Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Trajetória de um pêndulo solto em queda livre

F 809 Instrumentação para o ensino Relatório Final

Adriano Batista Prieto* Pedro Raggio (Orientador) Leandro A. N. de Paula (Co-orientador)

4 de dezembro de 2006



Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. Dr. Andre Koch Torres Assis^1 pelas discussões e ao Prof. Dr. Jose Joaquim Lunazzi² pelo espaço cedido em seu laboratório. Sem eles esse projeto não teria sido possível.

 $^{{\}rm *adrianoprieto@yahoo.com.br,\ RA\ 02.2942}$

¹ http://www.ifi.unicamp.br/~assis/2 http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/

$\mathbf{\acute{I}ndice}$

1	Introdução	4
2	Descrição matemática2.1Recipiente em repouso. Pêndulo oscilando	4 4 5 6
3	As primeiras observações	6
4	Um protótipo4.1 A construção do protótipo	8 8 9
5	O conjunto final 5.1 O guia de queda	10 10 11 12
6	Considerações finais	13
Bi	ibliografia	15

1 Introdução

O principal objetivo desse projeto é tentar responder à seguinte pergunta: por que corpos com diferentes massas possuem a mesma aceleração durante a queda livre? Em outras palavras, por que corpos com diferentes pesos caem ao mesmo tempo? Para isso, usamos uma garrafa de refrigerante com um pêndulo em seu interior. Deixamos o pêndulo oscilar e, na sua posição de máxima velocidade, abandonamos o recipiente fazendo com que ele entrasse em queda livre. O que ocorrerá com o movimento do pêndulo?

Uma das hipóteses é que o pêndulo entrará em órbita em torno de seu eixo de oscilação, demonstrando a inexistência da força da gravidade durante a queda. Este trabalho estuda experimentalmente o comportamento do pêndulo em queda livre tentando corroborar ou descartar essa hipótese. Se confirmada, teremos demonstrado que a aceleração dos corpos em queda livre independe de suas massas, pois não há nenhuma força gravitacional atuando sobre eles durante a queda.

Neste relatório apresentaremos o processo de execução do projeto. Começamos com uma motivação teórica para o experimento, ou seja, conseguimos teoricamente relacionar a altura de queda com o número de voltas do pêndulo. Será possível fazer o mesmo de maneira inteiramente experimental? Damos início a essa resposta discutindo na seção 3 as primeiras tentativas, assim como as primeiras dificuldades experimentais. Logo em seguida descrevemos de maneira breve a construção do protótipo e, na seção seguinte, descrevemos em certo detalhe as medidas tomadas para superar estas dificuldades.

Nas Referências há um "*" no título de alguns itens, indicando que o conteúdo é avançado, sugerido para estudantes universitários de ciências exatas, como Física, Matemática, Engenharia etc.

2 Descrição matemática

Em sua grande obra, "Duas novas ciências", Galileu Galilei demonstrou experimentalmente que a altura de queda de um corpo, partindo do repouso, é diretamente proporcional ao quadrado do tempo gasto para cair, ou seja

$$H \alpha t^2$$
 (1)

Como segundo objetivo desse trabalho, pretendemos demonstrar o mesmo resultado de uma maneira diferente: um pêndulo protegido da resistência do ar e solto em queda livre, passa a girar em torno do eixo que o sustenta. A altura da queda é proporcional ao número de voltas dadas pelo pêndulo:

$$H \alpha n^2$$
 (2)

Em outras palavras, bastaria contar o número de voltas executadas pelo pêndulo (observando as voltas dadas pela linha em torno do eixo) para obter a altura da queda.

2.1 Recipiente em repouso. Pêndulo oscilando

Para um pêndulo simples, de massa m, comprimento L e altura h em relação ao ponto mais baixo de sua trajetória (figura 1b), a energia potencial é dada por

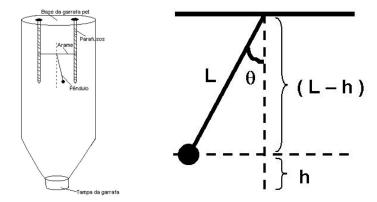


Figura 1: a) Pêndulo montado no interior de uma garrafa de refrigerante, feita de plástico, com 2 litros de volume. b) Diagrama do pêndulo.

