

B 1

INTERFERENCIA

Prof. J. J. Lunazzi  
1980

ONDAS

Fenômenos como a interferência, difração e polarização só podem ser explicados atribuindo-se à luz o comportamento ondulatório.

Toda perturbação  $\vec{E}$  se propagando com velocidade constante  $v$  possui um valor nos pontos do espaço dados por uma função:

$$\vec{E} = f(\vec{r}, t) \quad (1)$$

Não considerando amortecimento da perturbação durante a propagação, temos que o deslocamento da perturbação é representável por uma função

$$E = f(\vec{r} \cdot \vec{k} - vt) = f(u) \quad (2)$$

Onde  $\vec{k}$  seria o versor "direção de propagação",  $v/v$ .

Derivamos então a expressão diferencial para a perturbação viajante:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (3)$$

chamada equação de onda.  $E$  é de 2ª ordem, tendo (2) como solução independente. Assim, qualquer combinação de solução tipo (2) é nova solução, por tanto qualquer soma de ondas é também onda.

FRENTE DE ONDA

No caso de a perturbação ter o mesmo valor em todos os pontos de qualquer plano perpendicular à direção de propagação, temos a propagação de uma onda chamada de plana, (Fig. 1) pois ela avança na forma de um plano segundo a expressão:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - vt = \text{cte} \quad \alpha, \beta, \gamma: \text{cosenos diretores de } \vec{k} \quad (4)$$

Em geral, chama-se frente de onda ao lugar geométrico dos pontos nos quais a perturbação tem o mesmo valor no instante  $t$ . Este é um plano para o caso de uma onda plana, uma esfera ou superfície qualquer para outros casos. A superfície é assim definida pela expressão

$$E(\vec{r}, t_0) = \text{cte} \quad (5)$$

No instante  $t=t_0$ , com a condição de continuidade ligando os pontos da superfície.

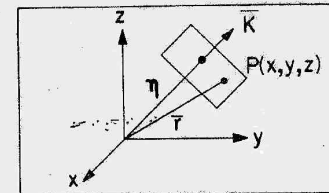


Fig. 1

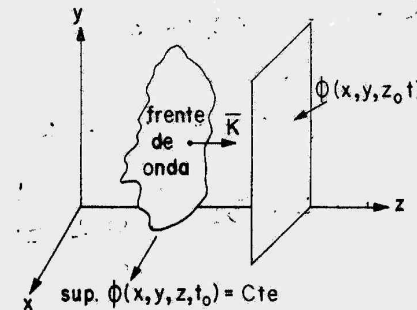


Fig. 2

No caso da perturbação ter origem puntual e condições de propagação igual em qualquer direção temos uma onda esférica. Nesse caso o valor da perturbação depende apenas do módulo da distância ao ponto origem da perturbação no qual colocamos a origem de coordenadas, e do tempo t:

$$\bar{E} = f(r, t) \quad (6)$$

A equação de onda deve ser satisfeita junto com a condição de simetria esférica. A forma

$$\bar{E} = f(r-vt) \quad (7)$$

possui simetria esférica porém não satisfaz (3) (também não indica a conservação da energia se espalhando em superfícies esféricas),

Pode-se demonstrar ou verificar que a solução é de forma

$$\bar{E} = \frac{f(r-vt)}{r} \quad (8)$$

onde v sendo positivo representa uma onda que diverge desde a origem, enquanto v negativo representa um outro tipo de solução, a onda que converge até o ponto origem de coordenadas. (Agora é satisfeita a conservação da energia).

#### Solução Harmônica da Equação de Ondas

A solução

$$\bar{E}(r, t) = \bar{A} \cos 2\pi \left( \frac{R \cdot \bar{r}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = \bar{A} \cos (R \cdot \bar{r} - \omega t) \quad (9)$$

representa uma solução característica de muitos fenômenos comuns (tensões elétricas alternadas, ondas elásticas etc.) possuindo uma grande simplicidade matemática, particularmente no caso de suas derivadas. Sabemos também que toda função (onda) pode ser decomposta em uma superposição de soluções harmônicas pela análise de Fourier, dando a base para obtermos uma solução completa por superposição de soluções simples.

O argumento do cosseno chamamos de fase da onda. Ele possui uma parte independente do tempo, ou seja, a fase no instante  $t = 0$ , caracterizada pelo símbolo  $\phi(\bar{r})$ . No caso geral, no ponto  $r = 0$  e no instante  $t = 0$  a onda não está com amplitude máxima, temos assim que

$$\phi(\bar{r}) = k \cdot \bar{r} + \phi_0 \quad (10)$$

representando com  $\phi_0$  a proporção inicial do fenômeno na origem de coordenadas. A escolha da origem de tempo ou coordenadas pode ser independente da origem verdadeira da onda.

A amplitude  $\bar{A}$  representa o valor máximo que a perturbação atinge. Na maioria dos casos consideram-se ondas escalares e os campos vetoriais polarizados sempre na mesma direção, desprezando-se a possível mudança por quaisquer efeitos. Nessas condições podemos tirar o caráter vetorial do fenômeno nos símbolos, dando uma expressão:

$$E = \bar{A} \cos 2\pi \left( \frac{R \cdot \bar{r}}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{\phi_0}{2\pi} \right) \quad (11)$$

toda vez que considerarmos a propagação de uma onda esférica com ponto de origem na origem de coordenadas teremos:

$$E = \bar{A} \cos 2\pi \left( \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{\phi_0}{2\pi} \right) \quad (12)$$

Temos finalmente  $\lambda$  e  $T$  como quantidades características indicativas do espaço ou do tempo necessários para a repetição do valor da perturbação.

