Produto Tensorial de Espaços de Estados – motivação

Uma ferramenta matemática útil para problemas mais complexos.

- Até aqui apresentamos uma ferramenta matemática para tratar uma partícula no espaço $\Re^3$. Olhamos problemas unidimensionais, envolvendo, por exemplo, X ou P_x, e seus autokets $|x\rangle$ e $|p_x\rangle$, mas não deixamos de citar $\vec{R}$ e $\vec{P}$ e seus autokets correspondentes $|\vec{r}\rangle$ e $|\vec{p}\rangle$.
- Um bom começo para iniciar esse assunto seria perguntar, como se relacionam espaços unidimensionais com espaços bi ou tridimensionais de problemas do $\Re^3$?
- Em seguida, ainda considerando problemas do $\Re^3$, perguntamos, como construir kets do espaço de duas dimensões a partir de kets de espaços unidimensionais?
- Como aplicar operadores, definidos para atuar em kets de espaços físicos de uma dimensão, em kets de espaços bi ou tridimensionais de problemas do $\Re^3$?
- E o spin da partícula? Sabemos que spin não tem análogo clássico. Suponha uma partícula no $\Re^3$ e com spin. Como ampliar o espaço $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ para incorporar spin? Como lidar com operadores que envolvem operadores misturados de spin e do $\Re^3$?
- E o problema de duas partículas. Como escrevê-lo em termos da ferramenta desenvolvida para uma partícula? E o problema de N partículas com spin?

O produto tensorial auxiliará em todas estas questões.

Definição e propriedades do produto tensorial

- Sejam $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, dois espaços de dimensões N_1, e N_2 respectivamente. N_1 e N_2, podem ser finitos ou infinitos.
- Operadores e vetores desses espaços terão índices (1) e (2), para lembrar qual espaço $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ eles pertencem.
- Produto tensorial de espaços. Começamos por sua definição:

  O espaço $\mathcal{E}$ será chamado de produto tensorial de $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ e será denominado:
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2,$$
  se existir, associado a cada par $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ e $|\varphi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$, um ket, denominado
$$|\varphi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle \in \mathcal{E}$$
- Esse produto terá as seguintes propriedades:

  (i) A ordem não faz diferença
$$|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle$$
  (ii) É linear com respeito a multiplicação por números complexos.
$$\big[\lambda|\varphi(1)\rangle\big] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\big[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\big]$$
$$|\varphi(1)\rangle \otimes \big[\mu|\chi(2)\rangle\big] = \mu\big[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\big]$$
  (iii) Vale a distributiva com respeito a soma de vetores
$$|\varphi(1)\rangle \otimes \big[|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle\big] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle$$
$$\big[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle\big] \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$

Definição e propriedades do produto tensorial

- Esse produto terá as seguintes propriedades: (continuação)

  (iv) Quando uma base for escolhida para cada um dos espaços $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, $\{|u_i(1)\rangle\}$ para $\mathcal{E}_1$ e $\{|v_\ell(2)\rangle\}$ para $\mathcal{E}_2$, o conjunto de vetores $\{|u_i(1)\rangle\otimes|v_\ell(2)\rangle\}$ forma uma base em $\mathcal{E}$.

  (v) Se N_1 e N_2, finitos, forem as dimensões de $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, a dimensão de $\mathcal{E}$ será o produto $N_1 N_2$.

- Vetores de $\mathcal{E}$.

  Como ficaria o produto tensorial $|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle$, se $|\varphi(1)\rangle$ e $|\chi(2)\rangle$ forem escritos nas bases $\{|u_i(1)\rangle\}$ e $\{|v_\ell(2)\rangle\}$?

  Para ver isso, primeiro escreva $\begin{cases} |\varphi(1)\rangle = \sum_i a_i |u_i(1)\rangle \\ |\chi(2)\rangle = \sum_i b_\ell |v_\ell(2)\rangle \end{cases}$ e use as propriedades

  do slide anterior para obter: $|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \sum_{i\ell} a_i b_\ell |u_i(1)\rangle \otimes |v_\ell(2)\rangle$

> *As componentes do produto tensorial são os produtos das componentes dos dois vetores do produto.*

Definição e propriedades do produto tensorial

- Vetores de $\mathcal{E}$ (continuação).

  Existem vetores de $\mathcal{E}$ que não podem ser escritos por um simples produto tensorial de dois kets (um de cada subespaço, $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$), mas como o conjunto $\{|u_i(1)\rangle\} \otimes \{|v_\ell(2)\rangle\}$ é uma base de $\mathcal{E}$, é possível escrever:

$$|\psi\rangle = \sum_{i\ell} c_{i\ell} |u_i(1)\rangle \otimes |v_\ell(2)\rangle$$

  Outra forma de dizer que $|\psi\rangle$ *não é um simples produto tensorial, é dizer que nem sempre é possível escrever todos os* $c_{i\ell}$ como produtos $a_i b_\ell$ *(as componentes de um vetor de cada subespaço).*

- O produto escalar em $\mathcal{E}$.

