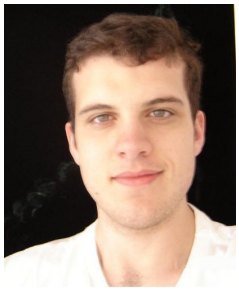
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física Gleb Wataghin

Instrumentação para Ensino F 609

Relatório Final



Aluno: Juliano Carvalho Bento RA 024203
julianocb@gmail.com
Orientador: Pedro Raggio
praggio@ifi.unicamp.br

Professor responsável: José J. Lunazzi

Título do Projeto

"Verificação Visual do Momento de Inércia por simples experimentação"

1. Descrição

Dois Cilindros confeccionados parte latão, parte nylon, mas distribuídos de formas diferentes - em uma parte o latão se encontra em forma de um cilindro ao redor do nylon, e no segundo cilindro, os materiais são dispostos de maneira inversa – entretanto, ambos possuindo mesma massa, diâmetro e volume. O Momento de Inércia de cada cilindro será detectado através de medida simples por cronometragem do tempo, por intermédio de pesos de mesma massa num fio de barbante, observando com isso uma diferença de fase na rotação e no tempo de queda do peso, demonstrando a ação do Momento de Inércia, que, analisado somente em termos de massa, parece ser improvável de ocorrer.

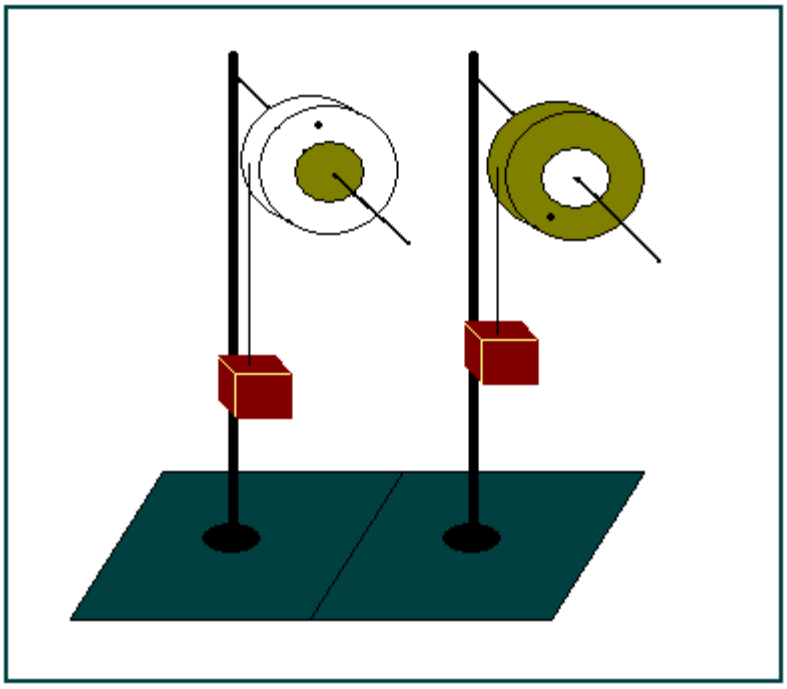


Fig. 1 Duas roldanas em forma cilíndrica dispostos com massa diferente uma da outra

2. Importância didática do trabalho

O aluno ingressante no curso de física se vê frente a uma série de conceitos e definições novas que muitas vezes não ficam claras, resultando numa defasagem até mesmo o longo de todo curso. Conceitos como Momento Angular e Momento de Inércia não são óbvios num primeiro contato e exigem um estudo depurado para que se obtenha uma noção clássica do que tais idéias sugerem e representam.

Desta forma, neste experimento, estamos visando evidenciar, por intermédio de um aparato experimental simples, esta grandeza física, pela observação explicita de sua atuação e seus efeitos em corpos, de forma que um aluno do Ensino médio, e até mesmo o aluno ingressante no curso de física visualize e entenda este fenômeno.