A solução harmônica pura não identifica início nem fim, pois nesse caso a análise de Fourier mostraria que ela é composta de várias soluções harmônicas puras, do tipo da eq. 9. Ela está no universo todo, e por isso perde as características físicas derivadas da causalidade temporal, as que somente podem ser obtidas por ondas reais na forma de um "pacote" de soluções harmônicas (Jackson, 7.3). Desta maneira temos que, no instante t encontramos, na direção de propagação, o fenômeno se repetindo à distância  $\lambda$  de qualquer ponto r, e no ponto r teremos de esperar um tempo T para termos uma repetição do valor inicial. Esses períodos, espacial e temporal, geram a frequência (temporal)  $f = 1/T$  e espacial  $\omega = 1/\lambda$ , correspondentes ao número de vezes em que o fenômeno está se repetindo por unidade de tempo e de comprimento, respectivamente.

A forma da onda (senoidal) está se propagando com a chamada velocidade de fase  $v_0$  que é a velocidade da mudança de posições dos pontos nos quais a fase tem valor constante. Não está diretamente ligada portanto à velocidade de partículas (p.e. das moléculas de uma corda vibrante, que não possuem velocidade constante)

nem à velocidade de propagação da energia ou da informação, que pode ser diferente.

Obtemos essa velocidade pela condição de variação nula da fase:

$$d\phi = \vec{k} \cdot d\vec{r} - \omega dt = 0 \Rightarrow v_p = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{\lambda}{T} \quad (13)$$

#### FORMULAÇÃO COMPLEXA

Uma grande simplificação é obtida pela substituição de exponenciais complexos no lugar dos termos cosseno:

$$\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) \Rightarrow e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} \quad (14)$$

substituição geradora de termos complexos correspondentes à situação original somente na parte real. A vantagem disto é o fato de podermos agrupar aditivamente o produto de termos trigonométricos simplificando a integração. A parte imaginária dos resultados não possui geralmente significação física, tendo-se por subentendido que a presença de formulação complexa implica somente na análise de sua parte real.

O quadrado da amplitude corresponde à energia da onda. Na notação complexa extraímos o quadrado da amplitude multiplicando pelo complexo conjugado.

$$\text{energia} \propto A^2 = (\text{Re}\{A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}\})^2 = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} \times c.c. \quad (15)$$

no caso geral; energia  $\propto E \cdot E^*$

Segundo esta formulação, a solução harmônica para uma onda plana é expressa por:

$$A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} \quad (16)$$

(vide figura 1) e para onda esférica por:

$$\frac{A}{r} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} \quad (17)$$

onde agora a direção do vetor  $\vec{k}$  não é constante mais radial.

#### EXPRESSION DA FRENTE DE ONDA EM FUNÇÃO DA FASE (FIG. 2)

A frente de onda é determinada pelos valores da fase de onda, podendo redefini-la como a superfície formada por pontos contínuos de igual fase. Constitui assim a superfície de forma arbitrária:

$$\phi(x, y, z, t_0) = \text{cte.} \quad (18)$$

no instante  $t = t_0$ , evoluindo e viajando posteriormente. A mesma função de fase pode ser considerada as vezes em um plano, por exemplo paralelo ao plano x-y, dando o valor da onda no plano:

$$\phi(x, y, z_0, t) \quad (19)$$

#### INTERFERÊNCIA

##### CASO GERAL DE DUAS ONDAS LUMINOSAS

Sejam duas ondas incidindo simultaneamente no mesmo ponto do espaço:

$$E_1 = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$$

$$E_2 = A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Por terem frequência única são chamadas de ondas monocromáticas, no sentido estrito.

A consequência da ação conjunta será:

$$E = E_1 + E_2 = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad (20)$$

No caso das ondas luminosas E representa o vetor elétrico oscilante e as frequências são muito altas:

$$\lambda = 0,5 \mu\text{m (luz verde)} + f = \frac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad (21)$$

Nenhum detector luminoso é sensível ao campo elétrico E mas à energia incidente proporcional com  $E^2$  (Resnick, 30.27). A energia luminosa sobre unidade de área e de tempo, ou seja, o fluxo luminoso sobre unidade de área, é chamado de "intensidade" I

Assim:

$$I \propto A_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \phi_2) + 2A_1 A_2 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad (22)$$

é a única magnitude observável. Devemos pensar sempre, quando interpretamos um campo elétrico luminoso, que para se chegar até uma expressão realmente detectável existirá no fim uma relação de quadratura.

#### Considerações de frequências, necessidades da monocromaticidade

A resposta temporal de qualquer detector é insuficiente para poder resolver a vibração luminosa ( $10^{-14}$  s) sendo impossível assim obter diretamente o valor da fase. O valor detectado é portanto a média obtida em intervalo de muitos períodos.

Ou seja, de (22):

$$\langle I \rangle \propto A_1^2 \langle \cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1) \rangle + A_2^2 \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \phi_2) \rangle + 2A_1 A_2 \langle \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \rangle \quad (23)$$

Sabemos que a média de  $\cos^2 \omega t$  em muitos períodos atinge um valor praticamente constante e igual a 1/2. Temos assim a seguinte relação trigonométrica:  $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$  que:

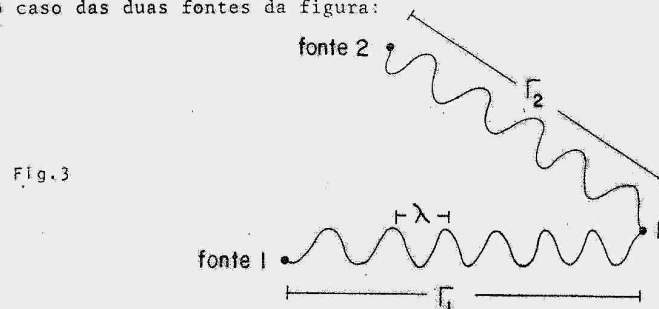
$$\langle I \rangle \propto \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} + A_1 A_2 \langle \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \phi_1 + \phi_2) \rangle + A_1 A_2 \langle \cos(2\pi(f_1 - f_2)t + \phi_1 - \phi_2) \rangle \quad (24)$$

Vemos que a média dos termos ondulatórios é zero para o caso de soma de frequências e será zero também para o caso da diferença se esta resulta em uma oscilação de período muito menor que o tempo de resolução do detector.

