, com a técnica de polvilhar areia sobre a placa, que é bem mais simples que a holografia, é possível observar as ‘Figuras de Chladni’.

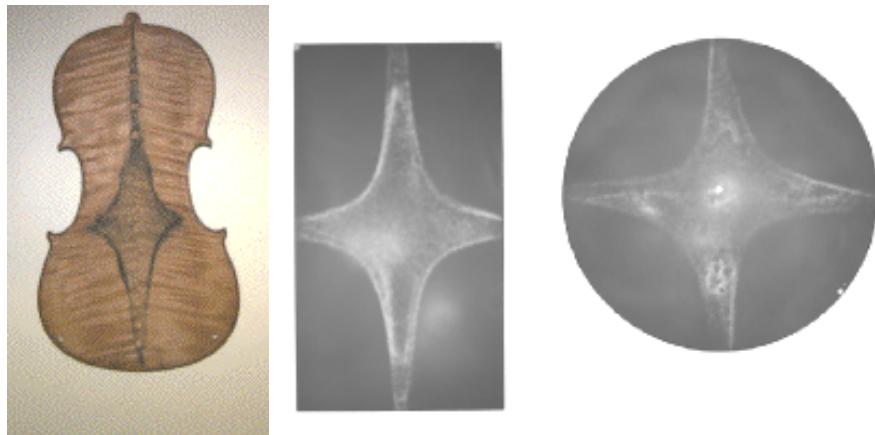
### **Utilidade das ‘Figuras de Chladni’ na construção de instrumentos musicais<sup>[6,7]</sup>**

Obter o melhor formato das placas que são utilizadas na construção de alguns instrumentos musicais, tais como, as placas de madeira para construir um violino ou um violão, é muito importante para se obter as melhores propriedades do instrumento final. As ‘Figuras de Chladni’ fornece o gabarito ideal para o fabricante durante o processo de dar a forma à placa para a estrutura final. Placas simétricas produzem padrões simétricos, ao contrário das que não são simétricas.

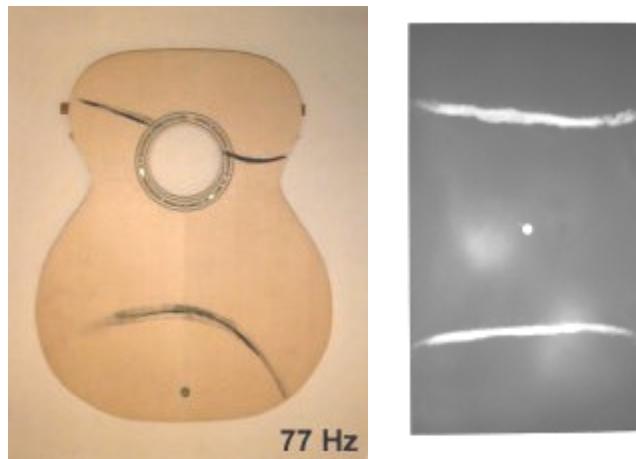
No caso do violino, as freqüências dos modos do par de placas livres são importantes e podem ser empiricamente relacionadas à qualidade do instrumento completo. Já para o violão, o ajuste da placa do tampo do violão é mais importante. Em ambos os casos, há uma dificuldade em relacionar as freqüências dos modos das placas isoladas àquelas dos modos do instrumento final. Ao longo dos séculos, fabricantes de violino têm descoberto relações empíricas entre os modos das placas livres e as propriedades do instrumento completo. Por esse motivo, muitos cientistas têm se interessado pela acústica dos violinos e muitos fabricantes desse instrumento têm se interessado por ciência, tal que um vários deles têm escrito a respeito das propriedades acústicas dos violinos e suas partes.

Quanto à nomenclatura dos modos, as placas do violino revelam modos que possuem formas mais complexas. Eles são numerados em uma maneira que, para a maioria

dos violinos, corresponde a um aumento de freqüência. Nas três fotos da figura 2 estão mostrados juntos, os modos de vibração da mais baixa freqüência para o violino (modo1) o análogo em uma placa retangular uniforme [modo (1,1)] e em uma placa circular uniforme [modo (2,0)]. Para a placa do violão os modos já assumem formas ainda mais complexas. Um dos modos é comparável a um modo de vibração de uma placa retangular. Neste modo, as linhas nodais separam a placa em três partes, tal que pode ser comparado com o modo (2,0) da placa retangular como mostra a figura 3 para uma vibração com freqüência de 77Hz da placa do violão.



*Figura 2 – Modo 1 da placa de madeira do violino comparado com os modos análogos: modo (1,1) de uma placa retangular e o modo (2,0) de uma placa circular<sup>[6]</sup>*



*Figura 3 – Modo de vibração com freqüência de 77Hz para a placa do tampo do violão comparados ao modo análogo (2,0) da placa retangular<sup>[7]</sup>.*

### **Descrição**

Duas placas foram construídas utilizando aço inox, pois houve uma dificuldade em obter o vidro dentro das dimensões necessárias para placas. Mesmo assim, os resultados são excelentes. As formas geométricas adotadas foram a quadrada e a circular. Junto com elas, também foram construídos dois conjuntos, um para cada formato de placa, compostos de

uma haste, com 30 cm de comprimento, e uma base para sustentar as placas. O arco de violino foi mesmo tomado emprestado. Em cada placa foi feito um furo de 5 mm de diâmetro, bem no centro, por onde passa um parafuso que a prende na extremidade superior da haste. Uma foto dessa montagem está apresentada na figura 4. As dimensões das placas ficaram da seguinte forma: 1,5 mm de espessura para ambos os formatos, 30 cm de diâmetro na circular, 25 cm de lado na quadrada. Com se nota a montagem experimental é bastante simples para demonstrar um fenômeno bastante interessante e útil conforme foi comentado.



*Figura 4 – montagem experimental para a realização do experimento. A placa é presa a haste utilizando-se um parafuso.*

Para obter as ‘Figuras de Chladni’, foi polvilhada areia sobre uma placa de cada vez, e esta foi posta a vibrar com a ajuda do arco de violino que atritava uma borda da placa. Assim, as figuras emergiam da areia revelando os padrões formados pelas regiões nodais. Para se obter várias figuras o dedo foi posicionado em certos pontos da placa enquanto ela vibrava. Dessa forma, um nodo foi forçado onde o dedo foi posto, alterando o modo de vibração da placa e, consequentemente, a figura.

## Resultados e Discussões

Os resultados obtidos foram bons. Os principais estão apresentados nas figura 5 (placa circular) e 6 (placa quadrada). Nessas figuras são observadas as ‘Figuras de Chladni’ formadas sobre as placas conforme foi discutido. O modo de vibração com a freqüência fundamental de cada placa está mostrado na figura 5(a) para a placa circular, sendo este o modo (2,0), e na 6(a) para a placa quadrada, sendo este o modo (1,1). Dos modos de freqüência mais alta, nota-se que algumas das figuras por eles produzidas apresentam padrões mais simples das linhas nodais, como por exemplo, as figuras 5(c) e 6(c), e outras, com padrões mais complexos, como os das figuras 5(d), 6(b) e 6(g). Esses modos mais complexos são, geralmente, combinações lineares dos modos de vibração mais

simples conforme consta no apêndice (ver figura 11 do apêndice). Quanto aos mais simples, fica mais fácil nomeá-los. No modo de vibração da placa circular que aparece na figura 5(c), vê-se a presença de 3 nodos diametais e 1 circular. Conseqüentemente, esse modo é chamado modo (3,1). Agora, no modo de vibração da placa quadrada, mostrado na figura 6(d), nota-se 3 linhas nodais em uma direção e 3 na direção perpendicular. Assim, esse modo é chamado modo (3,3).