3. Introdução Momento de Inércia

Momento de Inércia é um nome dado a inércia rotacional, ou seja, a uma rotação análoga a massa para um movimento linear. Esta grandeza aparece numa dinâmica para corpos em movimento rotacional, que deve ser especificado com respeito aos eixos de rotação. Para um centro de massa, o momento de inércia é apenas a massa elevada ao quadrado de uma distância perpendicular ao eixo de rotação, $I = mr^2$. Esta relação com o centro de massa é a base para todos outros momentos de inércia.

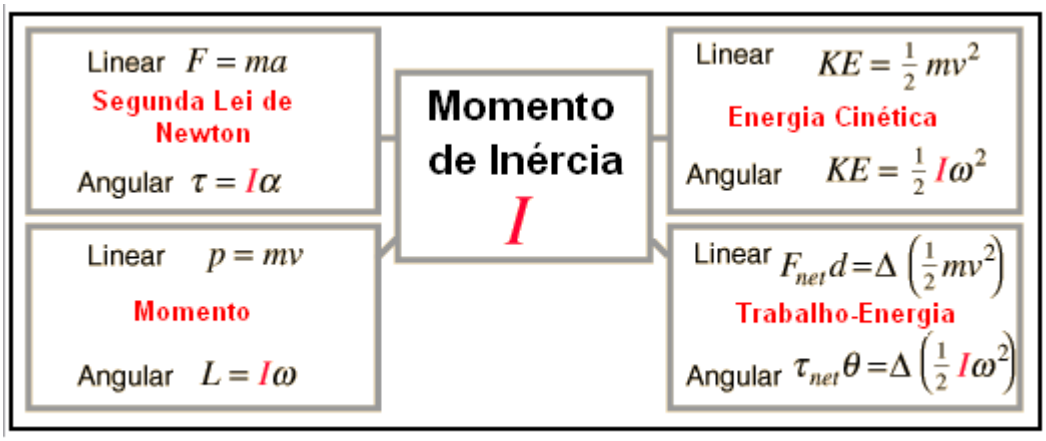


Fig 2: Diagrama do momento de inércia

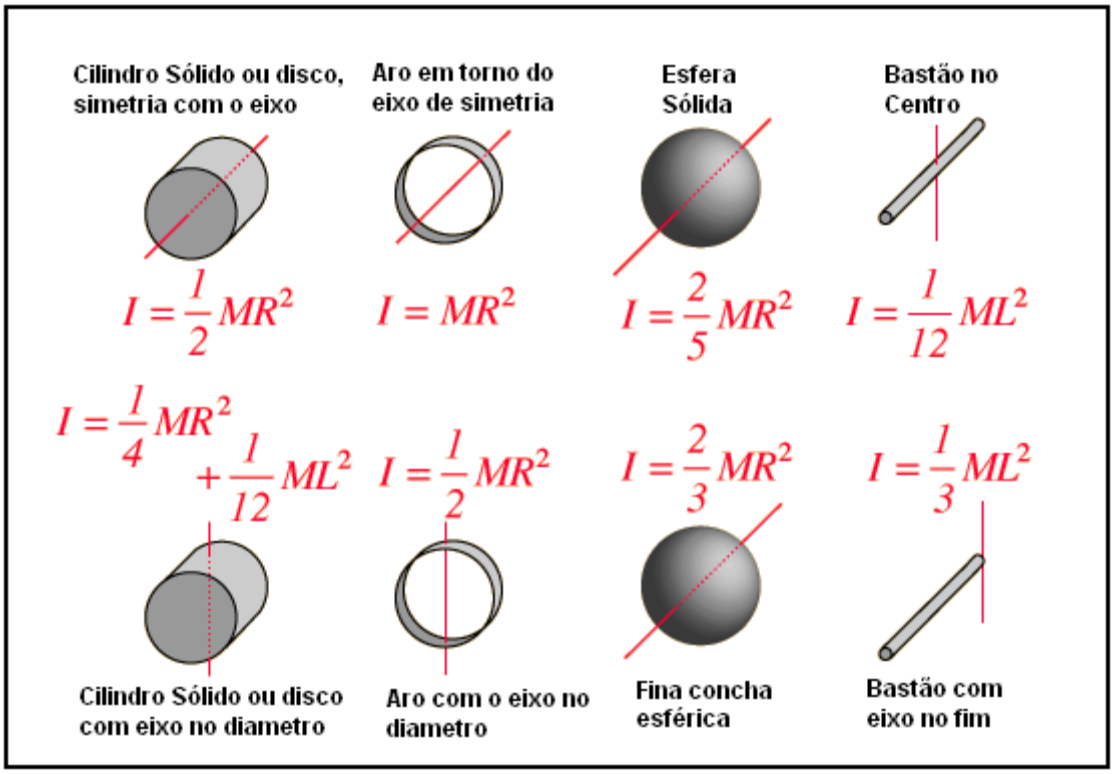


Fig. 3: Diferentes sólidos e eixos e seus respectivos momentos de inércia

Neste experimento, evidenciaremos diferentes momentos de inércia baseado em dois cilindros descritos anteriormente.

3.1. Calculo do momento de inércia de um cilindro homogêneo

Para calcular o momento de inércia de um cilindro de massa M, raio R e comprimento L relativo a seu eixo.

