F 641 Lista L3 Prof. Lunazzi dia 30.10.01 para 06.11.01

RESPONDIDA

L3.1) (JJL4.1) Demonstre que a fórmula da diferença de caminho dos sucessivos raios que interferem dentro de um interferômetro de Fabry-Perot (Fig. 4.2 do Fowles) é aquela indicada pela fórmula 4.1 do livro.

Rta.: Temos de considerar o momento da separação dos feixes, por reflexão na segunda superfície. A marcação de linha espessa da figura não configura uma diferença de caminho, em aula foi explicado pela diferença de segmentos S1,S2 e S3.
C = S3+S2-S1 Acrescentarei aqui um índice de refração para cada meio, n1 e n2.
C = (S3+S2)n1-S1 n2 seria o caso geral, mas vamos assumir n1=n2=1 como na figura.

C = S3+S2-S1 = 2 d/cosTETA- 2 d tgTETA senTETA =

= (2 d/cosTETA)[1-(senTETA) (senTETA)] = (2 d/cosTETA)(cosTETA) (cosTETA) =

2 d cosTETA De onde chegamos á fórmula do Fowles.

Se consideramos a diferença de caminho já para n1=n2=n podemos adiantar nossa referência, e nesse caso ela fica C = S3-S2 onde coincide S3 ser igual á parte marcada com linha espessa <u>embaixo</u> pelo Fowles. E, calculando, tem-se o mesmo resultado, apenas que seguindo a indicação do Fowles não se entende o porquê dele ter escolhido esses segmentos.

L3.2) (F4.3) Os espelhos de um ressonador Fabry-Perot para lêiser possuem camadas que dão a refletividade de 0,99. Eles estão separados por uma distância de 1m. Encontre o valor da largura de franja em comprimento de onda e em freqüência para λ = 633 nm.
Rta.:
Sabemos que $|\omega - \omega'| = c(1-R)/d\sqrt{R}$ (Eq. 4.19, p.95 do Fowles). E que o poder resolvente vale $\omega/|\omega-\omega'| = \omega/\delta\omega = \nu/\delta\nu = \lambda/\delta\lambda$
$\delta\nu = \delta\omega/2\pi = c\,(1\text{-}R)/2\pi\sqrt{R} = 3.10^8\,(1\text{-}0{,}99)/\,2\pi.1.\,\sqrt{0{,}99}$ = 480 kHz
como $\delta\lambda = \lambda\,\delta\nu/\nu = (1/\nu = \lambda/c) = \lambda^2\,\delta\nu/c = 4{,}8.10^5.(633.10^{-9})^2/3.10^8 = 6{,}4\ 10^{-16}$m

L3.3) (F4.4) Demonstre que os raios das franjas de interferência de um interferômetro de Fabry-Perot com superficies planas são aproximadamente proporcionais a $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, ..., $\sqrt{N'}$, onde N'é um inteiro. Assuma que existe uma franja central nula, e que o angulo θ é pequeno.
Rta.:

$$I_t = \frac{I_0 T^2}{1-R^2}\,\frac{1}{1+F\,sen^2\,\frac{\Delta}{l}} \quad ; \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad ; \quad \Delta = d + d_r = \frac{4p}{l}\,d\cos q$$

onde $\delta_r/2$ é o coeficiente de reflexão (para a fase) de cada um dos espelhos.

Nas franjas, $\Delta = 2N\pi = \delta + \delta_r$ ---> $\frac{4\pi}{\lambda} d \cos\theta + \delta_r = 2N\pi$

como $\theta \ll 1$, $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$ $\therefore$ $\frac{4\pi}{\lambda} d \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \delta_r = 2N\pi \quad (1)$

para $\theta = 0$ sabemos ter máximo, ou seja:

$$\frac{4\pi}{\lambda} d + \delta_r = 2N_0\pi \quad \rightarrow \quad \delta_r = 2N_0\pi - \frac{4\pi}{\lambda} d$$

que, colocando em (1) dá:

$$\frac{4\pi}{\lambda} d \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - \frac{4\pi}{\lambda} d + 2N_0\pi = 2N\pi$$

$$-\frac{4\pi}{\lambda} d \frac{\theta^2}{2} = 2(N - N_0)\pi = 2N'\pi \quad \rightarrow \quad \theta^2 = \frac{\lambda}{d} N' \quad \rightarrow \quad \theta = \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \sqrt{N'}$$

os raios das franjas saem de: $r = z \operatorname{tg}\theta \approx z\theta \rightarrow$ $r_{N'} = \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \sqrt{N'} \propto \sqrt{N'} \quad c.q.d.$

L3.4) (F5.7) Que tamanho de espelho de telescópio será necessário para resolver as componentes de uma
estrela dupla separadas por 108 km e distantes da terra10 anos-luz?.
Use o valor LAMBDA = 500nm.

L3.5) (F5.8) Numa figura de difração por uma fenda dupla não aparece o 4° maximo secundário. Qual é a relação da largura *b* com a separação *h*?.