Vemos então na fórmula 24 que para poderem ser observados a olho nu, fenômenos ondulatórios (influência dos termos cosseno) é preciso que as duas frequências sejam semelhantes até uma diferença menor que, por exemplo, um ciclo por segundo. Para fontes diferentes isso implica em uma igualdade e estabilidade igual a  $1:10^{14}$ . Já se a fonte luminosa fosse a mesma, as frequências resultariam automaticamente iguais.

#### Considerações de fases, necessidade de divisão da frente de onda.

Seja o caso das duas fontes da figura:



a fase com que atingem o ponto P é composta de dois termos:

$$\begin{aligned} \phi_1(P) &= \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 + \phi_{01} && \text{para a fonte 1} \\ \phi_2(P) &= \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 + \phi_{02} && \text{para a fonte 2} \end{aligned}$$

Indicando com  $\phi_0$  a maneira como a onda começou no ponto de emissão. É claro que poderíamos considerar, de maneira mais geral, os pontos 1 e 2 como quaisquer pontos no percurso das ondas.

Na figura 3 temos como exemplo:

$\phi_{01} = \pi$	$\phi_{02} = \pi/2$
$2\pi r_1/\lambda_1 = 13\pi$	$2\pi r_2/\lambda_2 = 10,5\pi$
$\phi_1(P) = 14\pi$	$\phi_2(P) = 11\pi$

Sejam ambas as ondas estritamente monocromáticas, teremos por 24

$$I \propto \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle \quad (25)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle \quad (26)$$

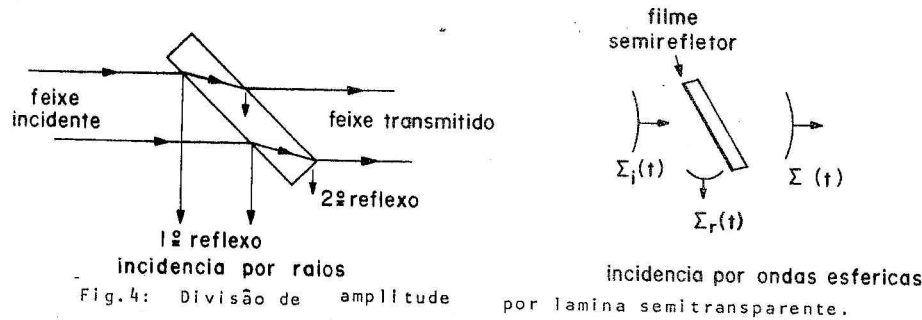
resulta assim necessário ter  $\phi_1$  e  $\phi_2$  constantes no tempo para poder manter o caráter ondulatório do fenômeno; caso contrário nosso termo de interferência teria média nula na detecção. Esta característica dá, basicamente, a possibilidade de termos interferência, que chamamos de coerência. Assim, se duas fontes interferem, é porque suas fases são constantes ou flutuam de maneira igual.

Observação

Não esquecer do fato de que, mesmo se as fases são estáveis, a falta de monocromaticidade das ondas pode vir a destruir a interferência, dando igualmente em falta de coerência.

Estes resultados mostram como, no caso da luz emitida por duas fontes diferentes, a superposição de fons que tiveram origem temporal aleatório nas moléculas das fontes não permite obter interferência ainda que a monocromaticidade fosse perfeita.

As fases da luz que é originada em regiões diferentes da fonte luminosa, nunca são iguais pois mudam de molécula para molécula. O foton emitido por uma molécula nunca vai ter uma diferença de fase fixa com os fons emitidos pelas outras moléculas (com exceção do fenomeno de emissão estimulada, laser). Somente na divisão do feixe (dos fons) em duas partes é que podemos obter uma relação de fase fixa na recombinação das partes, pois ambas as duas tem a mesma origem. Ou seja que é preciso utilizar uma única fonte luminosa. A divisão do feixe é feita por divisão de amplitude (Fig. 4) ou de frente de onda (Fig. 5).



Dessa maneira estamos recombinando luz que teve origem na mesma molécula, ou seja, partes dos mesmos fons.

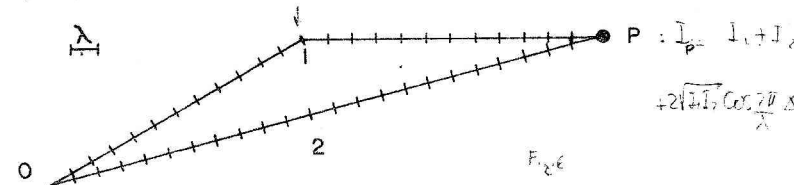
Vemos finalmente como a parte ondulatória do fenomeno só pode ser observada pelo termo espacial  $2\pi r/\lambda$ , envolvendo conjuntamente o comprimento de onda e o percurso luminoso. Dai surge a importância que tem o estudo do percurso luminoso nos fenomenos de interferência.

A diferença de fases  $\phi_1 - \phi_2$  depende agora fundamentalmente da diferença de percursos  $r_1 - r_2$ .