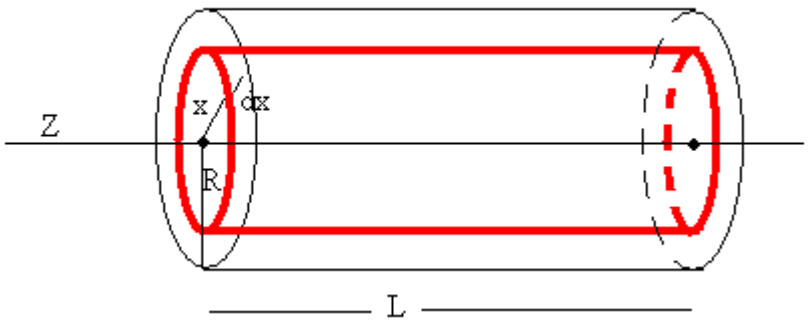


Fig. 4 Esquema do Cilindro

Pegamos um elemento de massa a uma distancia *x* do eixo de rotação. O elemento é uma camada cilíndrica cujo raio interno é *x*, externo *x*+*dx*, e de comprimento *L*, tal como é mostrada na figura. A massa *dm* que contém esta camada é:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 L} 2\pi x dx \cdot L = \frac{2M}{R^2} x dx \quad , \quad (1)$$

O momento de inércia do cilindro é:

$$I_C = \int x^2 dm = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} MR^2 \quad ,(2)$$

Pela soma dos momentos de Inércia do anel cilíndrico, com o cilindro maciço interno, podemos obter o Momento de Inércia do cilindro total.

3.2 Cálculo do Momento de Inércia Teórico para os Cilindros do Experimento

O Momento de Inércia teórico de um cilindro oco em relação ao seu eixo se dá pela relação

$$Ico = \frac{1}{2} M' (R_1^2 + R_2^1) \, , \, (3)$$

Onde R_1 é o raio interno e R_2 é o raio externo do cilindro. Conforme a equação (2) sabemos que $Ic = \frac{1}{2}MR_1^2$.

