

DIFRAÇÃO

© José J. Lunazzi – 1982 última revisão março de 2002 http://geocities.com/prof_lunazzi/f641

Temário:

Campo Próximo (Fresnel) e Campo Afastado (Fraunhofer)
A difração como transformação de Fourier
Cálculos Teóricos de alguns casos de difração
Presença da difração na formação de imagens

Cálculo da difração: Campo Próximo (Fresnel) e Campo Afastado (Fraunhofer)

Durante muitas décadas existiu a discussão se a luz respondia ou não às teorias da mecânica. A grande influência de Newton e suas interpretações mecânicas dos processos de refração e dispersão retardaram a aceitação de uma nova idéia: a da luz como fenômeno ondulatório. Mas as interpretações mecânicas das experiências luminosas começaram a ficar, já no século XIX, extremamente sofisticadas. Era preciso explicar mais do que o desvio da luz por obstáculos materiais; a existência de figuras estranhas e a combinação destrutiva da energia luminosa requeriam uma nova formulação.

O conceito mecânico da luz envolvia a idéia dos raios luminosos (trajetória dos corpúsculos) e a interseção dos raios só poderia resultar numa luminosidade maior naquele ponto.

OBS: fazemos aqui referencia às experiências de difração e interferência do curso.

Ainda que aceitando o desvio dos raios pelos contornos do objeto como fato mecânico, a presença de mínimos na distribuição de intensidade requeria assumir a existência de direções preferenciais. Essa interpretação é muito esquisita sendo que estes fenômenos encaixam bem com a teoria ondularia, que já era bem conhecida no início do século XIX pelas experiências feitas com o som. O avanço do eletromagnetismo levou logo às equações de Maxwell e á idéia de que a luz é um fenômeno eletromagnético que tem propagação própria segundo equações de onda vetoriais que podem ser obtidas das de Maxwell.

Mas acontece que a solução exata das equações de Maxwell requer o tratamento vetorial do campo eletromagnético dando uma formulação que, ainda hoje, é demasiadamente complicada e permite resolver poucos casos práticos.

Tomaremos como fato empírico que a maioria dos fenômenos ópticos que trataremos pode ser apropriadamente descritos pela hipótese de que a luz é uma onda escalar. Nossos fundamentos teóricos não serão nem vetoriais nem quânticos, mas igualmente modernos.

A equação de onda mais geral é:

$$\nabla^2 \mathbf{y}(\bar{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{y}(\bar{x}, t)}{dt^2}$$

E descreve o fenômeno completamente. Aqui terminaria nosso curso se ele fosse de simples metafísica.

Mas, vamos continuar, valendo-nos da expressão para onda monocromática:

$$\mathbf{y}(\bar{x}, t) = \mathbf{y}(x) e^{2\pi i m}$$

na qual descreve $\mathbf{y}(\bar{x})$ agora a variação espacial de amplitude e fase. Substituindo esta expressão na anterior, obtemos a equação de Helmholtz.

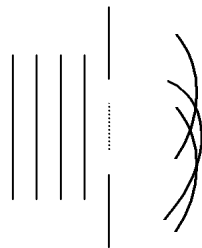
$$\nabla^2 \mathbf{y} + \left(\frac{2p\mathbf{n}}{c} \right)^2 \mathbf{y} = 0$$

na qual k é o fator *quadrático*, conhecido como “vetor de onda”.

$$k = 2p \frac{\mathbf{n}}{c} = \frac{2p}{l} \quad \text{sendo } l \text{ o comprimento de onda.}$$

Esta equação tem solução rigorosa por meio do teorema de Green, (vide O’Neil, cap.5), mas nós usaremos uma solução aproximadas baseada no antigo princípio de Huygens.

Consideremos primeiramente que uma fonte pontual de luz dará lugar a uma onda esférica.



Princípio de Huygens

Sendo uma onda esférica representada na notação de números complexos como:

$$\mathbf{y} = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

e r à distância da fonte pontual até o ponto de observação. Ela constitui uma solução particular da equação de Helmholtz. Como a equação é linear, a superposição de soluções é permitida.

Consideremos logo uma onda arbitraria como sendo um conjunto de fontes pontuais distribuídas na superfície de onda, o que constitui o princípio de Huygens. A amplitude correspondente a cada ponto de superfície é assim transferida para uma onda esférica começando a se propagar desde aquele ponto (ver fig. acima).

Temos assim que a onda, $\mathbf{y}(\mathbf{e})$ continua se propagando como um conjunto de ondas esféricas.

$$\mathbf{y}(x) = \int \mathbf{y}(\mathbf{e}) \frac{e^{-ikr(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}})}}{r(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}})} d\bar{\mathbf{e}}$$

Mas este modelo não toma conta do fato de as ondas secundárias terem uma direção preferencial na direção de propagação e não no sentido contrário. Esse fenômeno requer de um fator chamado “de obliquidade” que pode ser obtido da solução escalar exata da equação de Helmholtz.

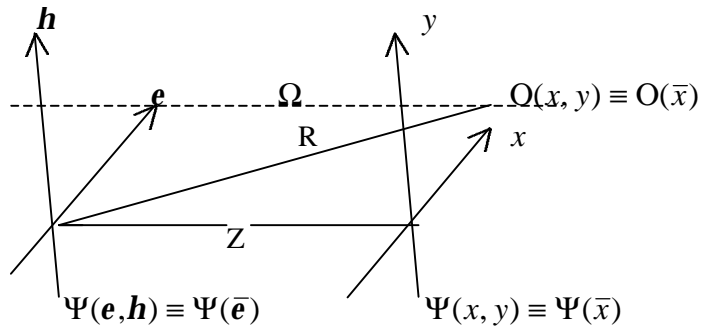
$$\mathbf{y}(\bar{x}) = \int \mathbf{y}(\bar{\mathbf{e}}) \Lambda(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}}) e^{-ikr(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}})} d\bar{\mathbf{e}}$$

Sem entrar no estudo do fator Λ , vamos dizer que, nos casos que trataremos, vale a restrição de $|\bar{x}| \ll r$ e $|\bar{\mathbf{e}}| \ll r$, ou seja, de ângulos pequenos para os quais o fator de obliquidade é considerado constante.