A diferença de percursos deve agora ser avaliada com uma unidade de comprimento igual ao comprimento de onda da luz no caso,

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_2 + \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 + \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2\pi \Delta r \left[ \frac{1}{\lambda} \right] = 2\pi j$$

isto é que, com ondas de origem comum, o estado de interferência das ondas depende da relação direta entre a diferença de percursos e o comprimento de onda.



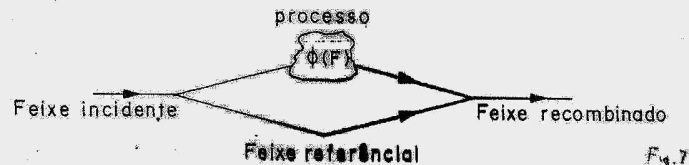
Vemos (26) que os fenomenos de interferência são observados primeiro para os comprimentos de onda mais curtos ('azul') que para os maiores (vermelho);  $\left| \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \lambda} \right| = \frac{2\pi \Delta r}{\lambda^2} = \frac{\Delta\phi}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi$  muda mais para  $\lambda$  pequenos.

Vemos também que o resultado é gerado por uma função (coseno) determinada unicamente pela parte fracionária de  $j$ , permitindo em alguns casos desprezar diretamente as partes fixas do percurso das ondas que não afetam a figura de interferência.

Em muitos casos a interferência é gerada entre uma onda plana agindo como valor referencial da fase e uma onda na qual o processo da variação de fase é de interesse.

Acostuma-se falar então da fase  $\phi$  querendo dizer a diferença de fase entre as ondas interferentes.

Um circuito optico pode se adaptar bem ao caso:



### PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO DAS ONDAS

A soma de duas ondas monocromáticas é uma nova onda monocromática, expressável por uma nova amplitude e fase:

$$E = E_1 + E_2 = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) =$$

$$= A \cos(2\pi f t + \phi)$$

sendo:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (28)$$

$$\phi = \arctg \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

Vemos assim como, pela aplicação reiterada deste resultado, a superposição de ondas monocromáticas é sempre uma nova onda monocromática.

A soma de ondas monocromáticas possui uma representação gráfica interessante (Resnick, 43.3) por meio de fasores, como no estudo da corrente alternada.

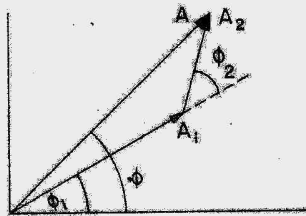


Fig. 8

### CONSIDERAÇÕES DE INTENSIDADE NA INTERFERÊNCIA

Vemos na (25) que a intensidade resultante da superposição de duas ondas pode ser nula ou máxima no caso de amplitudes iguais, levando ao fato:

$$\text{Luz} + \text{Luz} = \text{Escuridade} \quad (29)$$

que surpreende a nossos sentidos pois eles não percebem o caráter vetorial e ondulatório da luz.

A diferença de fase é o termo indicativo do fato de as ondas estarem agindo cooperativamente ou não. Se o número indicador  $j$  é inteiro, ambos os campos electromagnéticos vão se somar sempre, fazendo com que, por exemplo, ambas as ondas produzam numa carga elétrica uma oscilação de amplitude dupla. Se o número  $j$  for semi-inteiro ambos os campos estarão sempre em perfeita oposição deixando a carga em repouso.

O fato de uma diferença de percurso poder gerar interferência constructiva para um comprimento de onda e destructiva para outro permite a separação de cores, e existe na natureza nas asas de algumas borboletas e pássaros, no nacar, e nos delgados filmes de óleo flutuando na água.

A interferência constructiva e destructiva gerou muita polemica no século XVIII após a realização de experiências científicas nas quais os parâmetros envolvidos estavam sob controle.

Uma propriedade do fenômeno é a de manifestar rapidamente pequenas variações no percurso óptico dos feixes, pequenas deformações ou afastamentos de planicidade de uma superfície. Ele também amplifica a presença de ondas secundárias de pequena amplitude.

A intensidade da onda primária sendo 100, a da secundária sendo 1, temos:

$$I = 100 + 1 + 40 \times 2 \cos \Delta\phi \leq 101 \pm 20 \quad (30)$$

ou seja que a onda secundária aumentou quarenta vezes sua capacidade de produzir variações, que depende agora da permanência constante da onda primária.

### VISIBILIDADE DE FRANJAS

Define-se o fator de visibilidade como

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (31)$$

diferença dos valores máximos e mínimos à respeito de seu valor médio, dividida por 2. Dá o valor nulo para o caso de intensidade luminosa uniforme e o valor 1 para o caso de intensidade mínima nula, indicando com zero a impossibilidade de observação e com 1 a melhor condição objetiva de observação, ou seja, sem se considerar as características próprias do detetor.

A definição é idêntica à de contraste de uma imagem fotográfica, com a diferença de que as franjas de interferência possuem sempre um perfil senoidal, permitindo o uso do fator V como fator de mérito na totalidade dos casos (o fator de mérito de uma imagem comum depende de sua distribuição de tonalidades).

### FIGURAS DE INTERFERÊNCIA

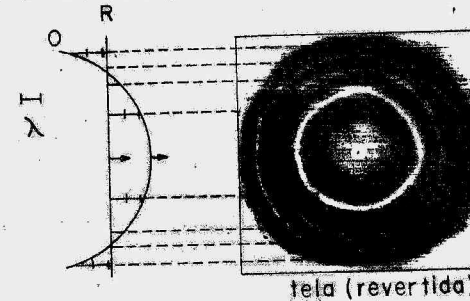
As figuras geradas pelas franjas são evidentemente escalares e também bidimensionais quando projetadas no plano de uma tela. A relação da figura obtida por interferência de somente duas ondas com um objeto tridimensional que afetou seu percurso resulta assim complexa e as vezes incerta, no caso geral. Para se facilitar sua interpretação são feitas algumas simplificações:

- 1) Uma das ondas costuma ser um referencial simples, plana ou esférica, da maior semelhança com a onda objeto sob análise. Resultam dessa maneira umas poucas franjas devido ao afastamento de ambas as frentes de onda.
- 2) A iluminação e observação do fenômeno é feita de maneira a não afetar o sistema de franjas.
- 3) Procura-se conhecer as propriedades de monotonia da onda sob análise, ou, no mínimo, o caráter de suas descontinuidades.