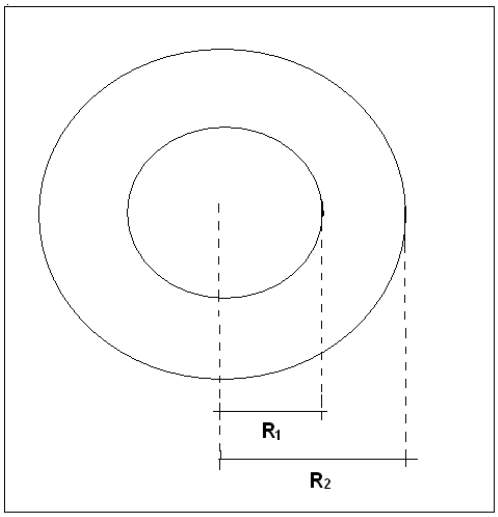


Fig. 5: Representação do cilindro

De um corpo continuo, com densidades diferentes, podemos calcular o momento de inércia como sendo:

$$I = I_C + I_{CO} \quad (4)$$

Pois podemos considerar as densidades constantes num continuo.

3.3 Cálculo do Momento de Inércia Experimental para os Cilindros do Experimento

Iremos calcular este momento de inércia, com o princípio da Conservação da energia mecânica desprezado neste momento as forças dissipativas:

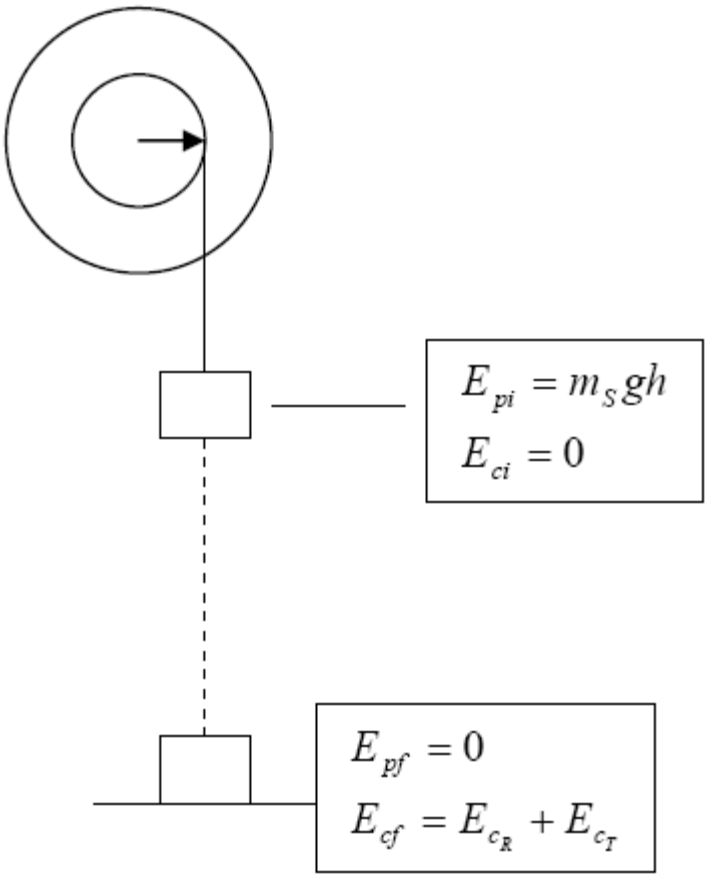


Fig. 6 Esquema para o Cálculo do Momento de Inércia Experimental do Cilindro, utilizando Conservação da Energia Mecânica.

$$\Delta E_m = 0$$

$$E_{p_i} + E_{c_i} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$m_S gh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_S v^2 \quad \text{mas } v = \omega r$$

$$m_S gh = \frac{1}{2}\left(m_S v^2 + I\frac{v^2}{R^2} \right) \text{como}$$

$$v = \frac{2h}{t} \text{ então:}$$

$$I_{\exp} = r^2 m_s \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (5)$$

Onde h, é a altura que cairá o peso, g a aceleração da gravidade e m_s a massa do peso. Através destas equações pudemos calcular teoricamente que para uma massa do peso de 200 gramas, o tempo do cilindro com latão na borda alcançava 3,6 segundos e o volume com PP na borda 2,6s, algo visível ao cronômetro, evidenciando que o experimento é uma boa forma de visualização do momento de Inércia, como também veremos adiante.