Além da paraxialidade, o formalismo é teoricamente válido, no caso de presença de objetos difratores, para distancias de propagação bem maiores que \mathbf{l} .

Vemos também que o valor da distancia de propagação r afeta muito menos a amplitude do que a fase das ondas secundárias. A variação de r em $\pm \mathbf{l}$ faz com que o termo exponencial mude entre -1 e 1 , mas, sendo $r \gg \mathbf{l}$, esta mudança quase que não afeta o valor do termo $r^{-1}(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}})$. Podemos então considerá-lo constante na integração e denomina-lo C para finalmente obter:

$$\mathbf{y}(\bar{x}) = \frac{C}{z} \int \mathbf{y}(\bar{\mathbf{e}}) e^{-ikr(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}})} d\bar{\mathbf{e}}$$



Pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} r(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}}) &= [(x - \mathbf{e})^2 + (y - \mathbf{h})^2 + z^2]^{1/2} = \\ &= R \left[1 + \frac{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2}{R^2} - \frac{2(\mathbf{e}x + \mathbf{h}y)}{R^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

A aproximação paraxial permite a expansão binomial nos dois primeiros termos:

$$r(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}}) \cong R + \frac{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2}{2R} - \frac{2\mathbf{e}x + \mathbf{h}y}{R}$$

Segundo a importância do termo $\frac{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2}{2R}$ classificamos os fenômenos de difração em:

$$k \frac{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2}{2R} \gg 1 \quad \text{Difração de Fresnel ou caso de campo próximo.}$$

$$k \frac{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2}{2R} \ll 1 \quad \text{Difração de Fraunhofer ou caso de campo afastado.}$$

Este segundo caso é atingido na observação a muita distância ou, mais usualmente, colocando um elemento cuja fase complementa e cancela aquele. O campo obtido na distância z ficaria no caso:

$$\mathbf{y}(x, y) = c e^{ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right)} \iint \mathbf{y}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) e^{\frac{2\pi i}{\lambda z} (\mathbf{e}x + \mathbf{h}y)} d\mathbf{e} d\mathbf{h}$$

que tem a forma da transformada de Fourier da onda inicial.

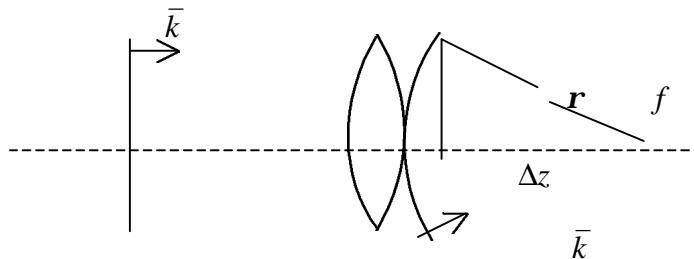
OBS: $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} + \dots$

A aproximação paraxial, utilizada na expansão anterior para $r(\bar{x}, \bar{\mathbf{e}})$ justifica agora a substituição $R \cong z$ faltando em rigor determinar o grau de validade da aproximação.

§ com lentes

Vejamos agora a influência de uma lente no percurso de uma onda luminosa.

Por definição, uma lente perfeita é aquela que faz uma onda plana mudar para uma onda esférica de raio f , chamando f “distância focal da lente”.



portanto: $(f - \Delta z)^2 + r^2 = f^2 \rightarrow 2f \cdot \Delta z = r^2 + \Delta z^2$

$$\Delta z = \frac{r^2 + \Delta z^2}{2f} = \frac{r^2}{2f} + \frac{\Delta z^2}{2f} \cong \frac{r^2}{2f}$$

Usando novamente a aproximação paraxial.

A diferença de fase gerada colocando a lente no plano (\mathbf{e}, \mathbf{h}) é assim nesse próprio plano:

$$\mathbf{f} = \frac{k}{2f}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)$$

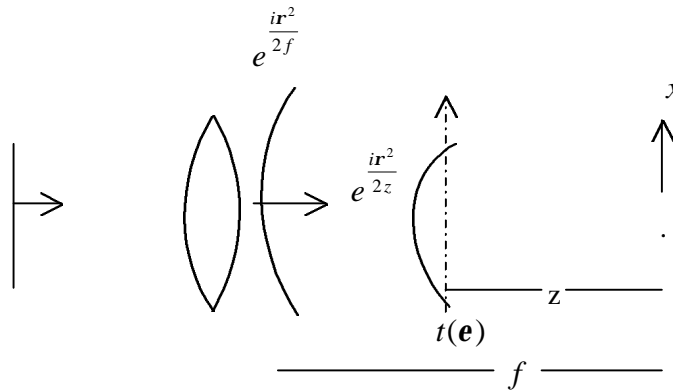
Esse termo de fase é incorporado, numa lente perfeita, para cada direção das ondas que percorrem a lente, acrescentando sua fase nesse valor. Na distancia $z = f$ temos assim perfeitamente cancelado o termo de fase de campo próximo dando:

$$\mathbf{y}(x, y) = c \frac{e^{-ikf}}{r} \iint \mathbf{y}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) e^{\frac{2\pi i}{z}(ex+hy)} d\mathbf{e}d\mathbf{h}$$

Idêntica á equação do campo afastado.

Portanto o campo afastado ou plano focal de uma lente é a transformada de Fourier do campo difratado.

Caso de um objeto difrator colocado atrás da lente.