  A existência de produtos escalares em $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ permite a definição de um produto escalar em $\mathcal{E}$, segundo a regra:

  Dados $\begin{cases} |\varphi(1)\chi(2)\rangle \equiv |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \\ \\ |\varphi'(1)\chi'(2)\rangle \equiv |\varphi'(1)\rangle \otimes |\chi'(2)\rangle \end{cases}$ definiremos como produto escalar

  destes dois kets de $\mathcal{E}$ por

$$\boxed{\langle \varphi'(1)\chi'(2) | \varphi(1)\chi(2)\rangle \equiv \langle \varphi'(1)|\varphi(1)\rangle \langle \chi'(2)|\chi(2)\rangle}$$

Definição e propriedades do produto tensorial

- O produto escalar em $\mathcal{E}$ (continuação).

  Observações:

  Para kets de $\mathcal{E}$ que não podem ser escritos como simples produtos, primeiro escreva-os em uma base apropriada:

$$|\psi\rangle = \sum_{i\ell} c_{i\ell} |u_i(1)\rangle \otimes |v_\ell(2)\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \sum_{jk} c'_{jk} |u_j(1)\rangle \otimes |v_k(2)\rangle$$

  e depois aplique as propriedades aprendidas e a definição de produto escalar para as componentes, isto é

$$\langle u_j(1) v_k(2) | u_i(1) v_\ell(2)\rangle \equiv \langle u_j(1)|u_i(1)\rangle \langle v_k(2)|v_\ell(2)\rangle$$

  Note que a relação acima fornece $\boxed{\langle u_j(1) v_k(2) | u_i(1) v_\ell(2)\rangle = \delta_{ij}\delta_{k\ell}}$

- O produto tensorial de operadores (operadores estendidos).

  - Suponha um operador $A(1)$ que atue em $\mathcal{E}_1$. Associaremos um operador $\tilde{A}(1)$ que atua em $\mathcal{E}$ que respeita a seguinte relação:

$$\tilde{A}(1)\big[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\big] = \big[A(1)|\varphi(1)\rangle\big] \otimes |\chi(2)\rangle$$

  - Para obter $\tilde{A}(1)|\psi\rangle$ basta usar a expansão acima e linearidade.

Definição e propriedades do produto tensorial

- O produto tensorial de operadores (continuação).
  - A atuação de $\tilde{A}(1)$ sobre um ket arbitrário de $\mathcal{E}$ fica

$$\tilde{A}(1)|\psi\rangle = \tilde{A}(1)\Big[\sum_{i\ell} c_{i\ell}|u_i(1)\rangle \otimes |v_\ell(2)\rangle\Big] = \sum_{i\ell} c_{i\ell}\Big[A(1)|u_i(1)\rangle\Big] \otimes |v_\ell(2)\rangle$$

  - De forma análoga podemos definir $\tilde{B}(2)$ a partir de um operador $B(2)$ que atua em $\mathcal{E}_2$.

$$\tilde{B}(2)|\psi\rangle = \tilde{B}(2)\Big[\sum_{i\ell} c_{i\ell}|u_i(1)\rangle \otimes |v_\ell(2)\rangle\Big] = \sum_{i\ell} c_{i\ell}\Big[|u_i(1)\rangle \otimes \big[B(2)|v_\ell(2)\rangle\Big]$$

  - Se $A(1)$ e $B(2)$ são dois operadores que atuam em $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, respectivamente, o produto tensorial $A(1) \otimes B(2)$ atua em $\mathcal{E}$, é linear e respeita a relação:

$$A(1) \otimes B(2)\Big[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\Big] = \Big[A(1)|\varphi(1)\rangle\Big] \otimes \Big|\Big[B(2)\chi(2)\rangle\Big]$$

- O produto tensorial de operadores (comentários).
  - Se tomarmos $\mathbb{1}(1)$ e $\mathbb{1}(2)$, operadores unidades que atuam em $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, respectivamente, podemos escrever: $\begin{cases} \tilde{A}(1) = A(1) \otimes \mathbb{1}(2) \\ \tilde{B}(2) = \mathbb{1}(1) \otimes B(2) \end{cases}$
  - Inversamente, poderíamos escrever: $A(1) \otimes B(2) = \tilde{A}(1)\tilde{B}(2)$.

Definição e propriedades do produto tensorial

- O produto tensorial de operadores (comentários-continuação).

  - Os dois operadores $\begin{cases} \tilde{A}(1) = A(1) \otimes \mathbb{1}(2) \\ \\ \tilde{B}(2) = \mathbb{1}(1) \otimes B(2) \end{cases}$ comutam em $\mathcal{E}$.