4. Originalidade

Parte do experimento foi idealizado em analogia com os mesmos realizados em laboratórios de ensino de física, contudo o diferencial se encontra na relação de distribuição e comparação dos momentos de inércia de dois corpos aparentemente e em temos de massa iguais. Nesse sentindo, o experimento, da forma apresentado não foi encontrado numa análise em livros e websites de ensino de física.

5. Resultados Atingidos

No início, pelo fato de ainda não termos construído os cilindros em sua totalidade, não pudemos coletar dados comparativos de forma a verificar se o procedimento iria ocorrer. Contudo, foi realizado no Laboratório de Ensino de Física, com uma roldana com o valor aproximado dos cilindros que utilizaremos, pudemos observar que o pesos deve possuir uma massa mínima de 200 gramas, e com menor massa, melhores resultados podemos coletar, na diferença de momento de inércia. (Cálculo obtido em 3.2).

Fig. 7 Cilindros de latão prontos sem o nylon

Entretanto, uma vez obtidos os Cilindros prontos (fig. 8 e 9) podemos calcular o tempo de queda de uma massa e, assim, calcular o valor experimental do momento de Inércia pela relação (5). Entretanto apresentarmos primeiramente os dados teóricos:

Sendo o cilindro com latão por fora tendo os seguintes dados:

Massa de latão =815g
Massa de nylon= 320g
Sendo a distribuição calculada com as medidas do furo (diâmetro 0,3cm),parte nylon (anel com espessura de 2,5cm), parte latão (anel com espessura de 2,35cm)
Temos como Momento de Inércia: 20.684 g cm^2

Fig. 8: Cilindro com nylon externo e latão interno

Sendo o cilindro com latão por fora tendo os seguintes dados:

Massa de latão =815g
Massa de nylon= 320g
Sendo a distribuição calculada com as medidas do furo (diâmetro 0,3cm),parte nylon (anel com espessura de 4,15cm), parte latão (anel com espessura de 0,7cm)
Temos como Momento de Inércia: 7.556 g cm^2

Fig. 9 Cilindro com latão externo e nylon interno

Observamos uma diferença acentuada entre os momentos de inércia, dos mesmos. Experimentalmente realizamos o seguinte processo:

Primeiramente obtivemos os valores de queda para duas diferentes massas (um peso de 80g e outro de 30g) numa altura de 1,295±0,005 metros

	Latão Externo	**Latão Externo**	**Nylon Externo**	**Nylon Externo**
Massa	(80±1)g	(30±1)g	(80±1)g	(30±1)g
tempo 1 (s)	1,82±0,01	3,09±0,01	1,23±0,01	1,95±0,01
tempo 2	1,80±0,01	3,32±0,01	1,32±0,01	1,90±0,01
tempo 3	1,92±0,01	3,36±0,01	1,29±0,01	1,92±0,01
tempo 4	1,93±0,01	2,96±0,01	1,17±0,01	1,93±0,01
tempo 5	1,87±0,01	2,93±0,01	1,26±0,01	1,92±0,01

tempo 6	1,70±0,01	3,26±0,01	1,26±0,01	2,01±0,01
tempo 7	1,84±0,01	3,06±0,01	1,15±0,01	2,00±0,01
tempo 8	1,64±0,01	3,17±0,01	1,24±0,01	2,07±0,01
tempo 9	1,76±0,01	3,20±0,01	1,18±0,01	1,80±0,01
tempo 10	1,84±0,01	3,31±0,01	1,09±0,01	1,84±0,01
Média	1,81±0,01	3,17±0,01	1,22±0,01	1,93±0,01