No plano (\mathbf{e}, \mathbf{h}) temos a onda incidente $e^{\frac{i r^2}{2z}}$ multiplicada pela transmitância do objeto. A onda difratada será assim:

$$e^{\frac{i r^2}{2z}} t(\mathbf{e}, \mathbf{h})$$

onde $t(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ é a transmitância em amplitude de campo. A propagação dessa onda até o plano focal dará o campo:

$$\mathbf{y}(x, y) = c e^{ikz} \iint t(\mathbf{e}, \mathbf{h}) e^{\frac{ik}{z}(ex+hy)} d\mathbf{e}d\mathbf{h}$$

proporcional á $\mathfrak{S}\{t(\mathbf{e}, \mathbf{h})\}$.

Finalmente, só observamos a intensidade do campo elétrico luminoso, ou seja, o seu quadrado, que em notação complexa fica:

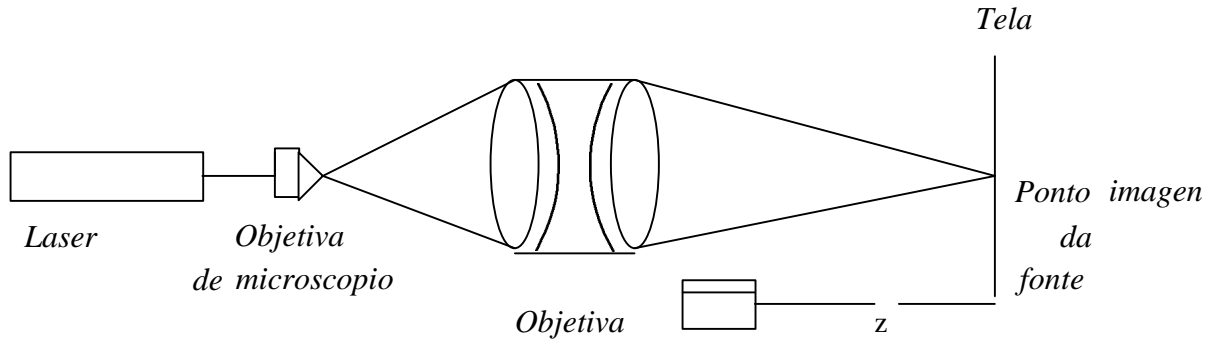
$$I_a |y(x, y)|^2 = y(x, y) \cdot y^*(x, y)$$

Portanto:

$$I_a |\mathfrak{S}\{t(\mathbf{e}, \mathbf{h})\}|^2 = |F(\frac{k}{z}x, \frac{k}{z}y)|^2$$

Podemos assim, num dispositivo experimental constituído por duas lentes obter o valor quadrático da \mathfrak{S} de diferentes objetos.

Notemos que todo o sistema óptico somente fez gerar uma onda que converge na tela, a iluminar o objeto difrator.



Vamos dizer também que o objeto poderia estar locado antes da lente, podendo-se demonstrar que isto não muda o resultado porque somente adiciona um termo de esfericidade na fase total da onda difratada, e o tamanho da figura.

A difração como transformação de Fourier

Vamos considerar as propriedades de transformação de Fourier (\mathfrak{S}) para poder comparar com as demonstrações realizadas com o sistema óptico já descrito. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções arbitrárias que descrevem, por exemplo, a transmitância de um objeto.

Linearidade

$$\mathfrak{S}\{af + bg\} = a\mathfrak{S}\{f\} + b\mathfrak{S}\{g\}$$

Semelhança

Sendo:

$$\mathfrak{S}\{f(\mathbf{e})\} = F(x) \quad \text{resulta} \quad \mathfrak{S}\{f(a\mathbf{e})\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{x}{a}\right)$$

Significando que quando o objeto é contraído o espectro é magnificado e vice-versa. Veremos isso observando a difração por uma fenda de abertura variável: quanto menor é a fenda, maiores são as dimensões da figura de difração.

Deslocamento

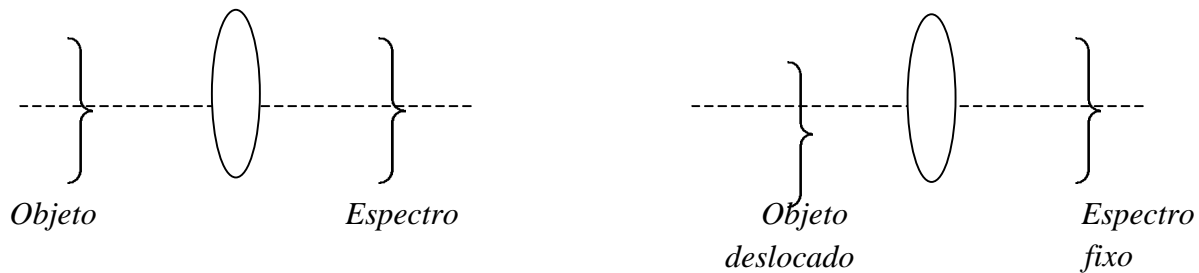
Sendo

$$\mathfrak{F}\{f(\mathbf{e})\} = F(x) \quad \text{resulta} \quad \mathfrak{F}\{f(\mathbf{e} + \mathbf{e}_0)\} = F(x)e^{2\pi i x_0}$$

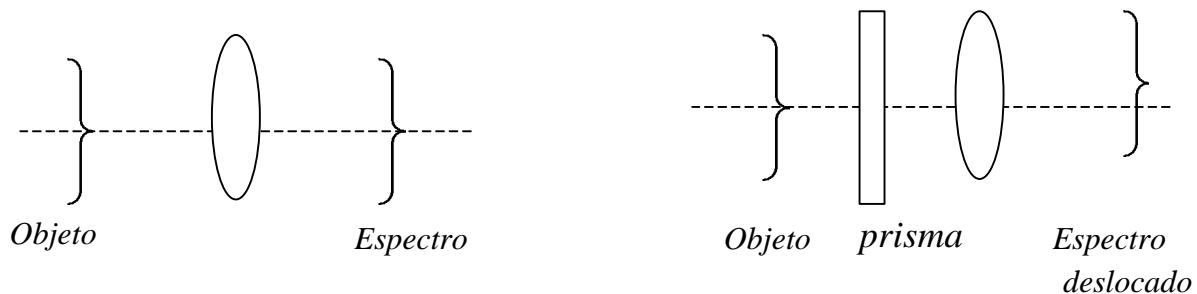
e $I(x) = |F(x)|^2$

Ou seja que deslocando transversalmente ao objeto a figura não muda. Este resultado pouco intuitivo vem do fato que não se pode ver a fase da onda e o que se tem é que a figura resulta projetada sob um ângulo um pouco diferente, no mesmo lugar.