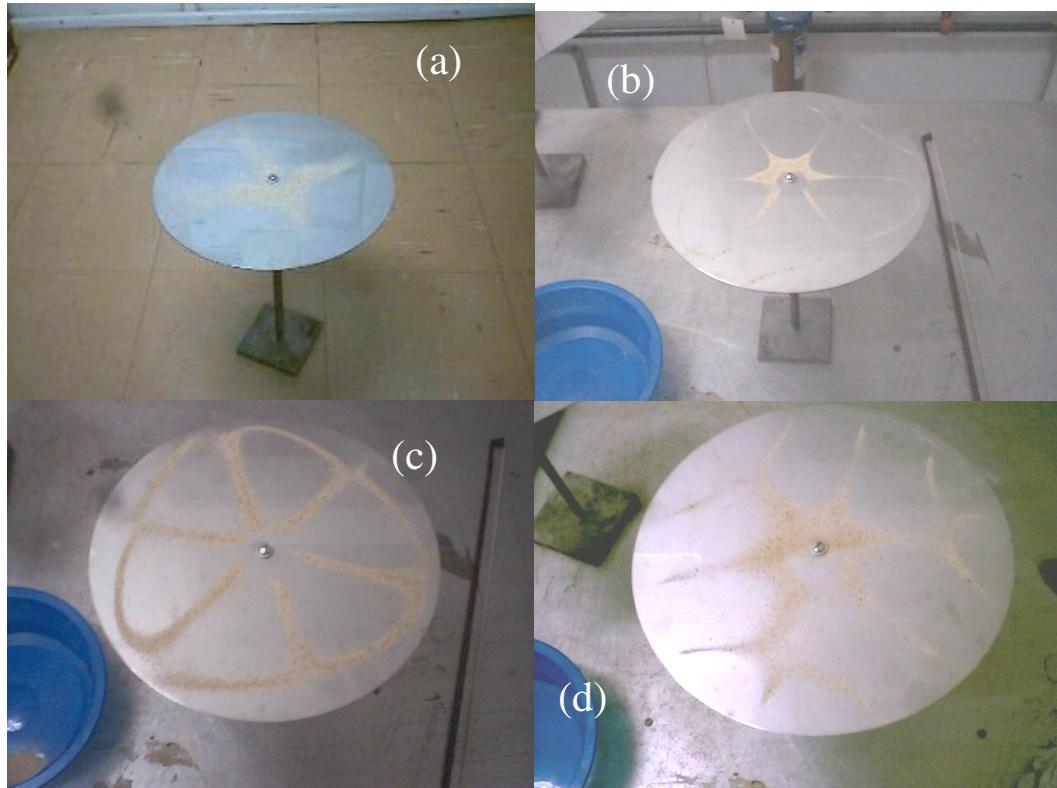


Figura 5 – Principais resultados. “Figuras de Chladni” para a placa circular

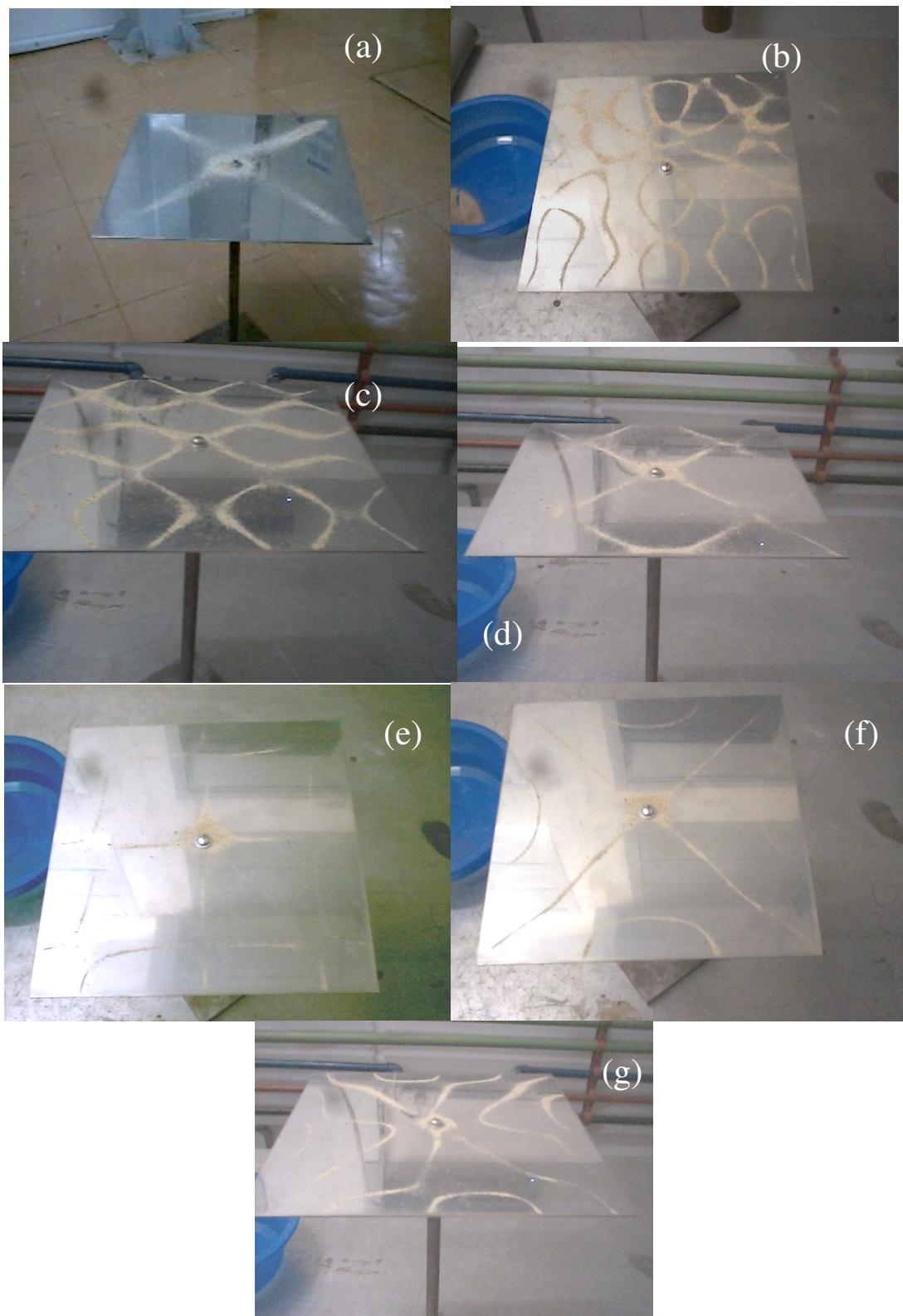


Figura 6 – Principais resultados. “Figuras de Chladni” para a placa quadrada.

## Conclusão

Deste experimento pode-se concluir que a técnica utilizada por Chladni de polvilhar areia sobre placas vibrando constitui uma importante e útil técnica no estudo de vibrações em placas, o que tem implicações diretas principalmente na construção de instrumentos musicais, tais como o violino e o violão. Além disso, os resultados revelaram a beleza estética das ‘Figuras de Chladni’, o que justifica o fato de Napoleão ter se impressionado tanto com as demonstrações de Chladni. O que mais se nota de tudo isso também é que o estudo de vibrações, ondas estacionárias e tudo mais que os alunos, tanto os do ensino médio quanto os de início de um curso superior de Física, têm que aprender se torna muito mais agradável e interessante quando se utiliza ‘Figura de Chladni’.

## Referências

1. Thomas D. Rossing, Chladni's law for vibrating plates, Am. J. Phys. 50(3), 271(1982).
2. Lord Rayleigh (J.W.Strutt), The Theory of Sound, Vol.1, 2nd ed., Macmillan, London (1894); reprinted by Dover, (1945).
3. Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, The Physics of Musical Instruments, Springer Study Edition, Springer-Verlag New York Inc., USA (1991).
4. Oscillations and Resonance in Vibrating Plates. Endereço eletrônico: <http://www.phy.davidson.edu/StuHome/derekk/Resonance/pages/plates.htm>.
5. Bedford, R., Modal Analysis of Percussion Instruments Using Vibrational Holography, Depsrtament of Physics, Stetson University. Endereço eletrônico: <http://www.stetson.edu/departments/physics/vholography/theory.htm>.
6. Chladni Patterns for Violin Plates, endereço eletônico: <http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/chladni.html>.
7. Chladni Patterns for Guitar Plates, endereço eletrônico: [http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/guitarchladni\\_engl.html](http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/guitarchladni_engl.html).

## Apêndice

### ➤ Formulação Matemática de sistemas bidimensionais: Membranas e Placas<sup>(1, 2)</sup>

Nesta parte, são considerados dois sistemas contínuos e bidimensionais vibrando, com ou sem rigidez. O primeiro é a membrana ideal que, como uma corda, não possui rigidez e, portanto, suas oscilações dependem da força restauradora suprida por uma tensão externamente aplicada. O outro é a placa que, como uma barra, pode vibrar com as extremidades fixas ou livres e com ou sem tensão externa.

### ➤ Equação da onda para Membranas Retangulares

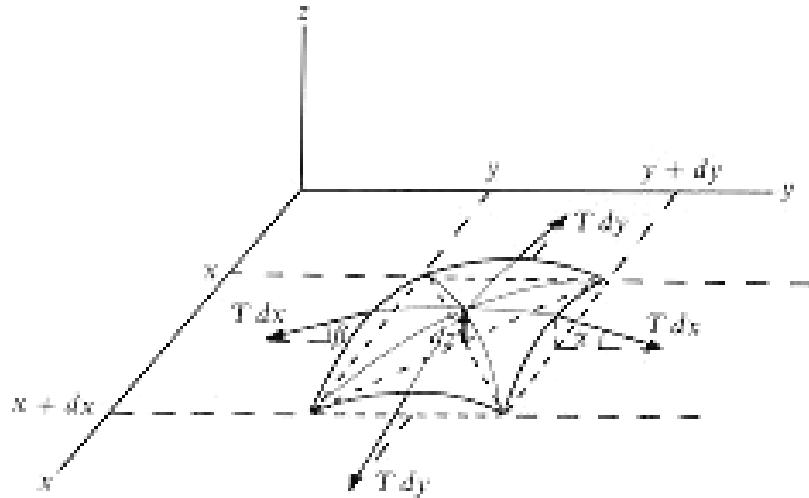


Figura 1 – Forças em um elemento de membrana retangular.

O mais simples sistema bidimensional que pode ser considerado é a membrana retangular com dimensões  $L_x$  e  $L_y$ , com as extremidades fixas, e com uma tensão superficial  $T$  constante em toda sua extensão.

Considere um elemento com densidade superficial  $\sigma$ , como mostra na figura 1. Ele tem sido deslocado uma pequena distância  $dz$ , e uma tensão superficial  $T$  atua para restaurá-lo ao equilíbrio. As forças atuando nas extremidades  $dx$  têm magnitude  $Tdx$  e suas componentes verticais são  $-T\sin(\alpha)dx$   $-T\sin(\beta)dx$ . Para pequenos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\sin(\alpha) \cong \tan(\alpha) \cong (\partial z / \partial y)_{y+dy}$$

e

$$\sin(\beta) \cong \tan(\beta) \cong (\partial z / \partial y)_y$$

Portanto,

$$F_y = -Tdx [(\partial z / \partial y)_{y+dy} - (\partial z / \partial y)_y] = -T dx (\partial^2 z / \partial y^2) dy$$

Similarmente, a componente vertical das forças atuando nas extremidades  $dy$  é

$$F_x = -T dy (\partial^2 z / \partial x^2) dx$$

A força total restauradora no elemento  $dxdy$  é  $F = F_x + F_y$ , tal que a equação de movimento torna-se

$$T dx dy [(\partial^2 z / \partial x^2) + (\partial^2 z / \partial y^2)] = \sigma dx dy (\partial^2 z / \partial t^2)$$

ou

$$(\partial^2 z / \partial t^2) = (T / \sigma) [(\partial^2 z / \partial x^2) + (\partial^2 z / \partial y^2)] = c^2 \nabla^2 z. \quad (\text{eq.1})$$

Essa é a equação de onda para ondas transversais com uma velocidade  $c = (T/\sigma)^{1/2}$ . Ela é facilmente resolvida escrevendo a deflexão  $z(x,y,t)$  como o produto de três funções de variáveis simples:  $z(x,y,t) = X(x)Y(y)Z(t)$ . As derivadas segundas são

$$(\partial^2 z / \partial x^2) = (d^2 X / d x^2) Y T, \quad (\partial^2 z / \partial y^2) = (d^2 Y / d y^2) X T, \quad \partial^2 z / \partial t^2 = (d^2 T / d t^2) X Y,$$

tal que a equação se torna

$$(1/T)(d^2 T / d t^2) = (c^2/X)(d^2 X / d x^2) + (c^2/Y)(d^2 Y / d y^2). \quad (\text{eq.2})$$

Essa equação pode somente ser verdade se cada lado é igual a uma constante, que será denotada por  $-\omega^2$ . Isso fornece duas equações:

$$(d^2 T / d t^2) + \omega^2 T = 0,$$

com soluções  $T(t) = E \sin \omega t + F \cos \omega t$ , e

$$(1/X)(d^2 X / d x^2) + (\omega/c)^2 = - (1/Y)(d^2 Y / d y^2).$$

Novamente, cada lado dessa última equação deve ser igual a uma constante, que será chamada  $k^2$ .

Isso fornece:

$$(d^2 X / d x^2) + [(-\omega/c)^2 - k^2] X = 0,$$

com soluções  $X(x) = A \sin[((\omega/c)^2 - k^2)^{1/2}x] + B \cos[((\omega/c)^2 - k^2)^{1/2}x]$ , e

$$(d^2Y/dy^2) + k^2Y = 0,$$

com soluções  $Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$ . Para uma membrana retangular de dimensões  $L_x$  e  $L_y$ , fixas nos quatro lados, as condições de contorno são  $z=0$  para  $x=0$ ,  $x=L_x$ ,  $y=0$  e  $y=L_y$ . Da primeira condição, é possível notar que  $B=0$  e da segunda,

$$A \sin[((\omega/c)^2 - k^2)^{1/2}L_x] = 0, \text{ talque } ((\omega/c)^2 - k^2)^{1/2}L_x = m\pi, \text{ e}$$

$$X(x) = A \sin(m\pi/L_x)x,$$

com  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Da terceira,  $D=0$ ; e da quarta,  $C \sin(kL_y) = 0$ , tal que  $kL_y = n\pi$  e  $Y(y) = C \sin(n\pi/L_y)y$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Portanto,

$$\begin{aligned} z_{mn} &= A \sin(m\pi x/L_x) C \sin(n\pi y/L_y) (E \sin \omega t + F \cos \omega t) \\ &= \sin(m\pi x/L_x) \sin(n\pi y/L_y) (M \sin \omega t + N \cos \omega t), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{eq.3}) \end{aligned}$$

Para determinar as freqüências modais, resolve-se  $((\omega/c)^2 - k^2)^{1/2}L_x = m\pi$  para  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (m\pi/L_x)^2 c^2 + k^2 c^2 = (m\pi/L_x)^2 c^2 + (n\pi/L_y)^2 c^2, \\ &\text{e} \\ f_{mn} &= (1/2\pi)(T/\sigma)^{1/2} [(m/L_x)^2 + (n/L_y)^2]^{1/2}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{eq.4}) \end{aligned}$$

As equações 3 e 4 com equações mostram os modos normais de uma membrana retangular. As ondas estacionárias na direção x são independente das ondas na direção y. Alguns desses modos estão ilustrados na figura 2.