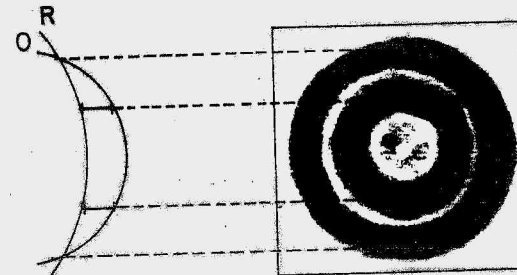
Mesmo que a situação não possa ser simplificada suficientemente, resta o princípio de continuidade das franjas:

As franjas representam linhas indicatorias de regiões nas quais a diferença de caminho é constante.

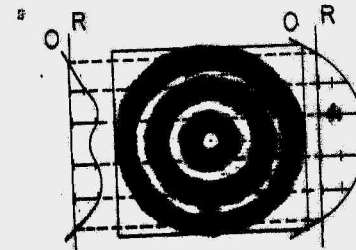
Assim, na interferência entre uma onda plana e uma esférica, teremos anéis segundo o esquema da Fig. 9:



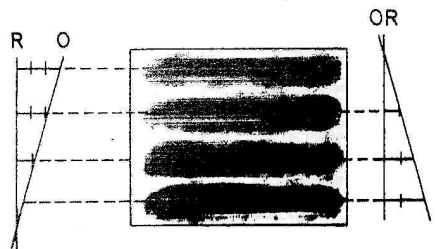
Os anéis brilhantes, representados pelas linhas pretas, dão assim as "curvas de nível" da onda esférica. A figura é simplificada pelo uso de onda esférica de referência R (Fig. 10):



O caso de onda não monotona (Fig. 11) é resolvido pelo conhecimento das descontinuidades. Caso contrário persiste dualidade no resultado.

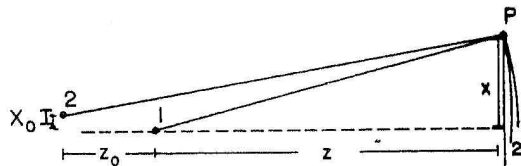


Um caso simples de dualidade é o da Fig. 12:



Vemos que quando a simetria é circular, o resultado são anéis. Caso o centro de simetria não esteja contido na tela, teremos porções de anéis se esticando conforme o centro é afastado dela.

Caso de duas fontes pontuais (Fig. 13).



A diferença de caminho no ponto P(x) vale

$$\Delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z+z_0)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + z^2 + y^2} \quad (32)$$

Consideremos dois casos usuais:

a) (longitudinal): \$x\_0 = 0\$, \$x \ll z\$ (anéis)

$$\begin{aligned} \Delta &= (z+z_0)\sqrt{1+\frac{x^2}{(z+z_0)^2}} - z\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}} \approx z+z_0 + \frac{x^2}{2(z+z_0)} - z - \frac{x^2}{2z} = \\ &= z_0 + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{z+z_0} - \frac{1}{z}\right) = z_0 - \frac{x^2}{2} \frac{z_0}{z(z+z_0)} = z_0 \left(1 - \frac{x^2}{2z(z+z_0)}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

Vemos inicialmente a distância entre as fontes afetando proporcionalmente a diferença de caminho, ou seja que \$z\_0\$ pequeno (fontes próximas) dá em variações pequenas (anéis muito espaçados), o espaçamento diminuindo com o aumento de \$z\_0\$.

O valor da fase no centro é \$2\pi z\_0/\lambda\$. No caso de anel central brilhante temos \$z\_0 = j\_0 \lambda\$, e a posição para o j-ésimo anel brilhante resulta de:

$$\Delta = -j\lambda = -\frac{z_0 x_j^2}{2z(z+z_0)} \quad (34)$$

$$x_j = \sqrt{2j\lambda z(z+z_0)/z_0} \approx \sqrt{j}$$

Os anéis de ordem j maior resultam mais próximos.

A Fig. 14 é uma fotografia do caso. O perfil de intensidade é do tipo:

$$I \propto \cos^2 cx^2 \quad (35)$$

Caso b) (transversal) \$z\_0 = 0\$, \$x\_0 \ll z\$, sem simetria circular.

$$\begin{aligned} \Delta &= z\sqrt{1+\frac{(x-x_0)^2+y^2}{z^2}} - z\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}} \approx \frac{(x-x_0)^2}{2z} - \frac{x^2}{2z} = \\ &= \frac{-2xx_0 + x_0^2}{2z} = -\frac{x_0}{z}x + \frac{x_0^2}{2z} \end{aligned} \quad (36)$$

O valor da fase no centro é: \$-\pi x\_0^2/\lambda z\$. No caso de anel central brilhante teremos \$x\_0 = \sqrt{2j\_0 \lambda z}\$ e a posição do j-ésimo "anel" é dada por:

$$\Delta = -j\lambda = -\pi x_j \frac{x_0}{z} \rightarrow x_j = \frac{j\lambda z}{x_0} \quad (37)$$

Nula no ponto de simetria \$x = x\_0/2\$

Ou seja os máximos são equidistantes pela variação linear da fase dando, pela independência a respeito de \$y\$, franjas paralelas equidistantes perpendiculares ao plano das fontes.