Equivalente Óptico



Inclinação (defasagem linear):



(O prisma na figura deve ser mais largo na base que em cima).

$$\mathfrak{F}\{f(\mathbf{e}) e^{2\pi i x_0}\} = F(x - x_0) \quad \text{resulta na intensidade deslocada} \quad I(x) = |F(x - x_0)|^2.$$

O resultado pode ser explicado simplesmente por óptica geométrica: inclinando-se todos os raios que chegam à lente numa mesma quantidade, tudo acontece como uma rotação ao redor do ponto central da lente (o raio que passa pelo ponto central da lente não sofre desvio).

Exemplo básico

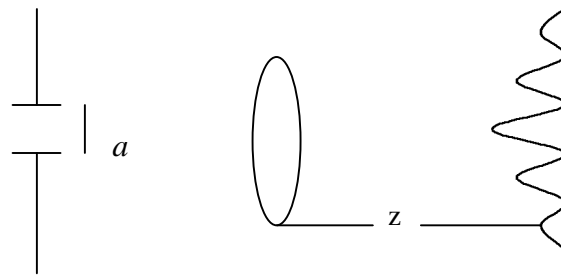
$\mathfrak{F}\{cte\} = d(x)$ representa uma situação sem condições limites no contorno. Nosso sistema óptico corresponde á representação de funções com limites impostos pela abertura, dando sempre como resposta a um objeto de transmitância constante (ou, simplesmente, sem objeto) um ponto físico de dimensões dadas

por difração na abertura circular. A função abertura do sistema multiplica as funções simples que assumimos para as transmitâncias. Na realidade, nossa transformação não pode ter limites infinitos.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-a}^a \right), a = \text{raio da abertura}$$

Usamos $d(x)$ como expressão simplificada da resposta do sistema livre de transparência, pequeno círculo com anéis obtido na tela.

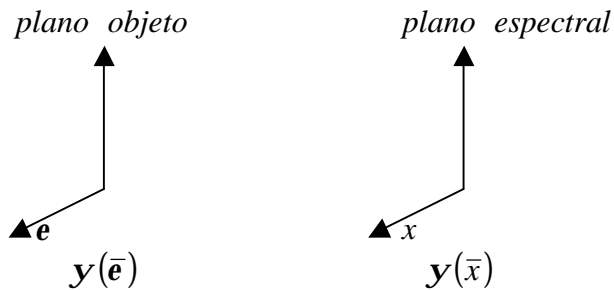
As dimensões do ponto físico serão assim sempre maiores que $\lambda z/2a$ e não podem existir detalhes com menores dimensões que ele. Assumimos isto como hipótese, confirmada apenas por casos particulares. Em um curso mais avançado veríamos que isto se explica por uma propriedade de *convolução*.



função
abertura

Simetrias

Temos:



$$y(x) \mathcal{A}\{y(e)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(e) e^{\frac{ikex}{f}} de$$

$$I(\bar{x}) \mathcal{A} y(x) y^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(e) y^*(e') \cdot e^{\frac{ikex}{f}} \cdot e^{-\frac{ike'x}{f}} dede'$$

Vemos que para campos $y(e)$ reais (caso de incidência de onda plana em uma transmitância, objeto que funciona somente como absorvedor) a mudança de x por $-x$ não afeta a intensidade, o que seria análogo no caso de se considerar a segunda coordenada (y). Isso explica a simetria com respeito ao ponto origem que caracteriza as figuras.

Exercício: tente visualizar essa simetria pela análise do conjunto de raios que atingem o plano espectral, considerando claro, suas defasagens.

Cálculos Teóricos de alguns casos de difração

Difração por uma fenda

Seja uma fenda infinita de largura $2a$ centrada no eixo \mathbf{h} e iluminada uniformemente.
Portanto

$$A(\mathbf{e}, \mathbf{h}) = \begin{cases} A|\mathbf{e}| < a \\ 0|\mathbf{e}| > a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \int A(\mathbf{e}) e^{i\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} / f} d\mathbf{e} = \int_{-a}^a e^{i\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} / f} d\mathbf{e} = \\ &= \left[\frac{Af}{ikx} e^{ikax/f} - e^{-ikax/f} \right] = 2aA \frac{\sin \frac{kxa}{f}}{\frac{kxa}{f}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(x) = 2aA \operatorname{sinc} \frac{kax}{f}$$

$$I(x) = 4a^2 A^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{kax}{f}$$

Abertura retangular

$$\mathbf{y}(x, y) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b A(\mathbf{e}, \mathbf{h}) e^{i\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} / f} d\mathbf{e} d\mathbf{h}$$

$$\mathbf{y}(x, y) = 4Aab \operatorname{sinc} \frac{kax}{f} \operatorname{sinc} \frac{kby}{f}$$

$$I = 16A^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{kax}{f} \operatorname{sinc}^2 \frac{kby}{f}$$

Abertura Circular

$$\begin{cases} \mathbf{e} = r \cos f \\ \mathbf{h} = r \sin f \end{cases}$$

$$y(r, \mathbf{q}) = \int_0^a \int_0^{2p} A \cdot e^{\left(\frac{ik}{f}\right) r \cos \mathbf{q} r \cos f} e^{\left(\frac{ik}{f}\right) r \sin \mathbf{q} r \sin f} r dr d\mathbf{f}$$

$$I_0(x) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} e^{ix \cos g} dg$$