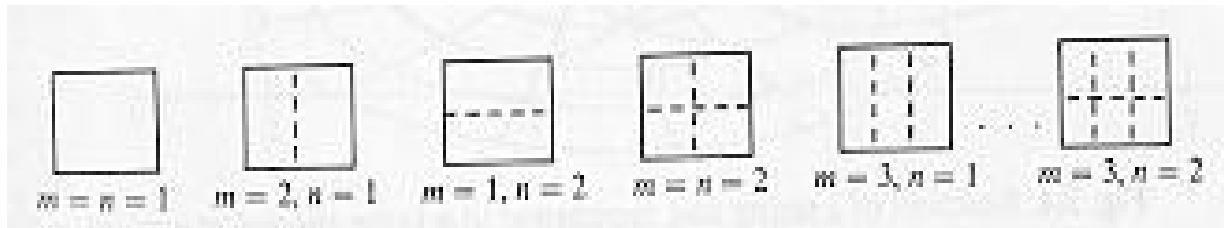


Figura 2 – Alguns modos normais de uma membrana retangular.

### ➤ Membranas quadradas: Degenerescênciа

Na membrana quadrada ( $L_x=L_y$ ),  $f_{mn}=f_{nm}$ ; os modos  $mn$  e  $nm$  são ditos serem degenerados, desde que eles têm a mesma freqüência. Contudo, há agora um número menor de freqüências permitidas em relação à retangular. De fato, a membrana quadrada pode vibrar com movimento harmônico simples em uma freqüência  $f_{mn}$  com qualquer um de um número infinito de formas diferentes correspondendo a diferentes valores de  $a$  e  $b$  na equação:

$$z(x,y,t) = (az_{mn} + bz_{nm}) \cos \omega_{mn} t, \text{ onde } a^2 + b^2 = 1 \quad (\text{eq.5})$$

Várias combinações de  $z_{13}$  e  $z_{31}$  são mostradas na figura 3.

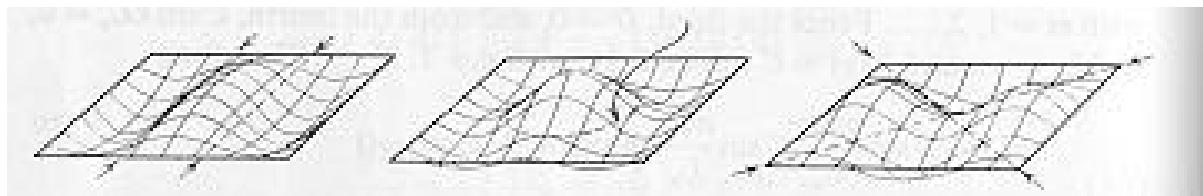


Figura 3 – Modos de vibração degenerados em uma membrana quadrada correspondendo a diferentes valores de  $a$  e  $b$  na (eq.5). Pequenas setas indicam as linhas nodais que estão pontilhadas.

### ➤ Membranas circulares

Para uma membrana circular, a equação de onda deve ser escrita em coordenadas polares fazendo  $x = r \cos \varphi$  e  $y = r \sin \varphi$ .

$$(\partial^2 z / \partial t^2) = c^2 [(\partial^2 z / \partial r^2) + (1/r)(\partial z / \partial r) + (1/r^2)(\partial^2 z / \partial \varphi^2)] \quad (\text{eq.7})$$

As soluções são escritas na forma  $z(r, \varphi, t) = R(r) \Phi(\varphi) e^{j\omega t}$  induzindo às equações:

$$(\partial^2 R / \partial r^2) + (1/r)(\partial R / \partial r) + [(\omega/c)^2 - (m/r)^2]R = 0$$

$$\text{e} \quad (\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2) + m^2 \Phi = 0 \quad (\text{eq.8})$$

$$(\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2) + m^2 \Phi = 0$$

A solução da segunda equação é  $\Phi(\varphi) = A e^{\pm j\omega t}$ . Já a primeira equação tem a forma de uma equação de Bessel  $(\partial^2 y / \partial x^2) + (1/x)(\partial y / \partial x) + [1 - (m^2/x^2)]y = 0$  com  $y=R$  e  $x=kr=\omega r/c$ . As soluções são funções de Bessel de ordem  $m$ . Cada uma dessas funções  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ , ...,  $J_m(x)$  vão a zero para vários valores de  $x$  como mostrado na figura 5.

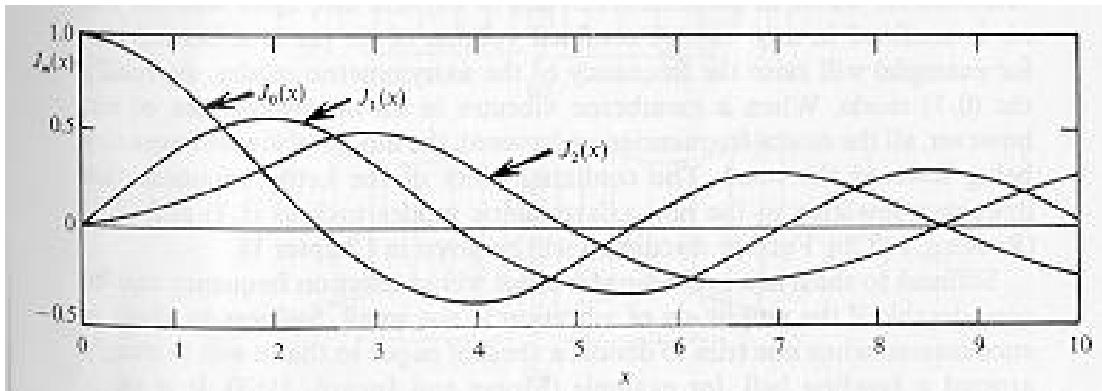


Figura 5 – Primeiras três funções de Bessel.

O  $n$ -ésimo zero de  $J_m(kr)$  fornece a freqüência do modo  $(m, n)$ , que tem  $m$  diâmetros nodais e  $n$  círculos nodais (incluindo um na borda). No modo fundamental  $(0, 1)$ , a membrana inteira move em fase. Os primeiros 14 modos de uma membrana ideal e suas relativas freqüências são mostrados na figura 6.

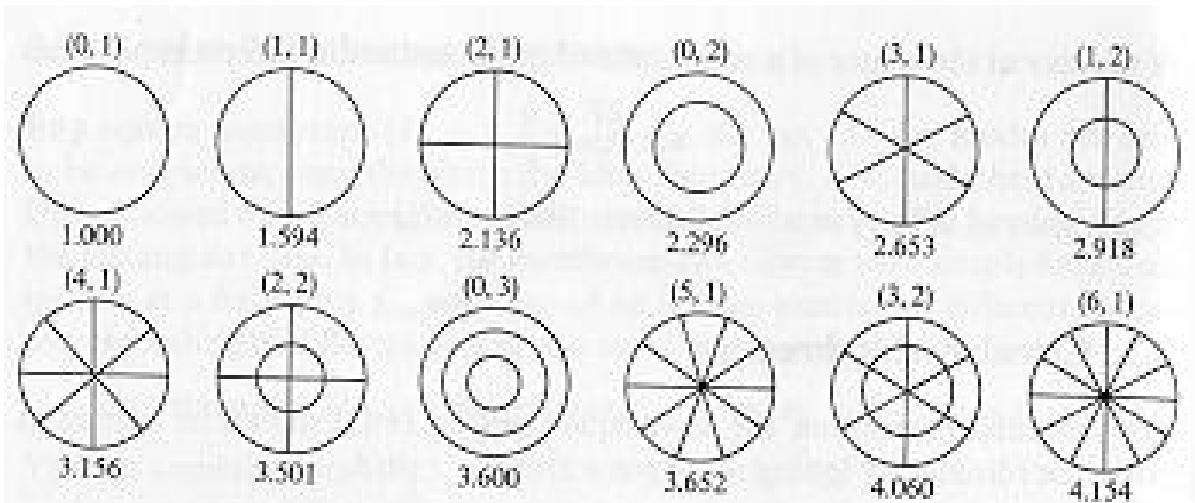


Figura 6 – Primeiros 14 modos de uma membrana circular ideal. A designação de modo  $(m,n)$  é dada acima de cada figura e a freqüência relativa, abaixo.

### ➤ Membranas reais

Os modos normais de freqüências de uma membrana real podem ser bem diferentes daquela de uma membrana ideal. Os principais efeitos atuando na membrana para mudar seus modos e afetar as freqüências são a rigidez e o ar a sua volta. A rigidez é um efeito que deve ser considerado se a amplitude de vibração não é tão pequena. E o ar é normalmente o efeito dominante em membranas muito finas.

### ➤ Ondas em placa finas

Uma placa pode ser considerada como uma barra ou uma membrana rígida. Poderia-se esperar que ela vai transmitir ondas longitudinais à mesma velocidade que uma barra:  $c_L = (E/\rho)^{1/2}$ . Isso não é bem o caso, entretanto, dado que a expansão lateral nas ondas que acompanha a compressão longitudinal está confinada no plano da placa, adicionando assim uma pequena rigidez. A expressão correta para a velocidade de ondas longitudinais em uma placa infinita é

$$c_L = [E/\rho(1-v^2)]^{1/2} \quad (\text{eq. 9})$$

onde  $v$  é o coeficiente de Poisson ( $v \approx 0.3$  para a maioria dos materiais).

Na realidade, ondas longitudinais puras (fig.7a) ocorrem somente em sólidos cujas dimensões em todas direções são maiores que um comprimento de onda. Essas ondas viajam a uma velocidade  $c_L'$ , que é menor que as ondas quase-longitudinais (fig.8) que se propagam em uma barra ou em uma placa<sup>[3]</sup>

$$c_L' = [E(1/v^2)/\rho(1+v)(1-2v)]^{1/2} \quad (\text{eq.10})$$

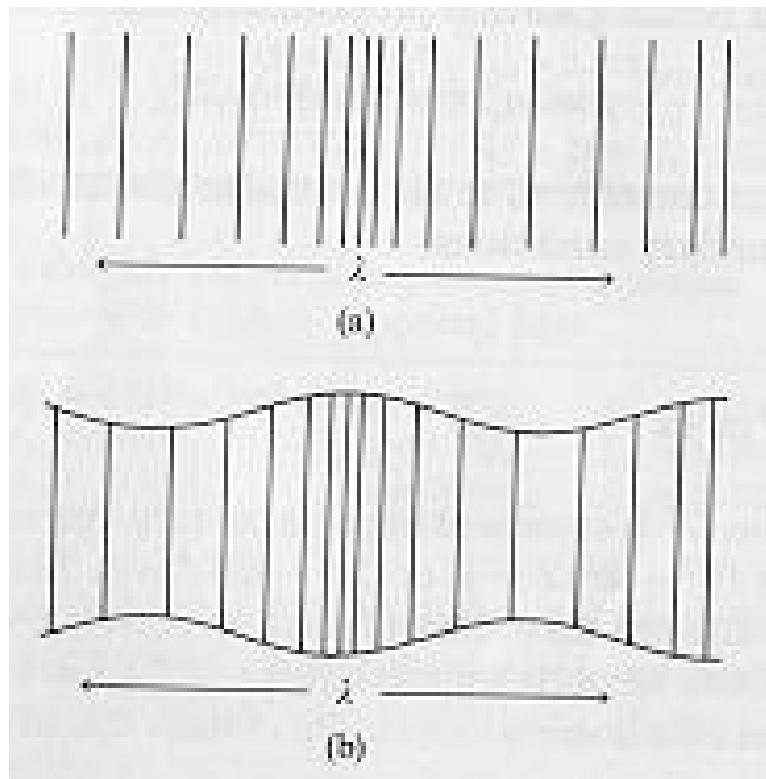


Fig 7 – (a) onda longitudinal pura em um sólido infinito. (b) onda quase-longitudinal em uma barra ou uma placa.