$$E_{pot} = mgh (3)$$

Sabe-se³ que, naquele ponto mais baixo, toda energia potencial é convertida em energia cinética

$$E_{pot} = E_{cin} = \frac{mv^2}{2},\tag{4}$$

então, sua velocidade máxima é dada por

$$v = \sqrt{2gh}. (5)$$

Observando a figura 1b vemos que

$$\cos\theta = \frac{L - h}{L},$$

que nos dá a relação entre a altura h e a amplitude de oscilação θ do pêndulo:

$$h = L(1 - \cos \theta) \tag{6}$$

2.2 Recipiente em queda. Pêndulo orbitando

Suponha que levantamos o recipiente - com o pêndulo em seu interior - até uma certa algura H. Em seguida provocamos uma oscilação no pêndulo a partir de um ângulo inicial θ . Quando a massa estiver no ponto mais baixo da trajetória, com velocidade máxima v, soltamos o recipiente. Supondo que não haja a presença da força peso durante a queda, a massa não sofrerá variação em sua velocidade⁴. Então, o pêndulo passará a executar um movimento circular e uniforme com período dado por

 $^{^3{\}rm A}$ conservação da energia mecânica é geralmente ensinada no final do primeiro ano do ensino médio.

 $^{^4}$ De acordo com o princípio da inércia - 1^a lei de Newton - um corpo só altera seu estado de movimento na presença de forças externas [3]. Se um objeto está a uma velocidade constante v (equilíbrio dinâmico) ele permanece nessa velocidade indefinidamente até que receba a ação de uma força.

$$T = 2\pi \frac{L}{v}. (7)$$

Logo, o número de voltas corresponde aos múltiplos deste tempo T: 1T corresponde a uma volta, 2T a duas voltas e assim sucessivamente. Portanto, se quisermos que o pêdulo dê 5 voltas ao redor do eixo de oscilação, devemos soltá-lo de uma altura H tal que o tempo de queda seja de 5T.

2.3 Relação entre a altura de queda H e o número de voltas n

Seguindo o raciocínio da última seção, se quisermos que o pêndulo dê um número n de voltas, então devemos soltá-lo de uma altura H_n tal que o tempo de queda seja (nT), então:

$$H_n = \frac{g}{2}(nT)^2. (8)$$

Substituindo as relações (5), (6) e (7) na equação acima, chegamos facilmente a

$$H_n = \left(\frac{\pi^2 L}{1 - \cos \theta}\right) n^2 \tag{9}$$

Ou seja, teoricamente a altura da queda é proporcional ao número de voltas do pêndulo ao quadrado. Um segundo objetivo desse trabalho é demostrar essa relação de maneira estritamente experimental.

3 As primeiras observações

Antes da construção de um protótipo decidimos fazer algumas observações com um recipiente qualquer. Usamos um pote de paçoca, de plástico, facilmente encontrado em qualquer padaria. Seu formato cilíndrico estava longe de ser aerodinâmico, mas seu material era transparente - algo necessário para a observação do pêndulo - e poderia nos dar pistas sobre futuras dificuldades experimentais. Tinha em torno de 8 cm de altura e 15 cm de diâmetro.

Perfuramos a tampa do recipiente com dois parafusos longos, distantes de 8 cm, e foram usadas duas porcas para mantê-los fixos. Unimos os dois parafusos com um pequeno arame e, assim, estabelecemos o local onde o pêndulo seria preso. Um pedaço de fio dental amarrado em uma pequena peça de metal, que lembra uma bola de futebol americano (figura 2), compôs o pêndulo. A outra extremidade foi amarrada no arame. Feito isso, voltamos a fechar o recipiente - agora com um pêndulo em seu interior - e passamos às primeiras observações.

Levantando o conjunto a uma altura um pouco acima de nossas cabeças, balançamos o pote para que o pêndulo oscilasse levemente e soltamos o recipiente. Aqui começaram as dificuldades experimentais. Em primeiro lugar, o tempo de queda é extremamente rápido, dificultando em muito a observação do pêndulo, cujo comprimento e amplitude de oscilação eram pequenos. Depois de várias quedas sem sucesso, optamos por soltar o pote de uma altura um pouco mais elevada. Dessa maneira, teríamos um leve aumento no tempo de queda, assim como poderíamos observá-la por dois pontos de vista distintos: por cima (visão



Figura 2: Massa usada para compor o pêndulo.

do encarregado de oscilar o pêndulo e soltar o recipiente) e por baixo (visão de quem ficou no chão). Subimos em uma mesa, aumentando assim a altura para aproximadamente 3,5 metros.