Portanto

$$y(r, \mathbf{q}) = 2pA \int_0^a J_0\left(\frac{kr\mathbf{r}}{f}\right) r dr$$

$$\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$$

$$y(r, \mathbf{q}) = A p a^2 2 \frac{J_1\left(\frac{kra}{f}\right)}{\frac{kra}{f}} = A p a^2 \text{besinc} \frac{kra}{f}$$

$$I(r, \mathbf{q}) = A^2 p^2 a^4 \text{besinc}^2 \frac{kra}{f}$$

Função de Airy, cujo primeiro mínimo determina o raio do disco central.

$$J_1(4) = 0 \rightarrow \frac{kra}{f} = 4 = \frac{2p}{1} \frac{ra}{f}$$

$$r = \frac{4}{2p} \frac{1f}{a} = 0,6 \frac{1f}{a} \rightarrow d = 1,22 \frac{1f}{a}$$

Este resultado é de grande importância pela simetria circular que caracteriza os sistemas ópticos, na sua maioria.

É bom lembrar que é indicado geralmente nas lentes o valor:

$\frac{f}{a} \cong f^* = f_N = f$: =abertura numérica da lente ou N.A., é adimensional, contém geralmente uma casa decimal (2,8 , 3,5 , 5,6 , etc.) e expressa-se com vírgula em português, alemão e línguas latinas, com ponto em inglês e geralmente em japonês. Ele está vinculado á luminosidade da lente, uma lente com f:1,2 é considerada uma lente de grande luminosidade, uma com f:22 é uma lente muito fechada por um diafragma.

Portanto o diâmetro do menor ponto que pode ser resolvido por uma lente é:

$$d = 1,22 1f^*$$

A lente não pode reproduzir detalhes menores que d , sendo ainda perfeita. Perceba-se que estamos indicando um diâmetro para d e um raio para a , por isto acostumo a usar a fórmula: $d = 2,44\lambda f / A$ onde $A = 2a$ também é um diâmetro.

No caso especial de uma objetiva (conjunto de lentes) sem aberrações, o resultado indica que a maior resolução é atingida com a maior abertura.

Difração por aberturas pequenas:

Representamos a abertura por uma função $d(\mathbf{z})$, obtendo no plano de Fourier $\mathfrak{S}\{d(\mathbf{z})\} = cte = 1$.

Uma segunda abertura deslocada em $\Delta\mathbf{z}$ da origem é representada por:

$$d(\mathbf{z} - \Delta\mathbf{z})$$

dando o campo proporcional a: $\mathfrak{S}\{d(\mathbf{z} - \Delta\mathbf{z})\} = e^{\frac{ikx\Delta z}{z}} \mathfrak{S}\{d(\mathbf{z})\}$
(propriedade de deslocamento)

O termo de fase, que não é importante na observação da figura difratada por um objeto único, não pode ser desprezado na análise da superposição de dois objetos.

Assim, temos o campo:

$$\mathfrak{S}\{d(\mathbf{z}) + d(\mathbf{z} - \Delta\mathbf{z})\} = 1 + e^{\frac{ikx\Delta z}{z}}$$

Dando na intensidade proporcional a:

$$\begin{aligned} \left(1 + e^{\frac{ikx\Delta z}{z}}\right) \left(1 + e^{\frac{-ikx\Delta z}{z}}\right) &= 1 + 1 + e^{\frac{ikx\Delta z}{z}} + e^{\frac{-ikx\Delta z}{z}} = \\ &= 2 + 2 \cos \frac{2p}{l_z} x\Delta z = 2 \cos^2 \left(p \frac{x\Delta z}{l_z} \right) \end{aligned}$$

Franjas de período $p = \frac{l_z}{\Delta z}$ e intensidade máxima igual a soma da intensidade das fontes. Por simples escolha do eixo \mathbf{z} , podemos saber que a orientação das franjas será sempre perpendicular á distancia entre as aberturas, no plano conjugado.

Caso geral de difração por superposição de duas funções idênticas deslocadas:

$$t(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}), \text{ dando o campo}$$

$$\mathfrak{S}\{t(\mathbf{z})\} = \mathfrak{S}\{f(\mathbf{z})\} + \mathfrak{S}\{f(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z})\} = F(x) + e^{\frac{ik\Delta z x}{z}} F(x)$$

$$= F(x) \left(1 + e^{\frac{ik\Delta z x}{z}} \right) \rightarrow I(x) \mathbf{a} \cdot |F(x)|^2 \cos^2 \left(\mathbf{p} \frac{x\Delta \mathbf{z}}{l_z} \right)$$

Aparecem franjas modulando ao espectro da função, perpendicular á direção do deslocamento.

Difração por uma função periódica

Função transmissão periódica mais simples: Variação harmônica:

$$t(\mathbf{z}) = 1 + a \cos 2\mathbf{p}\mathbf{nz}$$

rede de perfil senoidal de período $p = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{nz}}$ (só pode ser $a < 1$ pois $0 < t < 1$).