Da equação 5 temos que

$$I_{\exp} = r^2 m_s \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

Sendo r=(5,00±0,05)cm
g=(980,665± 0.005)cm/s
h= (129,50±0,05)cm

Com isso, possibilitou-se o calculo dos momentos de inércia dos mesmos:

	Latão Exter-no	**Latão Ex-terno**	**Nylon Ex-terno**	**Nylon Ex-terno**
Massa	(80±1)g	(30±1)g	(80±1)g	(30±1)g
I_{exp}(g cm^2) 10^2	(22,7±0,4)	(27,7±0,6)	(9,2±0,3)	(9,8±0,2)

6. Dificuldades na experimentação

As maiores dificuldades foram observar se o experimento era viável, e se era compatível, teoricamente, antes de gastar com materiais. Desta forma, muito tempo se levou e foi depreendido para observar, por intermédio de cálculos e experimentos próximos que poderíamos realmente ver a diferença de momento de inércia agindo sobre os cilindros, não sendo desprezível. Para isso, precisamos de dois materiais com densidades muito diferentes, como foi a do latão (dl=8,4g/cm3) e do polipropileno(PP) (dpp=0,9g/cm³).

Outra dificuldade no experimento, foi buscar experimentos que chegavam próximos ao que queríamos demonstrar, e verificamos que na

realidade, muitos experimentos de momentos de inércia, detem-se somente no calculo desta grandeza em sólidos, não desprendendo tempo e averiguar comparações efetivas da sua realidade e ação.

Ao final, trocamos o polipropileno, por um material muito parecido, o nylon com densidade em torno de 1,1g/cm³ pelo fato de não encontrarmos polipropileno disponível para o experimento.

7. Conclusão

Entre o valor teórico e o valor experimental do momento de inércia, podemos notar uma diferença causada pelo fato de não considerarmos o atrito envolvido no sistema. Uma segunda fonte de erro se deve as circunstâncias de realização. Quando utilizamos uma massa muito pequena, a pequenina massa tende a não rolar o material, pela força de atrito existente.

Contudo, notamos que o experimento pode ser uma ótima fonte qualitativa (e quantitativa quando realizado em laboratório), para evidenciar que o momento de inércia é o fator explicativo de como dois cilindros com massas e diâmetros iguais possam ter diferentes tempos de rotação.