Agora entendemos porque Galileu optou pelo uso do plano inclinado nos seus estudos sobre a queda dos corpos [2]. Mesmo com o aumento da altura e a adição de um ponto de vista, a visualização ainda era muito precária. Não conseguimos observar se o pêndulo oscilou de maneira uniforme, e - muito menos - também não tivemos nenhum indício de que o pêndulo realmente chegou a dar alguma volta em torno do que seria seu eixo de rotação. Como já tínhamos aumentado a altura da queda, procuramos fazer algo para melhorar a visualização do pêndulo no que diz respeito ao recipiente: retiramos a tampa e fizemos a queda apenas com ela. É óbvio que o pêndulo já não estaria mais totalmente protegido do ambiente mas, mesmo assim, tentamos.

Logo antes de soltar a tampa verificamos que o arame de sustentação estava com uma certa folga, fazendo com que a oscilação sofresse um amortecimento. Conseqüentemente, a amplitude de oscilação diminuía rapidamente. Apertamos um pouco mais o arame na tentativa de minimizar esse erro. Vimos ainda que a maneira da massa ser amarrada ao fio dental fazia com que a oscilação não ficasse em um mesmo plano, um agravante pois, a princípio, isso dificultaria a "órbita" da massa em torno do arame. Ficamos surpresos ao soltar a tampa pela primeira vez de cima da mesa: a visualização melhorou muito. Tivemos até a impressão de, em algumas quedas, o pêndulo ter orbitado, mas não encontramos as esperadas voltas da linha em torno do arame. Essa foi mais uma dificuldade encontrada. Devemos fazer um nó bem firme e fixo para que, caso o pêndulo entre em rotação, esse nó não deslize em torno do arame. Há de se lembrar que a contagem das voltas em torno desse eixo poderá ser uma medida indireta da rotação do pêndulo, assim como uma maneira para comprovar a equação (9).

Depois de algumas dezenas de observações a tampa do recipiente se rompeu. Mesmo assim, esse primeiro contato fez com que ficássemos mais seguros para fazer um protótipo e dar continuidade ao projeto. Um resumo das dificuldades experimentais encontradas está na tabela 1.

Tabela 1: Dificuldades experimentais e sugestões de soluções para a construção do protótipo.

Dificuldade Experimental	Sugestões para solução
Arame frouxo	i) amarrá-lo com mais força; ii)
	substituir o arame por uma fina
	barra ou parafuso; iii) usar essa
	barra ou parafuso para forçar o
	arame
Nó frouxo	Testar novas maneiras de se fazer
	o nó e pensar na possiblidade de
	afixar o fio em mais de um ponto
Visualização	Escolha de um recipiente o mais
	limpo e transparente possível
Oscilação em um único plano	Testar outras maneiras de se
	amarrar a massa à linha
Resistência	Encontrar um material para a
	base do pêndulo mais resistente
	para suportar os inúmeros im-
	pactos

4 Um protótipo

Após as primeiras observações passamos à construção de um protótipo para o experimento. O trabalho foi feito na Oficina Mecânica do Laboratório de Óptica⁵ do Instituto de Física "Gleb Wataghin"⁶, gentilmente cedida pelo Prof. Dr. Jose Joaquim Lunazzi.

4.1 A construção do protótipo

Baseados nas dificuldades apresentadas na seção anterior, escolhemos como recipiente a garrafa de 2 litros do refrigerante Fanta. Além de ser razoavelmente resistente, possui alguma aerodinâmica para minimizar a resistência do ar e também é bem transparente. Retiramos seu rótulo e cortamos seu fundo com uma serra simples (figura 3). O material para a base do pêndulo foi encontrado na própria oficina: uma chapa de PVC. Já com a garrafa cortada, marcamos com uma caneta a circunferência do seu fundo em cima da chapa.

Prendemos a chapa em uma Mossa⁷ [1] e cortamos o pedaço em questão usando a mesma serra. Para cortar a chapa de PVC em forma circular, marcamos com a caneta um polígono rente à circunferência e, novamente na mossa, fizemos alguns cortes. Finalmente, retiramos os cantos em um Esmeril⁸, girando leve e continuamente a peça de PVC, fazendo com que a forma circular aparecesse quase que naturalmente.