A Fig. 15 é um esquema das franjas segundo o plano que contém as fontes, no caso geral. Temos assim regiões dando anéis, hiperboles, retas ou seus fragmentos com diferentes espaçamentos segundo o caso.

MEDIÇÃO DE DIFERENÇAS DE FASE

Uma maneira rápida de se determinar desvios de fase pode ser obtida no caso de desvios aleatórios que mudam pouco a figura original. As franjas, em sua posição média, determinam o número de ordem interferencial correspondente, podendo os desvios ser medidos pela sua proporção com o espaçamento local, como na Fig. 16.



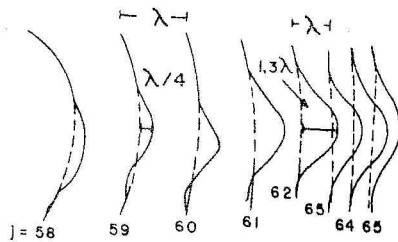


Fig. 16

FIGURAS DE MOIRÉ

Representando graficamente as linhas de número de ordem inteiro correspondentes a uma onda, obtemos uma figura imaginária. No caso da onda esférica, teríamos anéis com diâmetros na proporção  $\sqrt{j}$ , pois o caminho da fonte ao plano de observação possui, na aproximação de pequenos ângulos, essa variação geométrica. A superposição das duas figuras correspondentes a duas ondas apresenta linhas definidas pelos pontos de interseção das figuras, as chamadas linhas de Moiré. Possuindo ambas as ondas, nos pontos de interseção, números de ordem inteiros, a interferência corresponde nesses pontos a um máximo. A figura de Moiré indica assim a figura de interferência correspondente, ligando os pontos correspondentes a um nº de ordem de interferência constante, ou seja, no sentido no qual ambas as figuras possuem números de ordem crescentes ou decrescentes. Na figura 17 temos o caso da interferência entre onda plana inclinada e esférica normal. Vemos nela que no caso de a onda plana mudar seu sentido de inclinação (para direita) ou a esférica mudasse sua divergência por convergência, a figura resultante ficaria do lado esquerdo. Com ambas as mudanças simultâneas o resultado é o mesmo da figura, dando em dualidade.

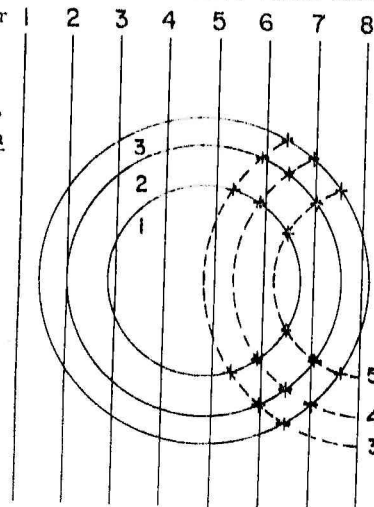


Fig. 17

As figuras podem ser superpostas como transparências, mostrando de maneira animada o deslocamento das franjas. Esta é também uma maneira visual de se observar pequenos deslocamentos da figura.  
FONTE EXTENSA - COERÊNCIA TRANSVERSAL

Mesmo no caso de ondas monocromáticas e coerentes nas fases, a figura de interferência pode acabar se perdendo no caso de termos mais do que uma fonte pontual. Podemos pensar inicialmente no caso de duas fontes em posições tais que a figura de interferência da segunda possua mínimos nos máximos da primeira, ambas as duas figuras se combinam para dar uma iluminação mais uniforme numa figura já bem diferente da inicial. Para o caso de um conjunto de fontes em posições diversas, a multiplicidade de figuras acaba gerando uma superposição uniforme. Passamos ao caso de fonte extensa considerando um conjunto contínuo de fontes. Temos agora um novo tipo de coerência, a coerência espacial pura, dependente da geometria da fonte, acrescentada a nossa idéia temporal da coerência na distribuição de fases.

Definindo um ponto como centro da fonte, podemos intuir que vai existir sempre uma certa distância desde ele na qual os outros pontos da fonte vão produzir figuras opostas (claro com escuro), perdendo-se a visibilidade das franjas. Podemos também inferir que, numa certa distância maior, os pontos serão geradores de figuras quase concordantes com a central, devolvendo algo de sua estrutura.

Vemos isto claramente no interferômetro de Lloyd (Fig. 18):

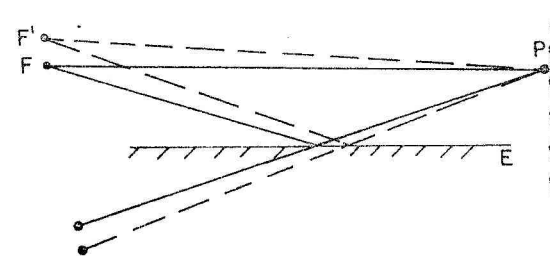


Figura 18

Existe nele, para a fonte central F, uma posição F' na qual a figura muda sua posição dando uma figura complementar defasada em  $\pi$ . Se o deslocamento é dobrado, achamos novamente a figura inicial. É bom notar que se o deslocamento é grande, o espaçamento entre as franjas acaba mudando bastante. No caso da presença de uma fonte extensa, o resultado exato é obtido somente por integração na superfície luminosa, dando a largura permitida para a fonte.

Percebemos também que no caso da presença simultânea de várias fontes as características da figura resultante dependem do fato de as fontes serem coerentes entre elas ou não. No caso de fontes totalmente incoerentes a figura resultante é a simples superposição das figuras individuais; no caso de fontes totalmente coerentes, temos de somar primeiro os campos individuais e logo obter seu quadrado.