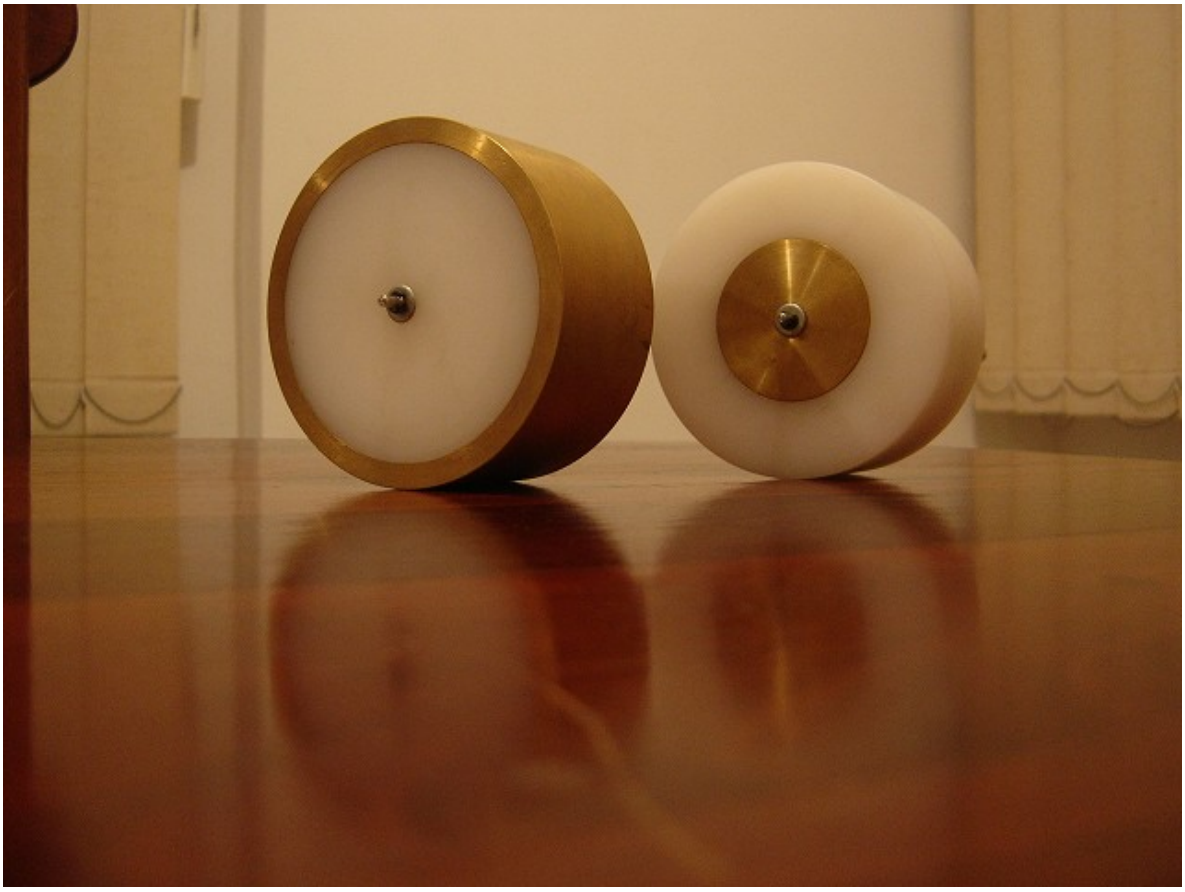


Fig. 10: Ditribuição de massas diferentes

8. Referências:

HyperPhysics – Department of Physics and Astronomy Georgia State University: *http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mi.html#mix*

ASCOL - Academic Sciences Company - *http://www.ascol.co.uk/gallery2.htm*

Portal Feira de ciências - *http://www.feiradeciencias.com.br/sala05/05_RE_08.asp*

Página do Prof: Everton G. de Santana -
http://www.fisica.ufs.br/dfi/CorpoDocente/paginaegsantana/solido/din_rotacion/inercia/inercia.htm

R. Feynman - Lectures on Physics Vol. 1,18 e 19

Palavras chaves usadas em mecanismos como o site de busca Google: (www.google.com.br)

Momento de Inércia – Momento de Inércia + tempo, tempo e corpos sólidos em rotação – Sólidos em movimento circular unifrome – Experimentos Física, inertia momentum

Momentos de inércia
http://www.area48.com/inertia/indexport.html

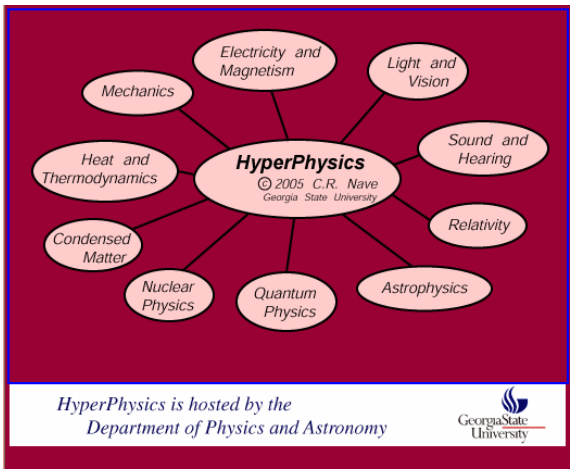
Física Experimental I – Hatsumi Mukai e Paulo R. G. Fernandes
http://www.dfi.uem.br/experimentos.php

Paul A. Tipler – Física Volume 1- Capítulo 9

9. Lista de Materiais

- Latão (Disponibilizado pela Oficina do IFGW);
- Nylon (Disponibilizado pela Oficina do IFGW);
- Cronômetro;
- Pesos (confeccionados em diferentes medidas)
- Paquímetro
- Astes de aço inoxidável
- Trena
- Meio de cálculo
- Material para Banner (despesa do aluno).