⁵http://www.ifi.unicamp.br/~frejlich/pagina.htm

 $^{^6\,\}mathrm{http://www.ifi.unicamp.br}$

 $^{^7\}mathrm{Dispositivo},$ fixado à bancada, para segurar ou apertar peças a serem trabalhadas; torno de bancada.

⁸Pequena mó feita de coríndon, fixada na extremidade do eixo de um motor, usada para polir metais.

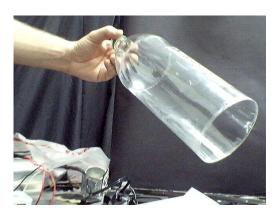


Figura 3: A garrafa de Fanta já cortada.

Como no caso do pote de paçoca, fizemos dois furos na base de PVC para a inserção dos dois parafusos. O arame foi substituído por um fino fio de cobre, retirado de uma fiação inutilizada. Como ele era mais flexível, pudemos tensioná-lo de maneira mais eficaz, diminuindo um pouco o amortecimento da oscilação. A base foi presa à garrafa com três parafusos laterais.





Figura 4: A base de PVC já com os dois parafusos.

4.2 Mais observações e mais dificuldades

Algumas observações preliminares foram feitas com quedas de aproximadamente dois metros. Por causa do formato "pontiagudo" da garrafa, de fato houve uma melhora com relação à resistência do ar. A diminuição no amortecimento fez com que a oscilação se mantivesse praticamente no mesmo plano, facilitando a visualização do pêndulo durante o percurso. Com apenas essas poucas quedas, pudemos verificar novamente que o pêndulo, de fato, gira em torno do seu eixo, evidenciando a ausência da força peso durante a trajetória.

O próximo passo foi verificar a queda para alturas bem maiores. No prédio da gradução do IFGW, um de nós soltou a garrafa do primeiro andar, enquanto o outro a aguardava no térreo. Logo no início da queda a garrafa passou a girar de maneira aleatória por causa da resistência do ar, ou seja, ela não se manteve em sua posição vertical, descaracterizando a queda livre do pêndulo. É óbvio que, por causa disso, o pêndulo passou a ter um movimento completamente fora de controle. Além disso, apesar do aumento na altura - que passou a ser de

aproximadamente quatro metros - o tempo de queda ainda era muito rápido. No terceiro lançamento o fio que liga os dois parafusos, e que define o eixo de rotação do pêndulo, rompeu-se. Resumindo: aumentamos a altura da queda e novas dificuldades apareceram.

Pensamos em fazer um "guia de queda" para que a garrafa fosse forçada a permanecer na posição vertical e, com isso, a primeira dificuldade seria sanada. Ao invés de usar apenas um fio de cobre, faríamos uma trança com dois fios, dobrando a resistência e ainda mantendo uma fina espessura. Com relação à visualização das rotações, não tivemos outra alternativa a não ser colocar uma câmera dentro da garrafa para filmar o pêndulo durante a queda.

Dificuldade Experimental	Sugestão para solução
Fio de cobre pouco resistente	Fazer uma trança com dois fios
	de cobre, aumentando a resistên-
	cia e mantendo a espessura fina
Garrafa em rotação	Criar uma forma de guiar a
	queda para manter a garrafa na
	posição vertical
Visualização	Inserir uma câmera dentro da
	garrafa para filmar o pêndulo du-
	rante a queda

Tabela 2: Novas dificuldades experimentais e novas sugestões de solução.

5 O conjunto final

Fizemos algumas discussões sobre como seria o guia de queda, sobre como trançaríamos os fios e, principalmente, sobre a possiblidade de filmar internamente a queda. Felizmente encontramos soluções factíveis para os três casos.

5.1 O guia de queda

A nossa primeira idéia foi fazer um guia usando fios de *nylon*. Haveria dois quadrados de madeira, com aresta um pouco maior do que circunferência da garrafa. Um ficaria no chão e o outro a uma altura de uns três metros - possivelmente pendurado no teto do local do experimento. Os fios de *nylon* seriam "costurados" de cima a baixo, sempre acompanhando as arestas dos dois quadrados, compondo o guia. Além disso, os dois quadrados deveriam estar bem alinhados.