A equação de movimento para uma onda de curvatura ou flexão em uma placa é

$$(\partial^2 z / \partial t^2) + [Eh^2 / 2\rho(1-v^2)] \nabla^4 z = 0 \quad (\text{eq.11})$$

onde  $\rho$  é a densidade  $v$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de Young, e  $h$  é a espessura da placa. Para soluções harmônicas,  $z = Z(x,y)e^{j\omega t}$ :

$$\nabla^4 Z - [\rho(1-v^2)\omega^2/Eh^2]Z = \nabla^4 Z - k^4 Z = 0 \quad (\text{eq. 12})$$

$$\text{onde } k^2 = (12 \omega^2/h^2)^{1/2} [(\rho(1-v^2)/E)]^{1/2} = (12 \omega^2)^{1/2} / hc_L$$

Ondas de curvatura em uma placa são dispersivas, isto é, a velocidade delas depende da freqüência:

$$v(f) = \omega/k = \omega hc_L / (12)^{1/2} = (1.8 f hc_L)^{1/2} \quad (\text{eq. 13})$$

A freqüência da onda é, então, proporcional a  $k^2$ :

$$f = \omega / 2\pi = 0.0459 hc_L k^2 \quad (\text{eq. 14})$$

Os valores de  $k$  que correspondem aos modos normais de vibração dependem, é claro das condições de contorno.

### ➤ Placas Circulares

Para uma placa circular,  $\nabla^2$  é expresso em coordenadas polares,  $Z(r,\phi)$  pode ser solução de  $(\nabla^2 + k^2)Z = 0$  ou  $(\nabla^2 - k^2)Z = 0$ . Soluções da primeira equação contêm as funções de Bessel  $J_m(kr)$ , e soluções da segunda, as funções de Bessel hiperbólicas  $I_m(kr) = j^{-m} J_m(kr)$ . Assim, as possíveis soluções são dadas pela combinação linear dessas funções de Bessel vezes uma função angular:

$$Z(r,\phi) = \cos(m\phi + \alpha)[AJ_m(kr) + BI_m(kr)] \quad (\text{eq. 15})$$

Se a placa estiver presa na extremidade  $r=a$ , então  $Z=0$  e  $(\partial Z / \partial r)=0$ . A primeira dessas condições é satisfeita se  $AJ_m(ka) + BI_m(ka) = 0$  e a segunda se  $AJ'_m(ka) + BI'_m(ka) = 0$ . Agora, se placa tiver a extremidade livre, a matemática fica mais difícil. As condições de contorno usadas por Kirchoff induzem a uma expressão bastante complicada para  $k_{mn}$ , que reduz a  $(2n+m) \pi/2r$  para valores grande de  $ka$ <sup>[2]</sup>. O modo  $(2,0)$  é agora o modo fundamental. Assim, em uma placa,  $f$  é proporcional a  $(m+2n)^2$ , para  $f$  grande. A essa

relação Rayleigh chamou de Lei de Chladni, pois foi Chladni que observou que a adição de um modo nodal circular aumenta a freqüência de vibração de uma placa circular por de uma quantidade igual àquela que se obtém adicionando dois modos nodais diametrais. Alguns modos das placas circulares são mostrados na figura 9.

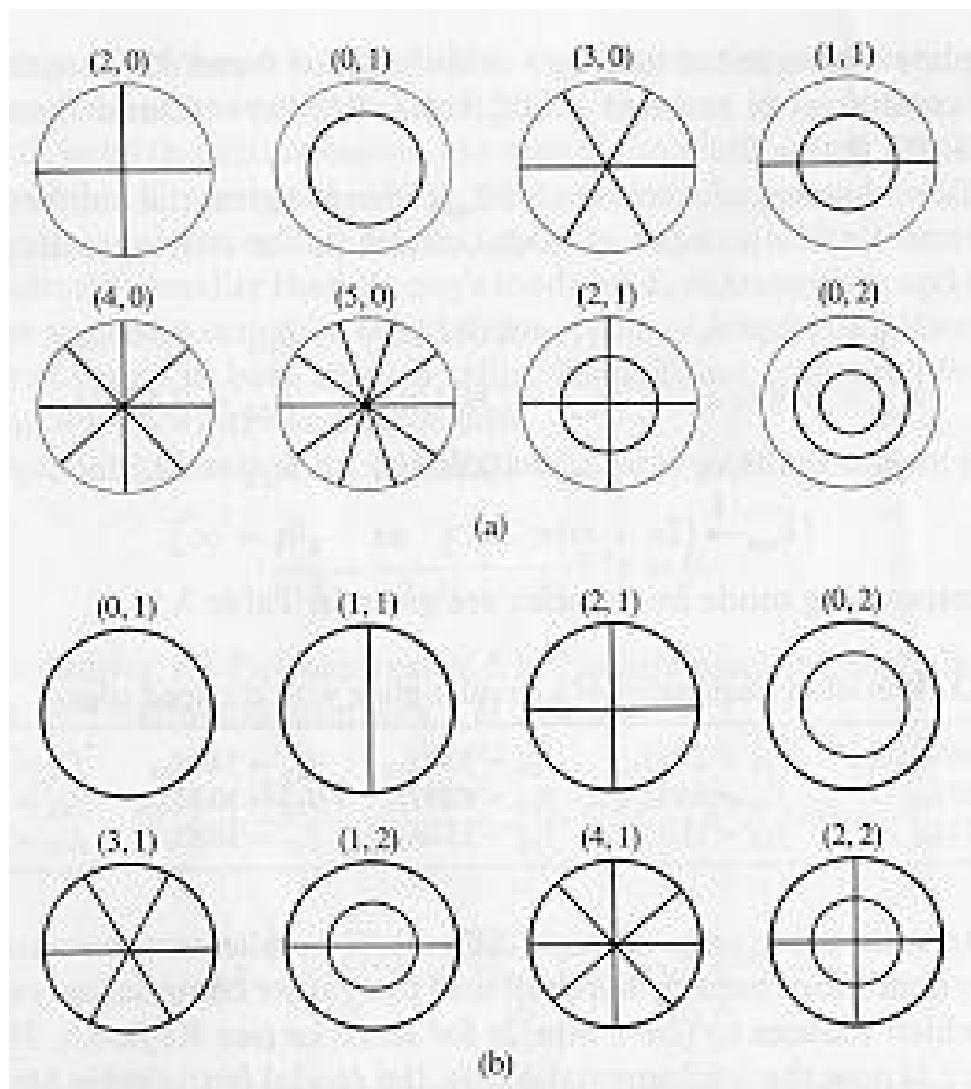


Figura 8 – Modos Vibracionais das placas circulares: (a) extremidade livre e (b) extremidade presa. O número de modo  $(n,m)$  fornece os diâmetros e os círculos nodais, respectivamente, e estão indicados sobre as representações dos modos nesta figura.

#### ➤ Placas Retangulares

A equação de movimento para placas retangulares suportadas pelas extremidades é facilmente resolvida escrevendo as soluções como o produto das funções de variáveis simples, semelhante ao que foi feito no caso da membrana retangular. A amplitude de deslocamento então é dada por

$$Z = A \operatorname{sen}[(m+1)\pi x/L_x] \operatorname{sen}[(n+1)\pi y/L_y] \quad (\text{eq. 16})$$

onde  $L_x$  e  $L_y$  são as dimensões da placa, e  $m$  e  $n$  são inteiros (começando com zero). As freqüências de vibração correspondentes são dadas por

$$f_{mn} = 0.453c_L h[((m+1)/L_x)^2 + ((n+1)/L_y)^2]^{1/2} \quad (\text{eq. 17})$$

O deslocamento é similar àquele de uma membrana retangular, mas as freqüências modais não são. Note que as linhas nodais são paralelas às extremidades e isso não é o caso para as placas com as extremidades presas ou livres, como será visto.

É conveniente descrever um modo em uma placa retangular por  $(m,n)$ , onde  $m$  e  $n$  são os números das linhas nodais na direção  $y$  e  $x$ , respectivamente (não contando os nodos nas extremidades). Para fazer isso, são usados  $m+1$  e  $n+1$  na (eq.16) ao invés de  $m$  e  $n$ , como na membrana retangular. Assim, o modo fundamental é designado por  $(0,0)$  ao invés de  $(1,1)$ .

Se as extremidades são livres, calcular os modos da placa retangular é algo que foi descrito por Rayleigh como um problema “de grande dificuldade”. Entretanto, ele utilizou um método que fornecia soluções aproximadas que estavam relacionadas aos resultados obtidos e refinados por Ritz. Resultados de investigações subsequentes são sumarizados por Leissa<sup>[4]</sup>.

As formas limitantes de uma placa retangular são a quadrada e a de barra fina. Os modos de uma barra fina com extremidades livres têm freqüência:

$$f_n = (0.113h/L^2)(E/\rho)^{1/2}[3.0112^2, 5^2, \dots, (2n+1)^2] \quad (\text{eq.18})$$

onde os números que estão entre os colchetes aparecem devido à intersecção da curvas na solução gráfica do problema da barra.

Vários modos de vibração em uma placa retangular podem ser derivados dos modos da barra. Para modo  $(m,0)$  poderia ser esperado que tivesse linhas nodais paralelas a um par de lados, e o modo  $(0,m)$  teria nodos paralelos ao outro par de lados. Por causa do acoplamento entre os movimentos de flexão da placa em duas dimensões, entretanto, os modos não são os modos puros da barra. A linhas nodais tornam-se curvas e a placa pode assumir uma variedade de formas de cela (i.e., côncava em uma direção, mas convexa na direção perpendicular). Isso pode ser chamado curvaturas antoclássicas e é bem evidente nos modos de duas placas retangulares mostradas na figura 9.

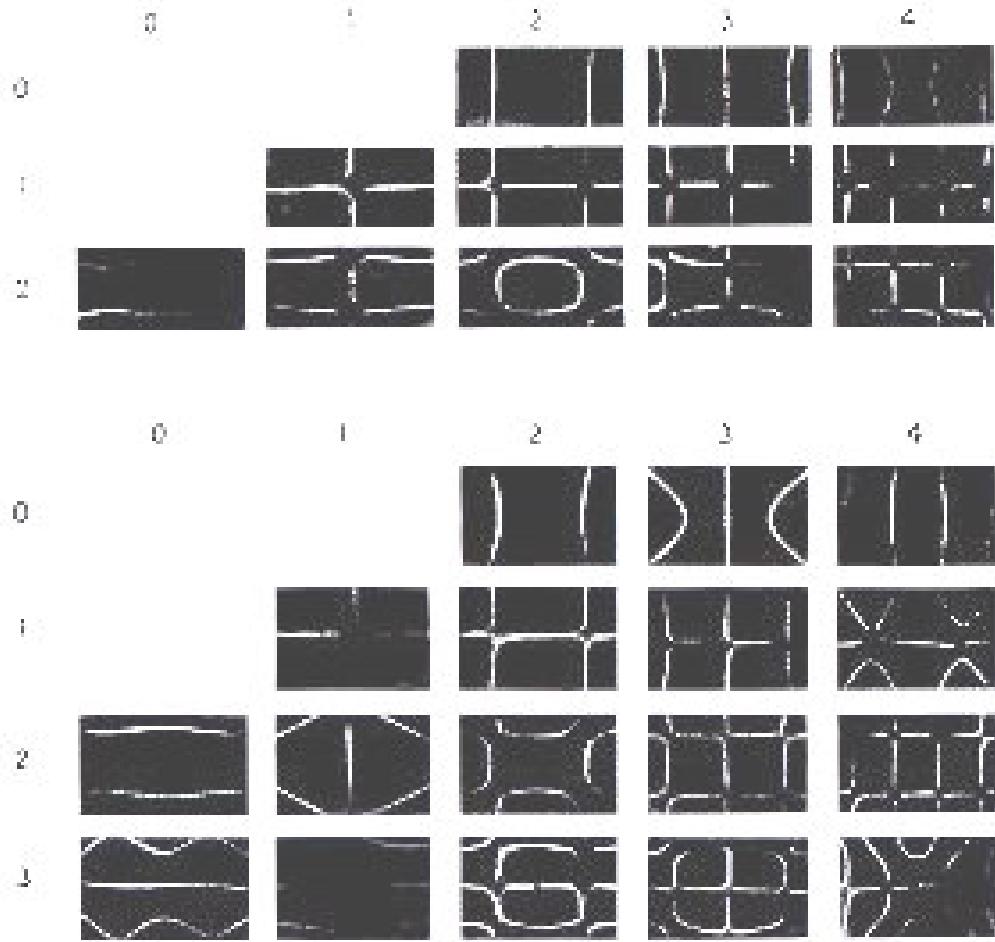


Figura 9 – padrões de Chladni mostrando os modos de vibração de placas retangulares de formas diferentes: (a)  $L_x/L_y = 2$ ; (b)  $L_x/L_y = 3/2$

É interessante notar como as combinações se desenvolvem em um retângulo quando  $L_x/L_y$  se aproxima da unidade. Figura 10 mostra as formas de dois modos que são descendentes dos modos (2,0) e (0,2) em retângulos de  $L_x/L_y$  variável. Quando  $L_x \gg L_y$ , os modos (2,0) e (0,2) aparecem bem independentes. Entretanto, quando  $L_x \rightarrow L_y$ , os modos se misturam para formar modos novos. No quadrado, a mistura é completa, e duas combinações são possíveis dependendo se as componentes dos modos estão em fase ou fora de fase.