No plano de Fourier obtemos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathfrak{S}\{t(\mathbf{z})\} = \mathfrak{S}\{1 + a \cos 2\mathbf{p}\mathbf{nz}\} = \mathfrak{S}\{1\} + a\mathfrak{S}\{\cos 2\mathbf{p}\mathbf{nz}\} = \\ &= \mathbf{d}(x) + \frac{a}{2} \mathfrak{S}\{e^{i2\mathbf{p}\mathbf{nz}} + e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{nz}}\} = \mathbf{d}(x) + \frac{a}{2} \mathbf{d}(x + \mathbf{nl}z) + \frac{a}{2} \mathbf{d}(x - \mathbf{nl}z) \end{aligned}$$

como campo, dando na intensidade:

$$I(x) \mathbf{a} \mathbf{d}(x) + \frac{a^2}{4} \mathbf{d}(x + \mathbf{nl}z) + \frac{a^2}{4} \mathbf{d}(x - \mathbf{nl}z)$$

Obtemos no plano espectral um ponto central brilhante e dois pontos laterais deslocados de $x = \frac{l_z}{p}$, de menor intensidade. Estes pontos laterais caracterizam a presença da figura de frequência espacial \mathbf{n} , pois a $\mathbf{d}(x)$ seria o resultado para uma transparência simplesmente uniforme. Vemos que no plano de Fourier obtemos a presença de frequências espaciais positivas e negativas.

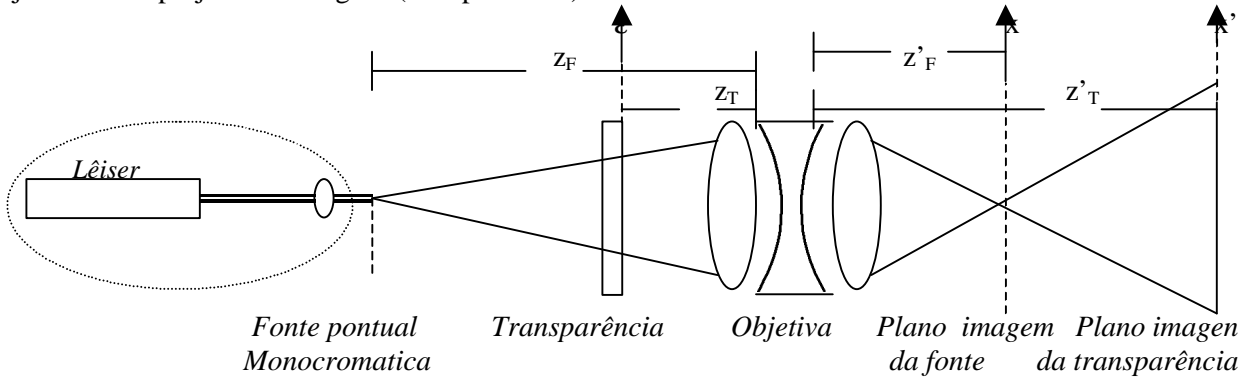
Observamos também como a posição destes pontos depende de \mathbf{l} , sendo mais afastados aqueles correspondentes a \mathbf{l} maior.

segue: Presença da difração na formação de imagens

Presença da difração na formação de imagens

A formação de imagens como proceso de dupla transformação

Seja o sistema projetor de imagens (transparências)



Sabemos por optica geometrica que temos a imagen invertida da fonte segundo a relação $\frac{1}{z_F} + \frac{1}{z'_F} = \frac{1}{f}$ e que também obtemos a imagem invertida da transparencia segundo a relação $\frac{1}{z_T} + \frac{1}{z'_T} = \frac{1}{f}$, medindo-se as distâncias desde os **planos pricipais** da objetiva.

Sabemos por óptica ondulatoria que no plano imagem da fonte teremos o módulo quadrado da transformada de Fourier da função de transmissão de qualquer objeto translúcido. A observação deste caso demonstra então que, desde o plano de Fourier (z'_F) onde temos o espectro espacial do objeto, até o plano imagem houve algo muito semelhante a uma transformação de Fourier inversa. Lembrando a propriedade:

$$f(x) = \mathfrak{F} \mathfrak{F}^{-1} \{f(x)\}$$

Teremos casamento com a interpretação do fenômeno de obtenção de imagens pelas lentes se interpretarmos que, a menos de fatores de fase não observáveis na intensidade por quadratura, o processo de formação de imagens é constituído de uma primeira transformação de Fourier até o plano fonte seguida de uma segunda transformação de Fourier, sendo x' e y' as coordenadas no plano imagem da transparencia e m o fator de aumento dado pela optica geometrica, $m = \frac{z'_T}{z_T}$.

Em outros termos isto é chamada teoria de Abbe para a formação de imagens (Klein 9.2).

O proceso de formação de imagens por uma fonte extensa e policromática pode ser descomposto no conjunto de fenomenos de difração mais simples gerados por cada componente pontual e monocromática da fonte.

A superposição criada pelas multiplas fontes e comprimentos de onda dificulta a observação das figuras de difração características no plano de Fourier, mas o fenômeno da difração está presente igualmente na formação comum de imagens com luz branca.

Exemplos de segundas transformadas

Exemplo 1: A figura difratada por um objeto periodico foi transformada na distancia z_1 . Consideremos agora o campo difratado transformando pela segunda vez agora na distancia z_2 :

$$\begin{aligned}
 E(x') \mathbf{a} \cdot \mathfrak{F}\{\mathbf{d}(x)\} + \frac{a}{2} \mathfrak{F}\{\mathbf{d}(x + \mathbf{n}z_2 \mathbf{1})\} + \frac{a}{2} \mathfrak{F}\{\mathbf{d}(x - \mathbf{n}z_2 \mathbf{1})\} &= \\
 = 1 + \frac{a}{2} \int \mathbf{d}(x + \mathbf{n}z_1 \mathbf{1}) e^{\frac{ikx'}{z_2}} dx + \frac{a}{2} \int \mathbf{d}(x - \mathbf{n}z_1 \mathbf{1}) e^{\frac{ikx'}{z_2}} dx &= \\
 = 1 + \frac{a}{2} e^{\frac{ik(-\mathbf{n}z_1)x'}{z_2}} + \frac{a}{2} e^{\frac{ik(\mathbf{n}z_1)x'}{z_2}} = 1 + a \cos\left(2p\mathbf{n} \frac{z_1}{z_2} x'\right) &= \\
 = 1 + a \cos 2p \frac{\mathbf{n}x'}{m} &
 \end{aligned}$$