Dada a complexidade do guia de *nylon*, abandonamos essa idéia em favor de uma muito mais simples e barata. O guia poderia ser um longo e espesso tubo de PVC, usado em encanamentos. Conseguimos esse tubo (em torno de três metros de comprimento e 100 mm de diâmetro) no lixo de uma construção que estava em andamento na Moradia Estudantil da Unicamp.

Tentamos introduzir a garrafa no interior do tubo. Verificamos que os diâmetros eram praticamente os mesmos, impossiblitando que a garrafa pudesse percorrer o interior do guia. Então, decidimos cortar o tubo e dividí-lo em duas partes (semelhantes às calhas usadas em telhados) e uní-las através de dois longos parafusos, um em cada uma das suas extremidades (figura 5b). Dessa maneira, conseguimos aumentar o diâmetro do guia e mantê-lo coeso.





Figura 5: O guia de queda. a) Altura de aproximadamente três metros b) Parafusos para manter o guia coeso e, ao mesmo tempo, permitir uma desaceleração suave da garrafa.

Ajustamos os parafusos para que o diâmetro do guia ficasse levemente maior. Colocamos o tubo na posição vertical e inserimos a garrafa - ainda sem o novo pêndulo - na posição mais alta e a soltamos: o guia funcionou perfeitamente. Como o impacto da garrafa no parafuso inferior foi muito grande, concluímos que o efeito do atrito entre a parede do tubo e a garrafa foi pequeno, ou seja, a regulagem da espessura do guia estava boa. Porém, seria necessário diminuir o choque final.

Colocamos alguns pedaços de pano na parte inferior para amortecer o impacto. O resultado foi bom, mas gostaríamos de uma desaceleração mais suave. Para isso, fizemos com que o diâmetro inferior do guia ficasse menor do que o superior, ajustando as porcas internas e externas do parafuso inferior. Dessa maneira, a garrafa vai sendo freiada a medida que o diâmetro do tubo vai diminuindo. Como essa diminuição não é brusca, a desaceleração também não o é.

Ao conseguir uma frenagem mais branda, poupamos trabalho com relação à resistência dos fios que compõem o pêndulo, assim como excluímos qualquer perigo de dano à câmera.

5.2 Aumentando a resistência do eixo

Conforme o planejado, trançamos dois fios de cobre para servir como eixo. Amarramos o duplo fio de cobre aos parafusos e, por fim, amarramos a linha com a massa ao eixo. Logo na primeira queda, o eixo, ainda que reforçado com dois fios de cobre, também se rompeu. Mas houve uma diferença substancial. Enquanto o rompimento do fio único se dava no centro (onde o pêndulo estava amarrado), o fio duplo quebrava-se muito próximo aos parafusos. Esse fato se repetiu nas três quedas seguintes. Isso indica que o problema não estava mais na resistência do fio em si, mas na maneira com que fazíamos o nó entre o fio de cobre e os parafusos.

Por mais estranho que possa parecer, essa foi uma de nossas maiores dificuldades: fazer um nó resistente ao impacto. Só depois de uma semana finalmente conseguimos. Fizemos então dezenas de quedas e o pêndulo suportou a todas sem quebrar. Pudemos então passar para a fase final do projeto.



Figura 6: Fios usados para montar o pêndulo. O fio branco foi o comprimento do pêndulo e os fios de cobre o eixo de oscilação.

5.3 A câmera interna

Usamos uma WebCam típica para fazer os vídeos. De acordo com a especificação do fabricante, a câmera pode captar até trinta quadros por segundo. Como uma queda de três metros leva aproximadamente 0,7 segundos, poderíamos observar, a princípio, 21 quadros (30 quadros/segundo x 0,7 segundos).



Figura 7: A garrafa cortada e, em seu interior, o pêndulo e a WebCam.

Então, para que pudéssemos observar ao menos uma volta completa do pêndulo, o período de sua rotação deveria ser inferior aos 0,7 segundos. Se substituirmos a equação (5) na equação (7) chegamos a

$$T = \frac{2\pi L}{\sqrt{2gh}},\tag{10}$$

onde, lembrando, L é o comprimento do pêndulo, g é a aceleração da gravidade e h é a pequena altura que a massa é deslocada para criar a oscilação.