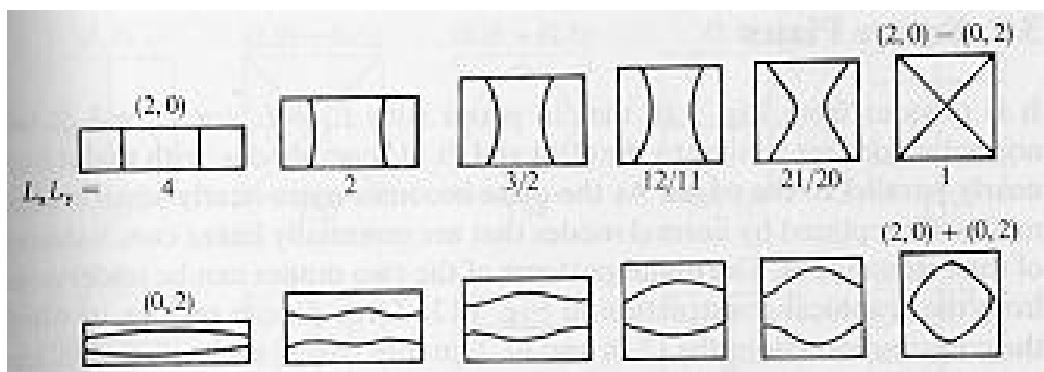


Figura 10 – Mistura dos modos (2,0) e (0,2) em placas retangulares com diferentes razões de  $L_x/L_y$ .

### ➤ Placas Quadradas

É óbvio da figura 10 que em placas com  $L_x \gg L_y$  (ou  $L_y \gg L_x$ ), dois modos normais são similares aos modos (2,0) e (0,2), com linhas nodais aproximadamente paralelas às extremidades. Quando a placa vai se tornando mais quadrada, esses modos vão sendo repassados por modos normais que são essencialmente combinações lineares desses modos. O padrão nodal dos dois modos pode ser entendido da construção gráfica da figura 11. Os zeros denotam regiões nas quais a contribuição dos modos (2,0) e (0,2) cancelam-se uma à outra. Os modos (2,0)+(0,2) e (2,0)-(0,2) são algumas vezes referidos como o modo Anel e modo X, respectivamente, devido a formas dos seus padrões nodais.

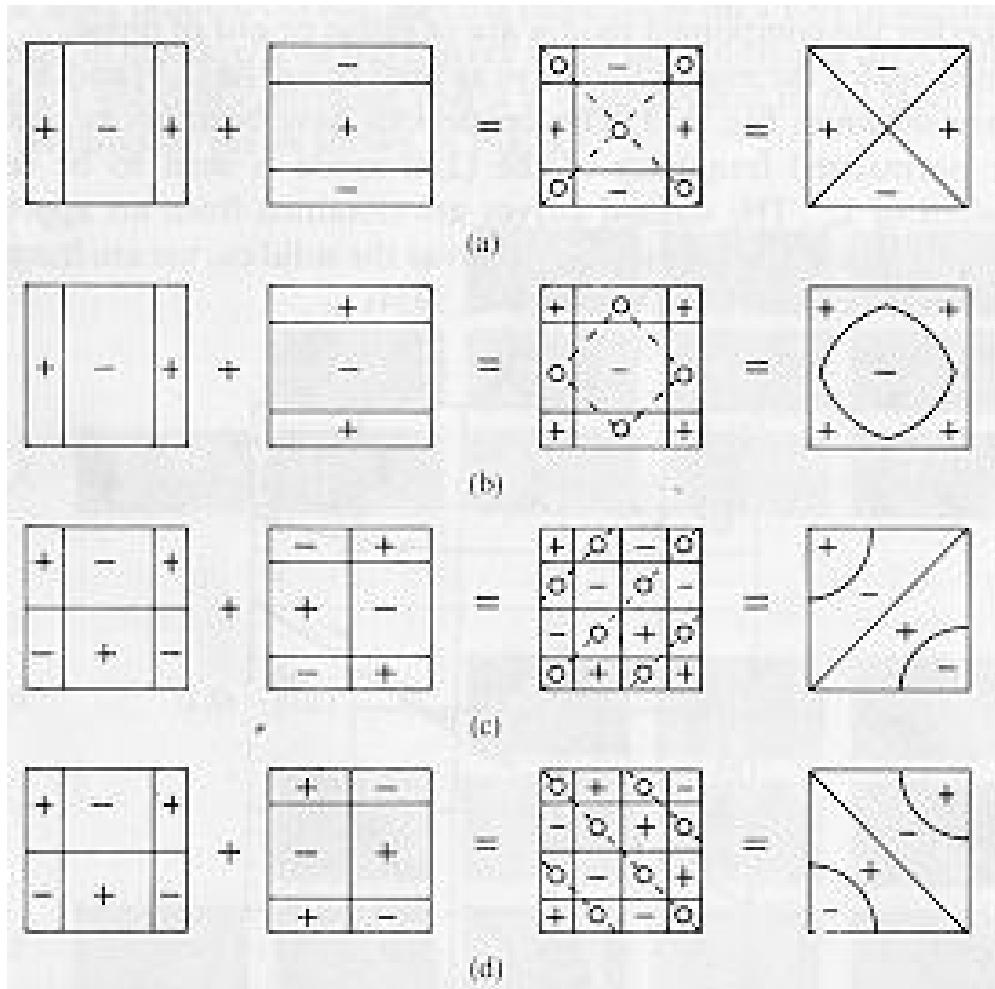


Figura 11 – Construção gráfica das combinações dos modos em uma placa quadrada isotrópica: (a)  $(2,0)-(0,2)$ , modo X; (b)  $(2,0)+(0,2)$ , modo Anel; (c) modo  $(2,1)-(1,2)$ ; e (d) modo  $(2,1)+(1,2)$ .

O modo Anel  $(2,0)+(0,2)$  tem uma freqüência mais alta que modo X  $(2,0)-(0,2)$ . No modo X, os movimentos de flexão característicos dos modos  $(2,0)$  e  $(0,2)$  ajudam um ao outro através de uma interação elástica chamada acoplamento de Poisson, desde que suas intensidades dependem do valor da constante de Poisson. No modo Anel  $(2,0)+(0,2)$ , entretanto, há uma rigidez adicional devida ao fato que os movimentos de flexão de  $(2,0)$  e  $(0,2)$  se opõem um ao outro. Assim, o acoplamento de Poisson separa a degenerescência modal que apareceria na placa quadrada. A razão das freqüências dos modos  $(2,0)+(0,2)$  e  $(2,0)-(0,2)$  é

$$f_+/f_- = [(1+0.7205v)/(1-0.7205v)]^{1/2} \quad (\text{eq.19})$$

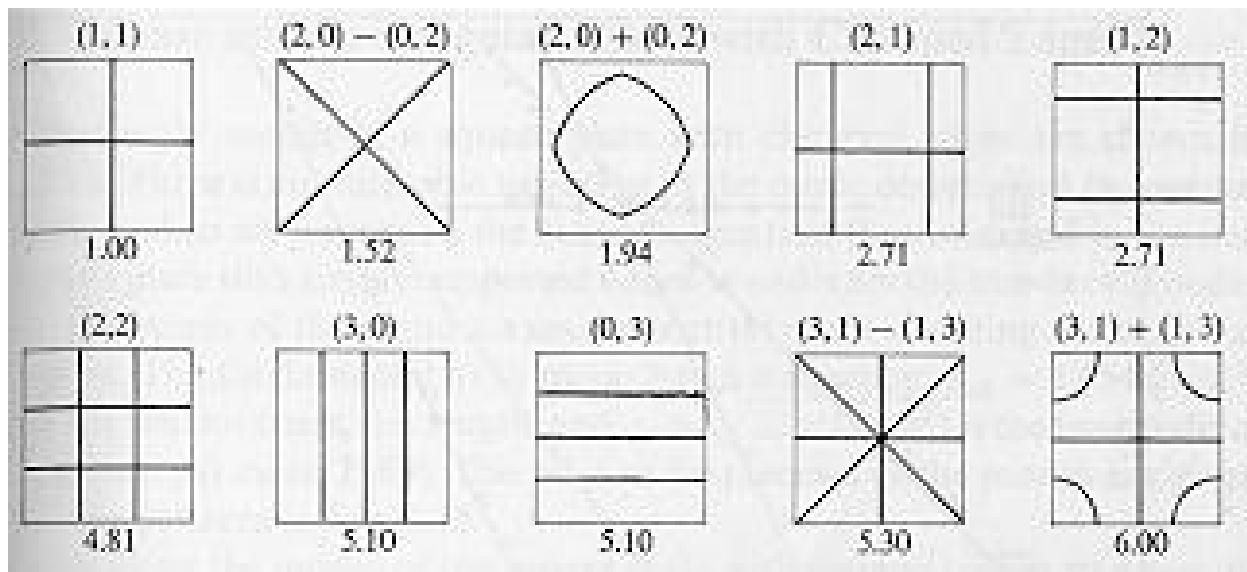


Figura 12 – Os primeiros 10 modos da placa quadrada isotrópica como extremidades livres.

Os modos são designados por  $m$  e  $n$ , os números de linhas nodais em duas direções, e as freqüências relativas para a placa com  $v=0.3$ . São dadas abaixo das figuras.

Como mostrado na figura 11, são os modos  $(2,1)-(1,2)$  e  $(2,1)+(1,2)$  que têm a mesma freqüência que os modos  $(2,1)$  e  $(1,2)$ , desde que o acoplamento de Poisson não colabora ou se opõe às combinações. Assim, quaisquer desses quatro modos podem ser excitados dependendo de onde a força é aplicada. Existe, na realidade, um grande número de modos degenerados, todos sendo combinações lineares dos modos  $(2,1)$  e  $(1,2)$ , que podem ser excitados.

Os primeiros 10 modos da placa quadrada isotrópica como extremidades livres estão mostrados na figura 12. Note que os modos  $(2,1)$  e  $(1,2)$  formam um par degenerado, assim como os modos  $(3,0)$  e  $(0,3)$ . Entretanto, o acoplamento de Poisson remove as degenerescências no caso  $(3,0)\pm(0,3)$  conforme é feito no caso  $(2,0)\pm(0,2)$ . A regra geral é que o par não degenerado  $(m,n)\pm(n,m)$  existe em uma placa quadrada quando  $m-n=\pm 2,4,6,\dots$ .

## Referências do apêndice:

1. Lord Rayleigh (J.W.Strutt), The Theory of Sound, Vol.1, 2nd ed., Macmillan, London (1894); reprinted by Dover, (1945).
2. Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, The Physics of Musical Instruments, Springer Study Edition, Springer-Verlag New York Inc., USA (1991).
3. Cremer, L., Heckl, M., and Ungar, E.E., ‘Structure -Borne Sound”, Capítulo 4. Springer-Verlag, Berlin and New York, (1973).
4. Leissa, A.W., “Vibration of Plates”, NASA SP -160, NASA, Washington, D.C.,(1969).