A situação é mais complexa quando a coerência temporal não é perfeita. Existe nesse caso um certo comprimento indicador da diferença de caminho na qual as ondas que tiveram a mesma origem na fonte, após sua recombinação, começam a perder sua capacidade de interferir. (vide Fowles, Cap. 3). Chamado comprimento de coerência temporal vale

$$\Delta L_t = C/\Delta\nu \quad (38)$$

Onde  $C$  = velocidade da luz,  $\Delta\nu$  = largura média do pacote de distribuição de frequências da radiação. Neste caso a visibilidade das franjas é reduzida pela presença de ondas se recombinando após um percurso maior que  $\Delta L_t$ .

Fizemos até aqui uma análise direta segundo o percurso fonte-tela. O tratamento da coerência espacial segundo a superfície da fonte não é sempre usado, também porque as fontes gasosas apresentam uma emissão no volume. O problema é frequentemente deslocado considerando-se a onda luminosa em posição posterior à fonte. Cada ponto da fonte é composto agora de ondas não monocromáticas com diferente capacidade de interferir com a radiação dos outros pontos da onda. O caso requer a análise da radiação recebida no ponto, podendo se obter algumas relações gerais (Klein, 6.3). Sem entrar nelas, podemos dar a definição do comprimento de coerência espacial  $\Delta L_e$  como a máxima distância

transversal na qual podemos tomar dois pontos da frente de onda, recombinar sua luz segundo caminhos idênticos e ainda obter interferência.

Entendemos assim que quanto mais pontual, monocromática e temporalmente coerente, seja uma fonte, maior será o comprimento de coerência espacial que pode ser obtido em qualquer de suas frentes de onda.

Damos finalmente como exemplo de fonte extensa espacialmente incoerente o de uma lâmpada térmica comum, com seus átomos emitindo isoladamente. Já uma fonte extensa espacialmente coerente pode ser obtida se iluminando um difusor com uma fonte pontual coerente.

#### LOCALIZAÇÃO DE FRANJAS

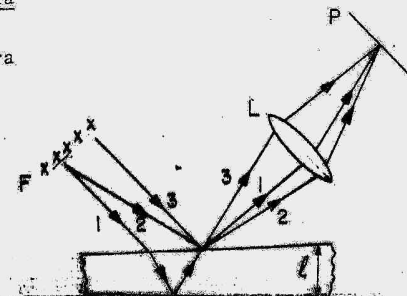
No caso de fonte pontual, figuras de interferência são obtidas em todos os planos do espaço onde dois ou mais feixes são recombinados. Já quando a fonte é extensa, a presença de franjas de interferência depende da coincidência de todas as figuras de interferência geradas por cada parte da fonte, o que geralmente só acontece num único plano ou superfície.

O princípio geral para determinação da superfície de localização requer a determinação da região na qual a diferença de fase é estacionária a respeito das coordenadas de iluminação-observação, o que não é simples.

As vezes é possível obter as superfícies de localização por simples classificação da maneira como os raios são coletados por uma lente, que pode ser a do próprio olho, como no exemplo seguinte:

#### Franjas obtidas de uma lâmina

a) Franjas de igual espessura



No caso da figura a lente L coleta os raios na superfície da lâmina, levando-os a se recombinar novamente no seu plano imagem P. Temos então a interferência dos dois raios que saíram de um mesmo ponto da fonte, caracterizada por seu nº de ordem. Considerando-se a fonte bastante afastada da lâmina, a diferença de caminho óptico depende principalmente da espessura da lâmina. Para um comprimento de onda, cada franja corresponde assim a uma linha indicadora dos pontos nos quais a lâmina possui igual espessura, o que resulta de grande aplicação no teste de planicidade de elementos ópticos. A medição de pequenos ângulos entre duas superfícies é outra de suas principais aplicações.

Neste exemplo as franjas estão localizadas na lâmina.

b) Franjas de igual inclinação

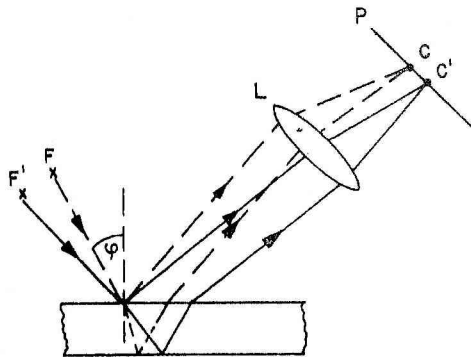


Figura 20

Posicionando o plano de observação no plano principal (plano focal) da lente, ela coleta agora os raios de maneira diferente: todos os raios que atingem a lente sob uma mesma inclinação são recombinados no mesmo ponto do plano focal. A fonte é extensa, tendo muitos raios nos diferentes ângulos. A lâmina estando bastante afastada, a variação angular a respeito de sua normal é pequena para raios fora do plano da figura, dando em franjas

orientadas perpendicularmente a este plano.

Estas franjas estão assim localizadas no infinito. Seu espaçamento pode ser obtido com a expressão da variação de fase em função dos ângulos em relação à lâmina (Kaliteevski, 5.4), acoplando-a com a distribuição angular a respeito da lente.