O comprimento do nosso pêndulo era de aproximadamente

$$L = 2 \text{ cm} = 2.10^{-2} \text{ m}.$$

Usando

$$g = 9, 8\frac{m}{s^2}$$

para a aceleração da gravidade e estimando \boldsymbol{h} em torno de

$$h = 0.2 \text{ cm} = 2.10^{-3} \text{ m},$$

chegamos ao valor de

$$T \approx 0.6 \text{ s},$$
 (11)

ou seja, teoricamente, nosso aparato seria - em condições ideais - capaz de observar apenas uma volta completa do pêndulo.

Desmontamos o conjunto, inserimos a câmera e voltamos a montá-lo. Fizemos alguns vídeos mas, infelizmente, as expectativas não foram alcançadas. Ao exibir o vídeo no microcomputador, vemos que o PC tem alguma dificuldade em processar a imagem. Como naquele momento não tínhamos outro computador para fazer os vídeos, tentamos diminuir a resolução da captação da imagem. Mesmo assim, o resultado era ainda um conjunto de quadros lentos e levemente borrados. Através das manchas nas imagens - causadas pelo movimento do pêndulo - tentamos inferir a trajetória da massa.

6 Considerações finais

Sentimos como um trabalho experimental, por mais simples que possa parecer, pode ser tão difícil de ser planejato, construído e executado. A princípio, nossa tarefa seria fácil: uma garrafa de refrigerante com um pêndulo dentro, ambos em queda livre. Mas, ao contrário, nos deparamos com inúmeras dificuldades. Porém, isso não ofuscou a validade de projeto.

Em primeiro lugar podemos citar seu custo total: R\$ 2,00 para comprar a garrafa de refrigerante! O restante do material foi conseguido com o reaproveitamento de sucata, desde os parafusos até o tubo de PVC usado como guia. Caso haja uma oficina mecânica disponível, qualquer estudante do ensino fundamental ou médio - obviamente acompanhado por um adulto - pode reproduzir nossa construção. Além disso, por causa das quedas sucessivas dos preços dos produtos eletro-eletrônicos, um microcomputador com uma WebCam não é algo tâo distante de uma escola, mesmo que pública.

Nos surpreendemos ao ter de ajustar um sem número de detalhes de caráter prático - do ponto de vista experimental - para que as observações pudessem ser minimamente feitas. A busca por modificações que causassem uma diminuição no erros foi igualmente prazeirosa, e também permitiu que nós desenvolvêssemos um certo feeling experimental.

Essa busca nos levou a aprimorar o experimento e eliminar muitos dos problemas que envolveram a construção e as medidas. A garrafa mostrou-se um bom projétil e, somada ao guia, ganhou estabilidade e confiabilidade. O pêndulo também foi aperfeiçoado com o andar do projeto. Portanto, apesar de não conseguirmos fazer os vídeos com perfeição, temos fortes motivos para acreditar que os fatores limitantes para a visualização do movimento do pêndulo concentram-se fundamentalmente no conjunto PC-Câmera.

Podemos concluir que a observação da trajetória de um pêndulo solto em queda livre exige métodos experimentais sofisticados. Com as dimensões usadas, três metros de altura e 2 cm de pêndulo, poderíamos, no máximo, observar uma única rotação. Fica então duas sugestões para melhoria:

- 1. usar equipamentos de vídeo específicos para situações de alta velocidade;
- 2. aumentar as dimensões do aparato como um todo.

Finalizando, o projeto também atingiu seu objetivo do ponto de vista didático. O tema dá margem à discussões sobre a oscilação de um pêndulo, a lei da inércia, resistência dos materiais, movimentos circulares, métodos experimentais e até mesmo sobre a natureza da força peso. Um professor poderia usá-lo por um longo período e discutir a Física de uma maneira mais instigante, grande desafio para os educadores.

Referências

- [1] Eduardo de Campos Valadares. Física mais que divertida. Editora da UFMG, 2005.
- [2] Galileu Galilei. Duas novas ciências.
- [3] Thorton & Marion. **Classical Dynamics of Particles and Systems. Harcourt College Publishers, 1995.
- [4] Nussenzveig. *Curso de Fśica Básica, Vol. 1, Mecânica. Edgard Bl^śucher Ltda., 2001.
- [5] Ramalho. Os fundamentos da Física, Vol. 1, Mecânica. Editora Moderna, 2001