## Comentários Feitos pelo coordenador

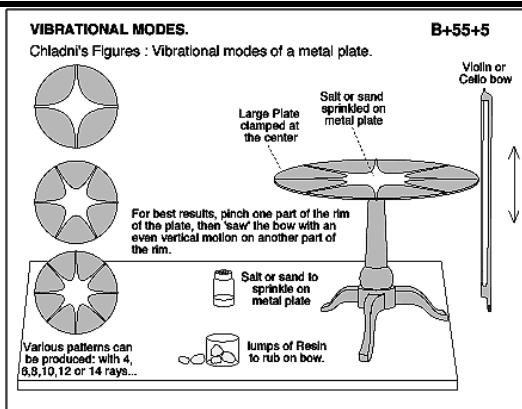
Projeto: “Projeto aprovado. Capricho na teoria, pois o trabalho de montagem pode-se supor que é muito simples”.

Relatório Final: “RP aprovado, o estudo teórico aparece bem completo. Quanto à amplitude das vibrações, faltou dar valores típicos. Quanto aos resultados experimentais, faltam fotos. Lembro-lhe de que disponho de uma câmara fotográfica digital que posso emprestar, para fazê-las”.

## Referências na Internet

As referências de sites utilizados neste projeto estão apresentadas abaixo:

- UCB Physics Lecture Demonstrations, Physics Department  
University of California at Berkeley Berkeley, California. Endereço eletrônico:  
<http://www.mip.berkeley.edu/physics>



- Oscillations and Resonance in Vibrating Plates. Endereço eletrônico:  
<http://www.phy.davidson.edu/StuHome/derekk/Resonance/pages/plates.htm>

### Oscillations and Resonance in Vibrating Plates

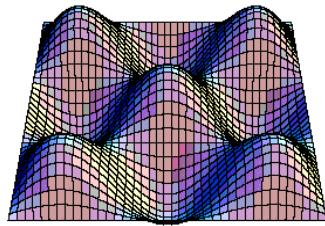
#### Description of the Experiment:

In this experiment we studied the vibration of four different kinds of metal plates; circular, thick square, thin square and rectangular. To vibrate the plates we used a mechanical driver controlled by an electrical

oscillator. The edges of the plates were unbound, while the source of vibration was located in the center of each plate. We were able to locate the different modal frequencies of each plate using an instrument that allowed us to delicately vary the frequency and amplitude of the driver. To locate various modal frequencies we sprinkled glass beads across the plate which would then settle along the various nodal lines at resonance. By counting the number of diametric and radial nodes (lines and circles) we could record the "m" and "n" values for each modal frequency. Finally, using the "m", "n" numbers and the frequency values for each mode of the plates we compared our data to either Chladni' s Law or the general wave equation.



#### *Oscillations and Resonance in the Experiment:*



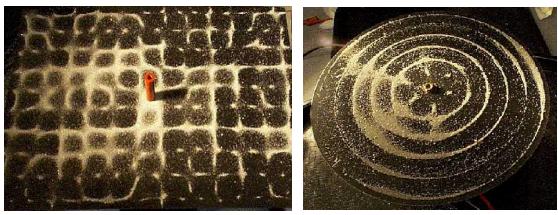
The source of oscillation constantly produces different waves in the plate. However, at certain frequencies of oscillation standing waves are created in the plate by the continuous superposition of waves incident on and reflected from the edges. When this occurs the plate can be considered to be resonating at one of its natural frequencies. Each plate has many different frequencies, or modes of vibration, in which standing waves are created. The lowest mode of vibration is called the fundamental frequency and successive vibrational modes can be found by solving the two-dimensional wave equation. It is important to note that unlike standing waves in a string or in a column of air, the other vibrational modes of a plate are not integral multiples of the fundamental frequency and therefore do not form a harmonic series. In the vibration of plates the higher frequency modes are also quickly damped out and consequentially two-dimensional vibrations in flexible membranes, such as those in a drumhead, do not produce melodious sounds.

At non-resonant frequencies the glass beads would dance erratically across the vibrating plate, however at the modal frequencies the glass beads would settle along the nodal lines. Since the edges of all our plates were unbound, they were free to oscillate at a maximum amplitude and are therefore considered antinodes of the standing waves created in the plates. Also since the center of each plate is at the driving source it is also considered an antinode. Throughout the rest of the plate, we encountered diametric and radial nodes and recorded their quantities at various nodal frequencies. While the number of diametric and radial nodes were difficult to count due to aberrations in the plates, our data did somewhat confirm the results predicted by the two-dimensional wave equation and by Chladni' s Law.

*The frequency of the modes for thin square plate (or rectangular) should be :*

$$f = \sqrt{\left(\frac{n}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{l}\right)^2} \quad \text{which comes from the solution to the wave equation in Cartesian coordinates.}$$

while for circular plates, Chladni' s Law predicts that the modal frequencies were approximately equal to  $(m + 2n)^2$



We successfully determined the fundamental frequencies for all of our plates, however we were unable to locate each successive modal frequency. Some of the higher modal frequencies often yielded beautifully elaborate patterns and are particularly demonstrative of diametric and radial nodes. They are good examples of the presence of standing waves in plates that are vibrating at resonant frequencies.

While the different vibrational modes of the plates are not integer multiples of their fundamental frequencies, the system of vibrating plates is still included in linear dynamics because there is only one possible maximum amplitude at the resonant frequency. The periodic driving force always produces a periodic output in the vibration of the plate, however only at resonance are standing waves created in the plate.

---

- **Bedford, R., Modal Analysis of Percussion Instruments Using Vibrational Holography, Depsrtament of Physics, Stetson University. Endereço eletrônico: <http://www.stetson.edu/departments/physics/vholography/theory.htm>.**
- 

Modal Analysis of Percussion Instruments

Using Vibrational Holography

[Stetson University](#)

[Department of Physics](#)

Research: [Robert Bedford](#)

Faculty Mentor: [Dr. Kevin Riggs](#)

- **Abstract**

Many musical instruments, including numerous percussion instruments, rely on sound produced from vibrating plates. With vibrational holography, we are able to gain very accurate information about the patterns of vibration (modes) of these plates. Time-average vibrational holography uses two beams of a coherent light that interfere on a high-resolution holography film. One beam with a fixed path length is used as a reference beam, while the object beam is incident on the vibrating plate. The vibrating plate changes the path length of the object beam to create interference rings about the antinodes of vibration. We studied systems of increasing complexity, starting with a simple case of a uniform circular plate. We then considered complex metal plates, such as specialty cymbals, and hand bells. In real-time vibrational holography, it is necessary to produce a plate hologram of the non-vibrating object. We develop the plate and place it back in the holder, superimposing the hologram on the real object. If we vibrate the object, there will be interference between the virtual image of the hologram, and the vibrating object. We use a beam chopper in order to slow down the interference shifts throughout the period of the vibration. We used this technique to study modal patterns in a cymbal.

---

- **Introduction**

All sound can be thought of as a superposition of pure sine waves. We can represent this oscillation by plotting displacement versus time on a graph which, because of simple harmonic motion, will result in a sine wave. When an object vibrates at multiple frequencies, its representative wave becomes no longer sinusoidal, but a complex wave, not easily describable with simple trigonometry. We know that this wave can however be broken up into several sine waves with distinct frequencies using Fourier transformation. If we study the way an object vibrates at those distinct frequencies, known as resonance or modes, we can predict how an object will create a sound and what sound it will create.

Ernst Chladni was the first to study these modes in 1787. He used flat plates, now known as Chladni plates, to study the vibrational behavior of flat surfaces. The classic plate is of a uniform thickness to simplify the understanding of the natural modes of vibration. It is difficult to analyze modes of vibration because to the eye, the plate does not appear to move. To study this, we need to drive the plate at natural modes of sinusoidal wave frequencies. Chladni did this by bowing the plates, and we are able to do it with a function generator and a small-massed driving magnet and electromagnetic drive coil. Certain modes, dependent upon the material of the metal, the shape, and the thickness, will resonate with specific frequencies. A circular Chladni plate will vibrate with nodal diameters and nodal circles. An elementary way to study this is to use sand or fine shavings and drive the plate at its resonant frequencies. The shavings will move to the lines on the plate that do not vibrate, called nodal lines. The result is a plate with sand lines at the nodes of vibration of the plate, which gives us a good idea of the manner of vibration. This technique relies on the assumption that the sand is massless and moves with little force at all. It is also limited by the fact that the surface must be relatively horizontal and relatively flat. Unfortunately this is rarely the case.

A much more sensitive and versatile way to understand the production of sound is by using vibrational holography. The technique of vibrational holography applies what we know of optics and wave superposition to study the vibrational modes of vibrating surfaces. Vibrational holography, or holographic interferometry uses laser superposition to either constructively or destructively interfere a reference and object beam to show where the previously mentioned nodal or antinodal areas of the plate vibrate.

As with any study using wave superposition, it is necessary to have a single coherent wave front to create the interference. Please refer to [Figure 1](#). One He-Ne laser is used and split into two beams with a partially reflective mirror. One beam, the object beam, travels along a path to the object. The object is being driven at a given frequency by a contact magnet. The laser is reflected off of the object to an emulsified glass plate. From the beam splitter, a second laser beam, known as the reference beam, follows a different path. Because of the emulsion of the holographic plates, there will be an interference pattern on the plate that is formed from all the different path lengths.

If our object is not vibrating, there will be interference at many different levels due to the non-regular shape of our subject. The interference from the path differences creates a complex diffraction grating on the film. When we develop our plate, the areas of constructive interference become spots on the film. When we use the laser to view the image, we will diffract the reference beam to form a virtual image of our object from this very complex diffraction pattern.

When an object is vibrating in a sinusoidal manner, it spends most of its time at the point of maximum displacement. The interference pattern created when the vibrating object is at the positive and negative maximum displacement will emphasize certain areas in the grid of the points of interference in the plate to create our visualization of the vibration. While the plate is in between the positive and negative amplitude, the result on our plate is *averaged out* in the time average and, therefore, does not embellish our data. When the object vibrates, the path length will be changed from positive amplitude to negative amplitude. At the emulsified glass plate, the two wave fronts interfere depending on how much that particular part of the vibrating surface moved. Because the laser wavelength is on the order of 632.8 nm (6.328' 10-7 m), the surface must only move about one half of a wavelength to change from constructive interference to create a *dark fringe*. Because of the small wavelength produced by the laser, spatial resolution is excellent at low amplitudes. These fringes get closer together when the path difference increases and a bulls-eye pattern is created where the antinodes are located, surrounded by a nodal circle. We can study these fringes with known functions to help us describe the vibration of the object.

- **Theory**

---

As an introduction, we can look at the behavior of a single exposure hologram, reconstructing an intensity field of the following:

We can show the  $\mathbf{E}$  field incident on a holographic plate is simply the function of a vector addition of two  $\mathbf{E}$  fields (the reference beam and the object beam).

$$\begin{aligned} E_{ref} &= re^{i\omega t} e^{\frac{i}{\lambda}x\sin(\alpha)} \\ E_{subj} &= se^{i\omega t} e^{\frac{i}{\lambda}x\sin(\beta)} \\ E_{total} = E_{subj} + E_{ref} &= re^{i\omega t} e^{\frac{i}{\lambda}x\sin(\alpha)} + se^{i\omega t} e^{\frac{i}{\lambda}x\sin(\beta)} \end{aligned}$$

As in most cases, what is recorded is the irradiance of the total field. We can show:

$$\begin{aligned} I &= (E_{subj} + E_{ref})(E^*_{subj} + E^*_{ref}) \\ I &= r^2 + s^2 + E_{subj}E^*_{ref} + E_{ref}E^*_{subj} \\ I &= r^2 + s^2 + rse^{\frac{i}{\lambda}(x\sin(\alpha) - \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\beta))} + rse^{-i(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin(\alpha) - \frac{2\pi}{\lambda}x\sin(\beta))} \end{aligned}$$

This irradiance is recorded on the film as a light and dark pattern (a diffraction pattern if you will). When we reilluminate the film with the reference beam, the transmitted electric field will have an electric field that is attenuated (albeit nonuniformly) by the pattern on the film.