10. Referências

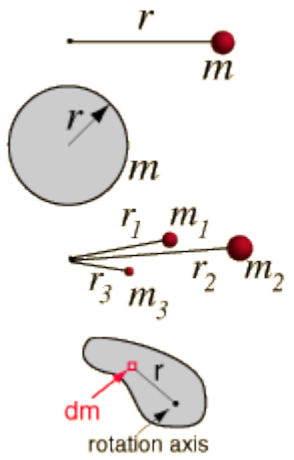


Rotational-Linear Parallels

	Linear Motion	Rotational Motion	
Position	x	θ	Angular position
Velocity	v	ω	Angular velocity
Acceleration	a	α	Angular acceleration
Motion equations	$x = \bar{v}t$	$\theta = \bar{\omega}t$	Motion equations
	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	
	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	
	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	
Mass (linear inertia)	m	I	Moment of inertia
Newton's second law	$F = ma$	$\tau = I\alpha$	Newton's second law
Momentum	$p = mv$	$L = I\omega$	Angular momentum
Work	Fd	$\tau\theta$	Work
Kinetic energy	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy
Power	Fv	$\tau\omega$	Power

Moment of Inertia Examples

Moment of inertia is defined with respect to a specific rotation axis. The moment of inertia of a point mass with respect to an axis is defined as the product of the mass times the distance from the axis squared. The moment of inertia of any extended object is built up from that basic definition. The general form of the moment of inertia involves an integral.



$I = mr^2$ For a point mass the moment of inertia is just the mass times the radius from the axis squared. For a collection of point masses (below) the moment of inertia is just the sum for the masses.

$I = kmr^2$ For an object with an axis of symmetry, the moment of inertia is some fraction of that which it would have if all the mass were at the radius r.

$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$ Sum of the point mass moments of inertia.

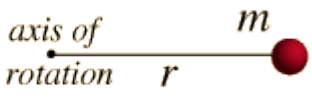
$I = \int_0^M r^2 dm$ Continuous mass distributions require an infinite sum of all the point mass moments which make up the whole. This is accomplished by an integration over all the mass.

Moments of inertia for common forms

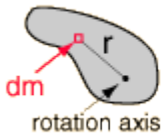
Where moment of inertia appears in physical quantities

Moment of Inertia, General Form

Since the moment of inertia of an ordinary object involves a continuous distribution of mass at a continually varying distance from any rotation axis, the calculation of moments of inertia generally involves calculus, the discipline of mathematics which can handle such continuous variables. Since the moment of inertia of a point mass is defined by

$I = mr^2$ 

then the moment of inertia contribution by an infinitesmal mass element dm has the same form. This kind of mass element is called a differential element of mass and its moment of inertia is given by



$$dI = r^2 dm$$

The "d" preceding any quantity denotes a vanishingly small or "differential" amount of it.

Note that the differential element of moment of inertia dI must always be defined with respect to a specific rotation axis. The sum over all these mass elements is called an integral over the mass.

$$I = \int dI = \int_0^M r^2 dm$$

Usually, the mass element dm will be expressed in terms of the geometry of the object, so that the integration can be carried out over the object as a whole (for example, over a long uniform rod).

Having called this a general form, it is probably appropriate to point out that it is a general form only for axes which may be called "principal axes", a term which includes all axes of symmetry of objects. The concept of moment of inertia for general objects about arbitrary axes is a much more complicated subject. The moment of inertia in such cases takes the form of a mathematical tensor quantity which requires nine components to completely define it.

Examples of integration to get moment of inertia.	Straight rod
	Cylinder