Rta.: Considerando o maximo central como principal, temos que o 1° minimo acontece para $\beta=\pi/2$, e o 4° para $\beta=\pi$ (situação da Fig. 5.16). Ou seja que, quando a função $\cos\gamma$ teria seu 5° maximo, acontece o minimo da função $\mathrm{sinc}\beta$.

$$sen\left(\frac{kb}{2} sen\theta\right) = 0 \rightarrow kb\,sen\theta = 2\pi \rightarrow \frac{\pi}{\lambda} b\,sen\theta = \pi$$

e

$$\cos\left(\frac{kh}{2} sen\theta\right) = 4\pi \rightarrow \frac{kh}{2} sen\theta = 4\pi \rightarrow \frac{\pi}{\lambda} h\,sen\theta = 4\pi$$

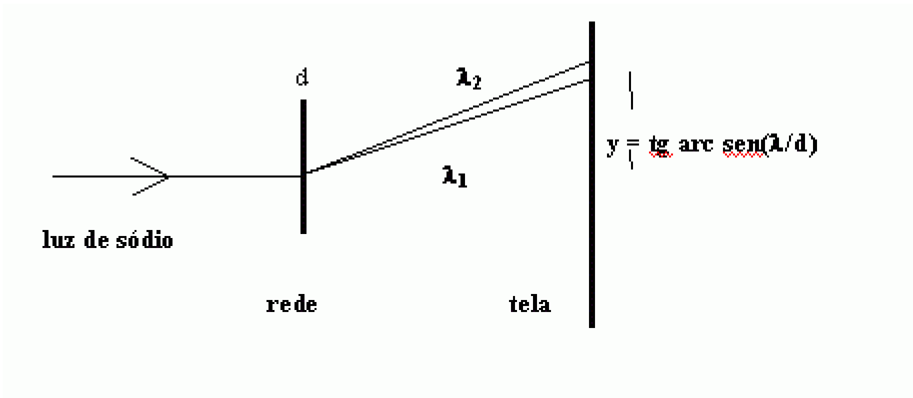
dividindo ambos resultados temos:

$$\boxed{\frac{b}{h} = \frac{1}{4}}$$

Claro que haveria outras possibilidades, se considerarmos mínimos de ordem maior da função que modula a intensidade.

L3.6) (F5.10) a) uma rede é usada para resolver as linhas D do sódio (589,0 nm e 589,6 nm) na primeira ordem. Quantas linhas são necessárias?.
b) Se a distância focal da lente focalizadora é 20 cm, e a largura total da rede de 2 cm, quanto vale a separação linear das duas linhas no plano focal?.

a)



$$N = \frac{< l >}{\Delta l} = \frac{0{,}5893}{0{,}0006} = 982 \ linhas$$

Verifique em um texto desses se entendeu o cálculo da fórmula e se ela envolve aproximação paraxial.

Podemos usar a expressão exata para a separação entre as linhas projetadas na tela (parte b de este exercício) e aproxima-la por ângulo pequeno:

$$\Delta y = z\left(tg\,arc\mathrm{sen}\,\frac{l_2}{d} - tg\,arc\mathrm{sen}\,\frac{l_1}{d}\right) \approx z\,\frac{l_2 - l_1}{d}$$

A sendo o diâmetro útil da rede, o raio do circulo de Airy, projetado sobre a tela vale:

$$\frac{1{,}22\,l\,z}{A} = \frac{1{,}22\,l\,z}{Nd}$$

Que, igualado à separação entre os raios no ponto de incidência na tela (critério de resolução), fica:

$$\frac{1{,}22 < l > z}{Nd} = z\frac{\Delta l}{d}$$ **dando:** $$N \approx \frac{1{,}22 < l >}{\Delta l} = 1{,}22\,.982\,linhas$$

Que difere em 1,22 do anterior.

b)

$$\Delta y = z\left(tgq_2 - tgq_1\right) = 20\ 10^{-2}\,m\left(tg\ arcsen\frac{l_2}{d} - tg\ arcsen\frac{l_1}{d}\right)$$

Na aproximação de ángulo pequeno:

$$\Delta y \approx z\,\frac{\Delta l}{d} = 20.10^{-2}\,\frac{0{,}6.10^{-9}}{2.10^{-2}\ 982^{-1}}\,m = 982\ .0{,}6.\,10^{-8}\,m = 5{,}8\,mm$$

L3.7) (JJL5.1) Demonstre que a luz difratada no caso de Fraunhoffer por uma abertura onde a transmissão está modulada por uma função **t**(y) = 1+cos**ν**y gera no plano focal (plano de Fourier) dois pontos luminosos simétricos respeito do ponto central que é o da luz não difratada. Encontre a posição desses pontos em função do comprimento de onda λ, do parámetro **ν** (inversa do periodo, ja que a transmissão é uma rede de difração; poderia ser chamado de “frequência espacial”) e da distância **z** entre a abertura e o plano focal.

Rta.: Vide na apostila “Difração” o caso “Difração por uma função periódica”, p.12.