Now we can show through a series of calculations, that the resultant electric field created when we reilluminate the holography plate with just the reference beam:

$$E_{resultant} = (r^2 + s^2)E_{ref} + r^2se^{\frac{i}{\lambda}(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\sin(\alpha))} + r^2se^{\frac{i}{\lambda}(2\frac{2\pi}{\lambda}x\sin(\beta))} e^{\frac{i}{\lambda}(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\sin(\alpha))}$$

The first term of this is actually the reference beam, modulated in amplitude but not phase. This means the incident beam passes through the film unchanged. The second term describes the electric field that would come from the object. The third term actually is the  $\mathbf{E}$  field due to a *real image* of the subject, but is not important to our data.

The phase of this second term is due to the term  $x\sin(\alpha)$ . This phase is for only a singly exposed hologram. If we look at a moving source, we must take into consideration the optical path length difference; this difference can be explained with respect to the unit vector  $\mathbf{n}_1$ , representing the direction of illumination of the object, the  $\mathbf{n}_2$  the direction of recording (or the direction to the film), and  $\mathbf{n}_m$ , the direction of vibration.

$$\Delta = A\mathbf{n}_m \cdot (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)$$

$A$  is the displacement of vibration at any particular point on our object. If we change this as a function of time by multiplying it by  $\sin(\omega t)$ , we get an  $\mathbf{E}$  field as follows:

$$E_{image} = E_0 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} Am_m(n_1+n_2) \sin(\alpha t))}$$

where  $E_0$  is a function varying with time as:

$$E_0 = r^2 s e^{i\omega t}$$

If we take the time average of this function, we get the integral:

$$\langle E_{image} \rangle = E_0 \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} Am_m(n_1+n_2) \sin(\alpha t))} dt$$

According to Brown, Grant, and Stroke, this image has an intensity that goes like a first order Bessel function:

$$I = |E_0|^2 \left| J_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} Am_m \cdot (n_1 + n_2) \right) \right|^2$$

This equation is the intensity of a single point on our object, but can be used to describe all points on our object with some creative thinking. If we think of every point on our object as a single source, we can take a sum over all points to reconstruct the object.

This technique of time-average holography has been used at length studying the production of sound in string instruments such as classical and acoustic guitar, percussion instruments such as snare drums, hand bells and steel drums.

Vibrational interferometry research at Stetson University was initiated in 1996 with Frank McDonald's research under Dr. Kevin Rigg's mentoring on *Modal Analysis of Musical Instruments Using Vibrational Holography*. Stetson now has an active acoustical holography lab that is ready for in depth research. The summer of 1996 the lab was used to analyze the modes of steel drums and guitar bodies. The lab is now ready for research on a subject that has not previously been investigated anywhere.

In this case (1997), we will be examining the complex plates found in Turkish and Chinese orchestral cymbals. These specimens, specifics to be named later, have the more complex variable thickness and folds of the plate and center bells. These will produce more complex modes of vibration, changing and bending with the shape of the cymbal. The Turkish cymbal, for example, tends to be of a thicker brass, which means that the amplitude of the vibrations will be less. In comparison, the Chinese cymbals have more of a center bell and at the edge of the cymbal the plate folds up at an angle.

There is also a technique using these interference patterns called *real-time interferometry*. If we take an exposure of the object that is not vibrating and develop the plate, we can replace it in the exact place in the gravity plate holder using ball bearings and set-pins. This plate holder restricts all six degrees of freedom so that we can superpose the hologram and the object. When we set the Chladni plate in vibration, interference pattern appears on the object and, therefore, is called *live-fringe*. We will be using the lab for this form of nondestructive testing also. We will use video and photography to record this.

We will be using photography and emulsified glass plates as a record medium for our findings on our complex Chladni plates, and define each of the resonating frequencies into the accepted form of  $(m,n)$  where  $m$ = nodal diameters, and  $n$ = nodal circles. There are bound to be some perturbations from the classic Chladni plates due to the complex nature of the system. Though this is too complex to solve directly, we can use computational physics and solve it numerically.

---

- *G<sub>3</sub> Hand Bell-Amplitude Analysis*

We can learn about the amplitude analysis ability of vibrational holography. We can look at the (3,1) modes of the hand bell at two different amplitudes (Fig 1 –2):

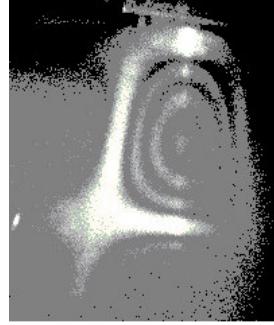


Figure 1-(3,1) mode being driven at -60.2 dB (relative)

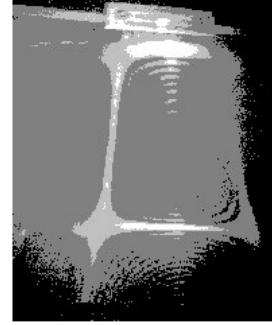


Figure 2-(3,1) mode driven at -50.0 dB (relative)

If you notice, the nodal lines and circles are in the same places, letting us know it is the same mode. This could be confirmed by looking at the holography log and noting that they were both done when the bell was being driven at 1342.3 Hz. The driving amplitudes are measured with a near-field microphone and recorded in decibels. The dB scale is a logarithmic scale. We can describe the *Sound Intensity Level* (or intensity in dB) is defined as:

$$SIL = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

where  $I$  is intensity, which is proportional to displacement squared.

If we look at comparing two levels, we can show:

$$\begin{aligned} SIL_1 &= 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \\ SIL_2 &= 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \\ SIL_2 - SIL_1 &= 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10 \left( \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \right) = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \\ SIL_2 - SIL_1 &= 10 \log\left(\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right) = 20 \log\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \end{aligned}$$

If we look at our specific case, we can calculate the ratio of  $d_2/d_1$  is 3.16. If we assume that there is a linear function of interference, we should be able to count up the number of fringes and take the ratio of Fig.15/Fig.14. When we do this, we get 3, which compares very well. The difference is due to the incorrect assumption of linear functionality, and the fact that when we count the fringes, this is a quantized amount, which would not give us a fraction as a ratio. Actually the fringes correspond to zeros of Bessel's function. Our calculation is rough approximation is hopeful for a future paper that studies more accurately the amplitude dependency of vibrational holograms.

- **Conclusion**

There are many applications for this technique in industry. The method of vibrational holography has and can be used to study stress in turbines among other things. In our particular laboratory, we spent the summer dedicated to percussion instruments, particularly of the cymbal family. These metal subjects are, as previously stated, broken up into two families: those that are clamped at the edges, and those free to vibrate at the edges. The cymbals were the ones that were free to vibrate at the edges. These were successfully shown to be easily modeled by a uniform circular plate. Even a hand bell could conform to this model. The variance in thickness, and contour of the actual cymbal were relatively negligible, until we studied the Sabian AAX Mini-Chinese® Cymbal, and the Paiste Alpha Splash® Cymbal are when the perturbations of the non-uniformity of the cymbal were too great to conform to the uniform plate model. Though the steel drum should have been modeled by the square plate clamped at the edges, the modes of this were very different. This was no doubt due to the fact that the notes on a steel drum are not square, but if we must classify them as a regular shape, it would be that of a trapezoid. The thickness variations due to the hammered tuning process also play an important role in the normal modes of vibration.

There were several problems with the execution of this technique that need to be dealt with at this point. The first is the topic of coherence length. Unfortunately, the He-Ne laser used in this experiment had a coherence length that was only 20-30 cm. The attention paid to the coherence length and its relation to the path length difference however should have been greater. This lack of attention leads to a contrast in the hologram that was less than that achievable. In the future, there should be more a greater amount of time spent in maximizing the contrast in the holograms but matching the path lengths. This lack of contrast lead to the decision to omit the steel drum results from this paper.

The second of our problems had to do with the issue of photographing our holograms. Initially, we placed the film close to our subject so that we could collect as much light reflected off the vibrating surface onto the holography film as possible. We were still able to evaluate each subject's modal attributes quite well, due to the parallax phenomena available in the hologram. Unfortunately however, the camera does not take advantage to the parallax of the hologram, and therefore in some of the subjects, our publishable data (namely the photographs) turned out to be simply unpublishable. We need to take this into consideration in future research.

In the vein of the photographs, one of the most difficult things in post-research processing was to get good quality photographs of the holograms. Though the best results quickly came from high speed film (ASA 3200 i.e. exposure times of  $3.125 \times 10^{-4}$  s), the nature of this film is there are large crystals of silver deposited on the film to collect as much light as possible. The high resolution achieved by the holographic film therefore is drastically reduced in this process. Theoretically, we should be able to use *much* slower film because the photography is also done in a light vacant room, similarly to the exposure of the holographic film. It would not be too difficult to spend a little more time at perfecting this portion of the research to attain better results for publishable data.

Some of the records or subject modes were damaged in developing the actual holography film. It is important to remember that the emulsion is not fixed to the plastic (or glass) backing. In developing the hologram, we must remember this fact and not damage the emulsification of the holography film.

As a whole, we were able to successfully perform modal analysis on our subjects. We circumvented noise that would have prevented us from using this highly sensitive method of vibrational study. Though we got the preliminary "rough" fit of amplitude analysis, a future endeavor is logically to study the ramifications of amplitude analysis on our subjects. The work involved is simply to further research of the results of the equation involving Bessel functions

$$I = |E_0|^2 \left| J_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda} Am_m \cdot (n_1 + n_2) \right) \right|^2$$

The amplitude information falls out of this equation. The data is taken and there is no laboratory work necessary for this, though better contrast holograms and better photographs would be recommended.

---

Future projects from this are numerous. In the summer of 1998, research is planned for installing the technique of TV

holography, a method of real time Interferometry *directly* incident on a camera lens, united with a wave-recombiner. TV Holography is a much more efficient and will prove to be very useful in the future.

---

- **Chladni Patterns for Violin Plates, endereço eletônico:**  
<http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/chladni.html>.

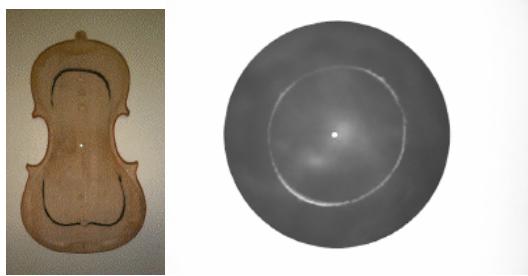
---

#### *Chladni patterns for violin plates*

Chladni patterns show the geometry of the different types of vibration of violin plates. This site has an introductory explanation of modes of vibration and a library of photographs of the Chladni patterns of the bellies and backplates of two different violins (hand-made). It also has photographs of plates with this link.

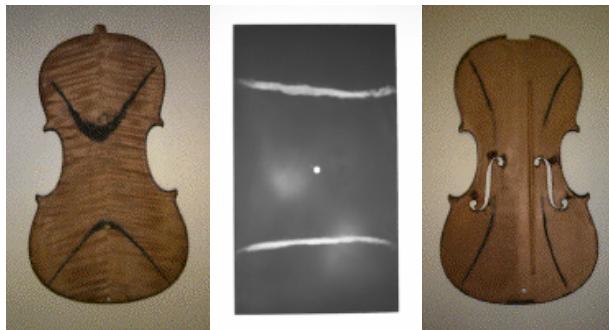
##### *Naming of modes*

The modes of plates of different geometries have different systems of naming. For a rectangular plate, they are identified by two numbers ( $n,m$ ) where  $n$  is the number of modes running parallel to the long axis and  $m$  the number in the perpendicular direction (see the examples above). For a circular plate, they are called ( $n,m$ ) too, but in this case  $n$  is the number of nodes that are diameters (straight lines) and  $m$  is the number of circular nodes. For the violin plates, the modes have more complicated shapes. They are numbered in a way that, for most violins, corresponds to increasing frequency. That is why the modes in the photographs shown above have the names given in square brackets.