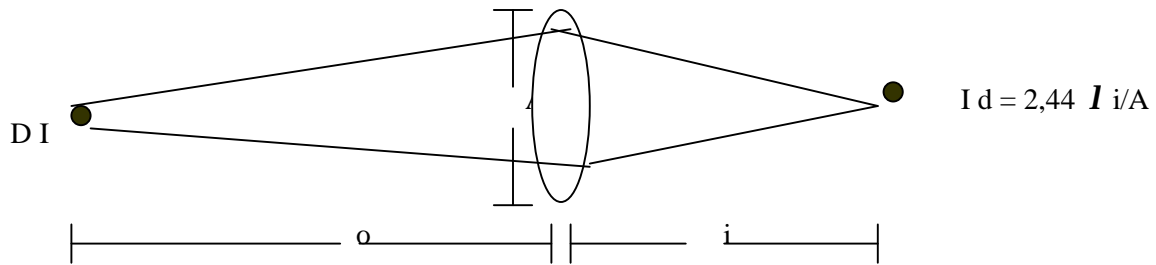
Imagem do objeto aumentada no fator $m = \frac{z_2}{z_1}$.

Exemplo 2: A figura difratada por duas aberturas pequenas é agora novamente transformada dando:

$$\begin{aligned}
 E(x') \mathbf{a} \cdot \mathfrak{F}\left\{1 + e^{\frac{ikx\Delta z}{z_1}}\right\} &= \int e^{\frac{ikx'x}{z_2}} dx + \int e^{\frac{ikx'x}{z_2}} e^{\frac{ikx\Delta z}{z_1}} dx = \\
 = \mathbf{d}(x') + \int e^{ikx\left(\frac{x'}{z_2} + \frac{\Delta z}{z_1}\right)} dx &= \mathbf{d}(x') + \mathbf{d}\left(x' + \frac{z_2}{z_1} \Delta z\right)
 \end{aligned}$$

Temos novamente a imagem invertida e aumentada do objeto. Notemos agora que obtemos imagens perfeitas de fontes pontuais apenas por desconsiderar, além das aberrações geometricas, a influência dos limites na abertura da lente. Neste exemplo, o objeto pontual é detetado por meio da onda esférica difratada que gera no encontro com a luz. A abertura limitada da lente vai receber como informação apenas uma porção desta onda, ignorando se além desta abertura a onda é verdadeiramente esférica ou não. Esta perda de informação luminosa transmitida gera a incerteza na determinação do ponto representativo do ponto do objeto na plano imagem, igual á figura de difração gerada pela abertura da lente. Assim temos, em lugar de pontos de dimensões nulas, discos de Airy de rádio $\frac{1,22\lambda z}{a}$ para abertura circular de rádio a nas lentes.

Limite de resolução por difração



Seja a lente da figura formando imagem de um objeto a distância o numa tela a distância i , segundo a lei de formação de imagens:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

Sabemos que o diâmetro do disco de Airy difratado pela abertura A e convergente na distância i representa as dimensões do menor ponto que a lente pode projetar na tela quando corrigida de todas as aberrações. Isto representa uma perda de resolução de pontos no plano objeto, tendo pontos vizinhos projetados no mesmo círculo de confusão. A região atingida por esta situação terá diâmetro D mantendo a relação angular seguinte, resultante da óptica geométrica:

$$\frac{D}{o} = \frac{d}{i} \rightarrow D = d \frac{o}{i}$$

Resultando:

$$D = 2,44 \frac{I i o}{A} = 2,44 \frac{I o}{A} \cong 1,22 \frac{I}{q}$$

Onde $2q$ é abertura angular na qual a lente recebe a luz que saiu do ponto objeto (onda esférica monocromática, no caso mais simples). Novamente, temos que a resolução depende da porção de onda que pode ser coletada como informação espacial.

Filtragem espacial de imagens

O campo difratado com a lente pode ser modificado pela presença de um objeto interposto no seu percurso. O resultado disto será obter ele multiplicado pela função de transmissão do objeto, seja este um diafragma ou uma transparência. Agindo desta maneira no plano de Fourier temos a possibilidade de agir diretamente sobre as frequências espaciais contidas na imagem, resumidas agora na forma de dois pontos simétricos no plano espectral.

Seja um objeto periódico geral, ele é composto de uma frequência fundamental e harmônicos:

$$t(\mathbf{z}) = 1 + a_1 \cos n\mathbf{z} + a_2 \cos 2n\mathbf{z} + a_j \cos jn\mathbf{z} + \dots$$

Representado no plano espectral pelos pontos:

$$d(x) + \frac{a_1}{2} d(x + nzl) + \frac{a_1}{2} d(x - qzl) + \frac{a_2}{2} d(x + 2nzl) + \frac{a_2}{2} d(x - 2nzl) \dots$$

Colocando um objeto opaco podemos anular qualquer um dos termos. Se por exemplo permitimos a passagem de apenas o ponto central obtemos no campo imagem a intensidade constante “1” do exemplo 1, perdendo toda informação. O objeto some da imagem. Temos assim filtrado a frequência espacial correspondente no sentido da coordenada x. Um fino anel de raio igual a $\frac{nz}{k}$ tiraria a frequência espacial n do plano imagem, filtrando-a dentre outras.

Já se permitirmos a passagem de somente um dos pontos espectrais também não teríamos essa informação no plano imagem, que resultaria uniformemente iluminado (termo tipo “2”) se perdendo na intensidade a informação que está envolvida no fator de fase (exponencial complexo).

A passagem do ponto central e dois pontos simétricos resulta em:

$$E(x') = 1 + \frac{aj}{2} e^{-ij\frac{u}{m}x'} + \frac{aj}{2} e^{ij\frac{u}{m}x'} = 1 + a_j \cos j \frac{u}{m} x'$$

Permitindo a obtenção de toda a informação correspondente exclusivamente à frequência jn .