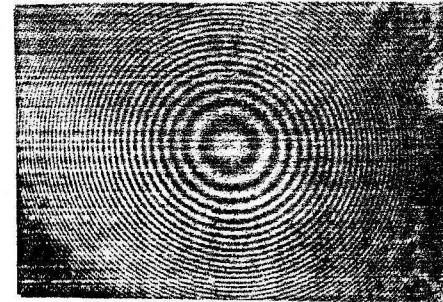


Fig. 14 (Ref. pag. 16)

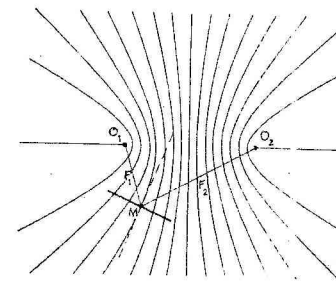


Fig. 15 (Ref. pag. 16)

PROBLEMAS DE INTERFERÊNCIA

BIBLIOGRAFIA (Interferência e Difração)

CASAS, J., "Optica", Ed. Universidade de Zaragoza, Espanha, (1980) *compendio*

FOWLES "Introduction to Modern Optics", New York, Holt (1975) 535.2, *livro*  
F789 t. *caps 3, 4*

FEYNMAN et al. "Introduction to Physics" V1, V2. 535, F435 f. *cancelado*

JACKSON "Classical Electrodynamics", "New York, Wiley, (1975). *Electrodinamica*  
537.6, J 13 c.

KALITEEVSKY, "Optique Ondulatoire", MIR, Moscou, (1978). *compendio*

KLEIN "Optics", New York, Wiley, (1970), 535, K 640 *compendio*

RESNICK - Halliday "Física" V II *caps. 43, 44 e 45. Livro 43*

TIPLER, "Física", V2, caps. 21, 22, Rio Guanabara Dois (1978), *Optica*  
530 T 595 f.

WELFORD "Optics", cap. 3, Oxford (1976) 535, W 445

"Experiments in Physical Optics" M. Françon, 539.2, E96, New York,  
Gordon, 1970. (Experimental, vide no fichário os vários livros  
do autor)

"Problems in Optics" M. Rosseau, 535.076, R 864p Oxford, Pergamon,  
1973.

Smith-Thompson: "Optics"  
- Rossi, "Optics"

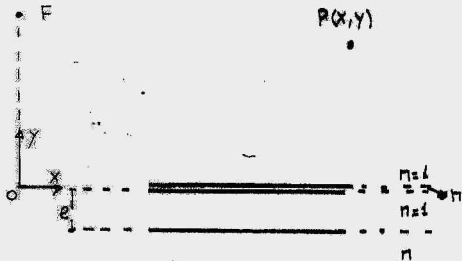
- 1- Verificar que (2) satisfaz (3)
- 2- Verificar que (8) satisfaz (3)
- 3- Verificar que a media de um fator  $\cos wt$  em intervalo maior que vários períodos da um valor tanto mais constante quanto maior é o intervalo, pouco dependente portanto do valor fracionário do número de períodos atingidos. Verificar também para o fator  $\cos^2 wt$  e generalizar para qualquer função periódica.
- 4- Dar expressões para as ondas planas e esféricas no caso de a origem de coordenadas ser arbitrária.
- 5- Verificar que a melhor visibilidade de franjas é obtida apenas no caso de duas ondas interferentes de igual amplitude.
- 6- Determine o espaçamento das franjas obtidas na superposição de duas ondas planas sob ângulos  $\theta$  e  $-\theta$ . Quantas franjas por milímetro são obtidas no caso  $\lambda=0,63\mu\text{m}$ ,  $\theta=5^\circ$ ?
- 7- O que acontece no caso da Fig. 19 se a lâmina é rotada de  $90^\circ$  no seu plano?
- 8- O que acontece no caso da Fig. 20 se a lâmina fica próxima da fonte e do sistema de observação?
- 9- Um filme de ar tem uma espessura de  $100\mu\text{m}$  sendo iluminado por uma fonte policromática emitindo luz no comprimento de onda central de  $550\text{ nm}$ . Qual a largura de banda que pode ser usada?  $(\lambda \pm \frac{\Delta\lambda}{2} \rightarrow j \pm \frac{1}{4})$
- 10- Sendo a instabilidade no comprimento de onda da radiação de um laser  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-4}$  determinar qual é a máxima diferença de caminhos que pode se colocar num interferômetro de modo a termos uma estabilidade de um décimo de franja ( $\lambda/10$ ).  $\lambda=0,63\mu\text{m}$ .

11- Num interferômetro de Michelson iluminado por uma fonte pontual monocromática ( $\lambda=0,63\mu\text{m}$ ) acontece um deslocamento de meia franja no oitavo anel brilhante.

a) qual foi a mudança relativa de posição de ambas fontes se uma delas permanece fixa respeito à tela?

b) qual foi o deslocamento da tela se as fontes permanecem fixas?

12- Descreva o sistema de franjas de interferência da figura, sendo F uma fonte pontual monocromática e P(x,y) os pontos de observação numa tela, se considerando uma lâmina delgada de ar.



Dados:

- Fo
- Y
- X
- n
- e

a) Descreva geometricamente a situação para o cálculo da diferença de caminho óptico  $\Delta L$  entre o feixe refletido na primeira superfície e o refletido na segunda.

b) Resolva o cálculo anterior assumindo que ambas as superfícies refletem imagens perfeitas.

c) Resolva o ponto b) na aproximação parabólica (paraxial).

d) Confira a semelhança dos resultados b) e c) na interpretação do sistema de franjas resultantes para:

$Fo=10\text{m}$ ,  $y=10\text{m}$ ,  $x=1\text{cm}$   $n=1,5$  e  $e=1\text{cm}$ .

13- Calcule a máxima abertura permitida na situação do problema 12

d) para uma fonte monocromática extensa considerando que a visibilidade das franjas é nula quando a variação de  $\Delta L$  para pontos correspondentes aos extremos da fonte é  $\lambda/2$ .

$Fo=10\text{m}$ ,  $y=1\text{cm}$ ,  $e=1\text{cm}$ ,  $n=1,5$   $\lambda=0,5\mu\text{m}$