Mode 5 for the violin (called the ring mode) is comparable with the (0,1) mode of a circular plate. In this mode, the central region moves in the opposite direction to the perimeter.

The modes for the belly are complicated by the presence of the f-holes (which make the plate more flexible to bending of the short axis) and the bass bar (which makes the plate less flexible to bending of the long axis). Compare the second mode, in which the modes of the top plate could be considered to have rotated by 90 degrees. (see the photographs below) The bass bar also breaks the symmetry for most of the modes of the belly.



##### *How are Chladni patterns formed?*

There are at least three different methods.

- The plate can be made to resonate by a powerful sound wave which is tuned to the frequency of the desired mode.
- The plate can be bowed with a violin bow. This is easiest if one chooses a point that is a node for most of the modes that one doesn't want, but not for the desired node.
- The plate can be excited mechanically or electromechanically at the frequency of the desired mode.

For the photographs on this site, a small (0.2 g) magnet was fixed to the plate. An oscillating magnetic field (provided by a coil connected to an audio amplifier and a signal generator) is used to provide an oscillating force whose frequency is tuned to the resonance of the mode. Experiments using different masses showed that the mass of the magnets caused us to underestimate the frequency by about 1 Hertz.

In all cases, some finely divided material is placed on the plate. The material used here is fine sand. When the plate resonates, the motion becomes large over most of the surface and this causes the sand to bounce and to move about. Only at or near the node is the sand stationary. Thus the sand is either bounced off the plate or else collects at the nodes, as shown in the photographs. We used white sand from [Coogee Beach](#) to the East of the campus, and black sand from Rainbow Beach on Fraser Island. Emmanuel and Renaud are now leaving on a "research" trip to bring back supplies of diverse colours from Rainbow Beach.

#### *Why are Chladni patterns useful?*

The shaping the back and belly plates is very important to the properties of the final instrument. Chladni patterns provide feedback to the maker during the process of scraping the plate to its final shape. Symmetrical plates give symmetrical patterns; asymmetrical ones in general do not. Further, the frequencies of the modes of the pair of free plates can be empirically related to the quality of the completed violin. Many scientists have been interested in the acoustics of violins, and many violin makers have been interested in science, so a lot has been written about the acoustical properties of violins and their parts. See:

- "Research Papers in Violin Acoustics", CM Hutchings and V Benade, eds, Ac.Soc.Am. 1996
- "The acoustics of violin plates" by Hutchins, C.M. Scientific American, Oct.1981, 170-176.
- "Experiments with free violin plates" by Jansson, E.V., Moral, J.A. and Niewczyk, J. J. CAS Journal Vol 1 No 4 (Series II) 1988.
- "The Physics of Musical Instruments" by Fletcher, N.H. & Rossing,T.D. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Mode Tuning for the Violin Maker](#) by Carleen M. Hutchins and Duane Voskuil CAS Journal Vol. 2, No. 4 (Series II), Nov. 1993, pp. 5 - 9
- [The Catgut Acoustical Society home page](#)

#### *More Chladni patterns*

- [A library of Chladni patterns for a hand-made violin](#)
- [A library of Chladni patterns for a mass-produced violin](#)
- [Chladni patterns of violin plates compared with the analogous modes for simple rectangular and circular plates](#)

#### **Some explanatory notes and related pages on this site**

- [How does a violin work?](#), and
- [Some more detailed information about our work on violin acoustics](#)
- [Some transfer functions measured on violins and violin plates](#)
- [Bows and strings](#)
- [Strings, harmonics and standing waves](#)
- [What is a sound spectrum?](#)
- [What is a decibel?](#)
- [How do woodwind instruments work?](#)

- [Flute acoustics](#)
- [Other research projects in musical acoustics at UNSW](#)
- [The Science of Music](#)
- [An interactive introduction to the orchestra](#)

### Some links to related sites

- [The Catgut Acoustical Society](#)
- [List of violin resources](#)

The visiting researchers: [Emmanuel Bossy](#) and [Renaud Carpentier](#)  
UNSW team: [John Smith](#), [John Tann](#) and [Joe Wolfe](#).

The text and images are copyright. Please do not use them without permission and attribution.

- Chladni Patterns for Guitar Plates, endereço eletrônico:  
[http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/guitarchladni\\_engl.html](http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/guitar/guitarchladni_engl.html)

#### *Chladni patterns for guitar plates*

Chladni patterns show the geometry of the different types of vibration of the guitar top plate. This site has an introductory explanation of modes of vibration and a library of photographs of the Chladni patterns of a guitar top plate and an intact guitar.

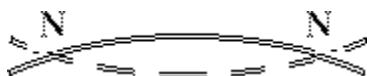
The results reported on this site are part of a practicum project by:

[Thomas Erndl](#)  
[Musical Acoustics Group](#)  
[School of Physics](#)  
[The University of New South Wales](#)

Thomas is a student at the Fachhochschule Regensburg in Germany.

#### *Modes of vibration*

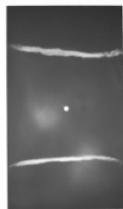
(See also the explanations of [the guitar](#), and [Strings, harmonics and standing waves](#).) A **mode** of vibration is just a way of vibration. Think what happens when you strike a xylophone bar in the middle and set it vibrating. The bar is supported at two points towards the ends. The simplest mode of vibration is this: when the middle of the bar goes up (as shown by the solid lines in the figure) the ends of the bar go down. When the middle goes down (dashed lines), the ends go up. The two points that do not move are called **nodes** and are marked N in the diagram. (If "modes" and "nodes" sound confusing, remember that the **node** has **no** motion.)



Sketch of a simple mode of vibration.

This first mode of the xylophone bar is rather similar to a mode of vibration of a simple rectangular plate which is called the (0,2) mode (the naming convention is explained below.)

Photographs of the Chladni pattern of:  
mode (0,2) of a uniform rectangular aluminium plate.

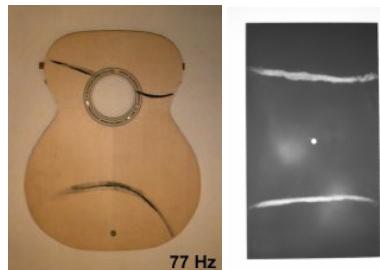


In this picture, the lines are formed from sand that has collected at the nodes, but has been shaken off the moving regions. The top plate of a guitar is more complicated in shape, and so the nodes also have a more complicated shape. White sand was used for the black-painted aluminium plate, and black sand for the guitar top plate.

#### *Why are there nodes?*

The supports of the xylophone bar do not cause the nodes, rather they are placed at the positions which are nodes so as to facilitate this vibration. In an object which is not firmly clamped, a vibration cannot easily move the centre of mass of the object. It follows that, if some part is going up, another part is going down. In the simple motion at resonance, the point(s) that divide(s) these regions are nodes. When a violin or an isolated part is vibrating, the centre of mass doesn't move much, so once again it can be divided into parts that are going up and others that are going down. In these simple modes of vibration, the motion of different parts is either exactly in phase or exactly out of phase, and the two regions are separated by nodes. The nodes are points for a quasi one-dimensional object like a string, or lines for a quasi two-dimensional object like a plate. (There is more explanation in [Strings, harmonics and standing waves](#).)

#### *Modes of guitar plates*



One of the modes is comparable with a mode of vibration of a rectangular plate. In this mode the nodal lines separate the plate in three parts, so it can be compared with the (0,2) mode of the rectangular plate, with the middle part moving 180° out-of-phase with the ends.

The modes for the guitar plate are complicated by the presence of the sound hole and the bracing.  
[More guitar Chladni patterns](#).

#### *How are Chladni patterns formed?*

There are at least three different methods.

- The plate can be made to resonate by a powerful sound wave which is tuned to the frequency of the desired mode.

- The plate can be bowed with a violin bow. This is easiest if one chooses a point that is a node for most of the modes that one doesn't want, but not for the desired mode.
- The plate can be excited mechanically or electromechanically at the frequency of the desired mode.

For the photographs on this site, a small (4g) magnet was fixed to the bridge. An oscillating magnetic field (provided by a coil connected to an audio amplifier and a signal generator) was used to provide an oscillating force whose frequency is tuned to the resonance of the mode. Experiments using different masses showed that the mass of the magnets caused us to underestimate the frequency by about 10 Hertz in some cases. But there were also patterns obtained with a magnet which could not be obtained without a magnet (e.g. by a speaker). That means, that the vibrating system has changed qualitatively by adding the magnet to the plate.

In all cases, some finely divided material is placed on the plate. The material used here is fine sand. When the plate resonates, the motion becomes large over most of the surface and this causes the sand to bounce and to move about. Only at or near the node is the sand stationary. Thus the sand is either bounced off the plate or else collects at the nodes, as shown in the photographs.

#### *Why are Chladni patterns useful?*

The adjustment of the top plate is important to the properties of the final instrument. The most important adjustments are thinning the wood towards the edge of the plate, and thinning the braces. Chladni patterns provide some feedback to the maker during the process of adjusting the plate to its final shape. Symmetrical plates give symmetrical patterns; asymmetrical ones in general do not.

It is very difficult to relate the frequencies of the modes of the isolated top plate to those of the modes of a finished guitar. Fortunately, adjustments can be made to an intact instrument: thinning the top plate close to the edge, and adjusting the bracing by reaching through the soundhole with specially shaped tools. The "tuning" of plate resonances is less formalised in guitar making than in violin making. Over the centuries, violin makers have discovered empirical relations between the modes of free plates and the properties of the finished instrument. Many scientists have been interested in the acoustics of violins, and many violin makers have been interested in science, so a lot has been written about the acoustical properties of violins and their parts. See:

- "Research Papers in Violin Acoustics", CM Hutchings and V Benade, eds, Ac.Soc.Am. 1996
- "The acoustics of violin plates" by Hutchins, C.M. Scientific American, Oct.1981, 170-176.
- "Experiments with free violin plates" by Jansson, E.V., Moral, J.A. and Niewczyk, J. J. CAS Journal Vol 1 No 4 (Series II) 1988.
- "The Physics of Musical Instruments" by Fletcher, N.H. & Rossing,T.D. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Mode Tuning for the Violin Maker](#) by Carleen M. Hutchins and Duane Voskuil CAS Journal Vol. 2, No. 4 (Series II), Nov. 1993, pp. 5 - 9
- [The Catgut Acoustical Society home page](#)

#### *More Chladni patterns*

- [A library of Chladni patterns for a guitar top plate](#)
- [A library of Chladni patterns for a hand-made violin](#)
- [A library of Chladni patterns for a mass-produced violin](#)
- [Chladni patterns of violin plates compared with the analogous modes for simple rectangular and circular plates](#)

#### **Some explanatory notes and related pages on this site**

- [A simple overview of the operation of the guitar](#), and
- [Some more detailed information about work relating to guitar acoustics](#)
- [Strings, harmonics and standing waves](#)
- [What is a sound spectrum?](#)

- [What is a decibel?](#)
- [Violin acoustics](#)
- [How do woodwind instruments work?](#)
- [Flute acoustics](#)
- [Other research projects in musical acoustics at UNSW](#)
- [The Science of Music](#)
- [An interactive introduction to the orchestra](#)

### Some links to related sites

- [The Catgut Acoustical Society](#)

---

The visiting student: Thomas Erndl  
UNSW team: John Smith, John Tann and Joe Wolfe.  
The text and images are copyright. Please do not use them without permission and attribution.

---