Com a passagem de um ponto espectral e o ponto central obtemos:

$$E(x') = 1 + \frac{aj}{2} e^{ij\frac{u}{m}x'}$$

Representado uma perda na intensidade correspondente á frequência n , dando menor contraste a respecto do fundo e também a respecto das perturbações (“ruído”) que estejam presentes.

A passagem de somente dois pontos simétricos fornece:

$$E(x') = \frac{aj}{2} e^{-ij\frac{u}{m}x'} + \frac{aj}{2} e^{ij\frac{u}{m}x'} = a_j \cos j \frac{u}{m} x'$$

Ou seja, informação no sentido estrito. Lembremos (formula (30) da apostila “Interferencia” do Prof. Lunazzi) que a presença do fundo contínuo aumenta muito a capacidade de modulação da componente secundaria. Temos assim neste caso a perda visual de informação e uma proximidade muito maior do sinal com “ruído”optico. No ultimo caso pode se observar portanto uma nítida figura tipo coseno quadrado, equivalente a uma dobragem visual da frequência original.

A filtragem pode ser mais geral do que a simples obstrução no plano espectral, podendo-se colocar transparências nele dando o produto do campo neste plano pela função de transmissão da transparência.

Pode-se controlar desta maneira a distribuição de formas e frequências no plano imagem, para aumentar o contraste de figuras desejadas a respeito de outras, escolher direções na figura, separar figuras supeimpostas etc.

Uma análise mais detalhada permitiria também compreender como as aberturas presentes num sistema óptico limitan a resolução por “corte de frequências”.

PROBLEMAS DE DIFRAÇÃO

- 1- Qual é distância na qual a difração por um objeto de 5 mm pode se considerar como caso de campo afastado? ($\lambda = 0,5 \text{ nm}$)
- 2- Um feixe de laser de rubi é usado para se medir a distância Lua-Terra, enviando-o colimado por um telescópio de 1 m de diâmetro. Qual será o seu diâmetro na Lua? (distância Terra-Lua = $3,8 \cdot 10^5 \text{ m}$) Pode-se reduzir este diâmetro por focalização do feixe?
- 3- Demonstre a propriedade de homotetria na transformação de Fourier $F\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{x}{a}\right)$ O que ela representa para a figura de difração no caso de expansões ou contrações do objeto?
- 4- Luz monocromática ($\lambda = 0,5 \text{ nm}$) ilumina um furo de 0,5 mm de diâmetro, dando um ângulo de 0,002 rad para o feixe difratado principal. Qual diâmetro de furo será necessário para obter a mesma área iluminada numa tela afastada com:
 - a) $\lambda = 0,7 \text{ nm}$
 - b) $\lambda = 1 \text{ nm}$
 - c) Ondas de som na frequência de 3,3 kHz (velocidade do som: 330 m/s)
 - d) Ondas de rádio na frequência de $3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$.
- 5- A resolução de um instrumento óptico é uma medida da habilidade para produzir imagens separadas de objetos pontuais que estão muito próximos. Nos casos onde todas as observações e defeitos estão corrigidos a difração é o único fator limitativo, podendo-se mostrar que o sistema pode resolver imagens se sua separação angular é maior que λ/a (diâmetro aproximado do disco de Airy), sendo a a menor abertura limitante do sistema (por exemplo pupila do olho, diâmetro de espelho no telescópio, da objetiva no microscópio, etc.)
 - a) Qual é a distância na qual certamente não podem ser resolvidas as imagens das duas luzes de um carro? Estime os dados necessários: λ , a , distância de faróis.
 - b) O telescópio do monte Wilson tem um espelho como objetiva, de 2,5m de diâmetro e pode chegar a resolver estrelas na galáxia Andrómeda usando um filtro transmissor em $\lambda = 0,5 \text{ nm}$. Se as estrelas lá estão separadas por uns poucos anos luz, quão longe já esteve a galáxia?
 - c) Fala-se de um satélite espião orbitando na altitude de 150 km que pode fotografar as pessoas se assolarando e reconhecer seus rostos. É isto verdade?
 - d) Uma objetiva de microscópio tem 2 mm de diâmetro e focal de 3 mm. Qual é o seu poder de resolução comparado com o diâmetro de um átomo (0,3 nm)?
 - e) Quem tem maior poder resolvente, o olho humano ou um radiotelescópio de 77 m de diâmetro usando ondas de rádio de $\lambda = 0,21 \text{ m}$?
- 6-
 - a) Como mudariam nossas vidas se os sons audíveis ordinários fossem de $\lambda = 1 \text{ mm}$ por vez de $\lambda = 1 \text{ m}$?
 - b) se o comprimento de ondas da luz visível fosse 1 mm por vez de 0,5 nm?
- 7- Na experiência de duas fendas difratoras (Young) uma fenda é colocada antes de aquelas duas. Qual é sua função? Qual é o espaçamento das franjas 1m detrás das fendas separadas em 0,2mm. e iluminadas por uma lâmpada de mercúrio filtrada em $\lambda = 0,254 \text{ nm}$?
- 8-
 - a) Obtenha o poder resolvente de uma rede de difração circular de N linhas por milímetro como função de sua abertura (círculo de raio a) valendo-se do conhecimento do disco de Airy.

- b) Determine o mesmo assumindo como exemplo que a primeira metade da rede possui v linhas/mm enquanto a segunda metade possui $v+\Delta v$.
- 9- Com qual precisão podemos medir a largura de uma fenda difratora dispondo de uma régua milimétrica de 200 mm de comprimento e um sistema óptico simples iluminando por um laser de He-Ne?
- Resolva inicialmente a medição pela determinação da largura do primeiro máximo.
 - Use todos os máximos
 - Imagine possuir régua, detectores e fendas de precisão infinita, pode a medição ser perfeita?.

Referência: Klein - "Optics" – ed. Wiley

(Digitado por Noemí Rivera-2001).