    Para ver isso, calcule:

$$\tilde{A}(1)\tilde{B}(2)\left[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\right] = \tilde{A}(1)\Big[|\varphi(1)\rangle \otimes [B(2)|\chi(2)\rangle]\Big] = [A(1)|\varphi(1)\rangle] \otimes [B(2)|\chi(2)\rangle],$$

    e compare com:

$$\tilde{B}(2)\tilde{A}(1)\left[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\right] = \tilde{B}(2)\Big[[A(1)|\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle\Big] = [A(1)|\varphi(1)\rangle] \otimes [B(2)|\chi(2)\rangle].$$

  - Como fica o projetor? Se $|\varphi(1)\rangle\langle\varphi(1)|$ é um projetor em $\mathcal{E}_1$ e $|\chi(2)\rangle\langle\chi(2)|$ é um projetor em $\mathcal{E}_2$, temos que

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle\langle\varphi(1)\chi(2)| = |\varphi(1)\rangle\langle\varphi(1)| \otimes |\chi(2)\rangle\langle\chi(2)|$$

    é um projetor em $\mathcal{E}$, onde $|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$.

  - *Assim como com vetores, existem operadores que atuam em $\mathcal{E}$ que não são produtos simples de operadores que atuam em $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$.*

Equações de Autovalor em Produtos de Espaços

- Primeiro, para facilitar, vamos adotar uma nova notação.

$$\text{Daqui para frente} \begin{cases} A(1) \text{ significa } \tilde{A}(1) \text{ ou } A(1) \\ \\ |\varphi(1)\rangle|\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle \text{ significa } |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \\ \\ A(1)B(2) \text{ significa } A(1) \otimes B(2). \end{cases}$$

Nesta notação ignoraremos o $\otimes$, mas chamaremos a atenção que ele está presente, sempre que houver dúvida. A presença dos índices (1) e (2) é suficiente para indicar produtos tensoriais de operadores e vetores.

- *Autovalores e autovetores de operadores estendidos.*

Suponham conhecidos os autokets e autovalores de uma observável $A(1)$ que atua em $\mathcal{E}_1$. Para simplificar, suponha que o espectro seja discreto, e de acordo com que aprendemos, definido pela equação:

$$A(1)|\varphi_n^i(1)\rangle = a_n|\varphi_n^i(1)\rangle \rightarrow i = 1, 2, ..., g_n.$$

Queremos resolver a equação:

$$A(1)|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \text{ com } |\psi\rangle \in \mathcal{E},$$

onde agora, $A(1)$ representa o operador estendido $(A(1) \otimes \mathbb{1}(2))$.

Equações de Autovalor em Produtos de Espaços

- *Autovalores e autovetores de operadores estendidos (continuação).*

A partir da solução de

$$A(1)|\varphi_n^i(1)\rangle = a_n|\varphi_n^i(1)\rangle \to i = 1, 2, ..., g_n,$$

teremos conhecidos $\begin{cases} \text{os autokets } |\varphi_n^i(1)\rangle \\ \\ \text{os autovalores } a_n \end{cases}$ $\Rightarrow$ isso permite uma solução

imediata da equação de $A(1)|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ com $|\psi\rangle \in \mathcal{E},$ dada por:

$|\psi\rangle = |\varphi_n^i(1)\rangle|\chi(2)\rangle, \forall\ |\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$. Para ver isso, basta calcular

$$A(1)|\psi\rangle = \underbrace{A(1)\big[|\varphi_n^i(1)\rangle|\chi(2)\rangle\big]} = \big[A(1)|\varphi_n^i(1)\rangle\big]|\chi(2)\rangle = \underbrace{a_n|\varphi_n^i(1)\rangle|\chi(2)\rangle},$$

$\boxed{\text{mostra que é uma solução em } \mathcal{E}}$

Qual seria a degenerescência do autovalor a_n? Que tal $g_n N_2,$ onde N_2 é a dimensão de $\mathcal{E}_2$?

Como $\{|\varphi_n^i(1)\rangle\}$ forma uma base em $\mathcal{E}_1,$ uma base em $\mathcal{E}$ pode ser escrita com auxílio de uma base em $\mathcal{E}_2, \{|v_\ell(2)\rangle\},$ por exemplo. A combinação das duas permite escrever $|\psi_n^{i,\ell}\rangle = |\varphi_n^i(1)\rangle|v_\ell(2)\rangle$ como um ket da base em $\mathcal{E}$.

Como $\{|\psi_n^{i,\ell}\rangle\}$ forma uma base de autokets de um operador Hemiteano $A(1)$ em $\mathcal{E},$ podemos dizer que $A(1)$ também é uma observável em $\mathcal{E}$.

Equações de Autovalor em Produtos de Espaços

- *Autovalores e autovetores de operadores estendidos (continuação).*
  - O espectro de $A(1)$ em $\mathcal{E}$ continua o mesmo que era em $\mathcal{E}_1$. A diferença é que em $\mathcal{E}_1, a_n$ tinha degenerescência $g_n,$ mas em $\mathcal{E}, a_n$ é $g_n N_2$-degenerado.
  - Se a_n é simples (não-degenerado) em $\mathcal{E}_1,$ em $\mathcal{E}, a_n$ seria N_2-degenerado.
  - O projetor referente ao subespaço correspondente ao autovalor a_n pode ser escrito por

$$\sum_{i,\ell} |\psi_n^{i,\ell}\rangle\langle\psi_n^{i,\ell}| = \sum_{i,\ell} |\varphi_n^i(1)\rangle\langle\varphi_n^i(1)| \otimes |v_\ell(2)\rangle\langle v_\ell(2)| = \sum_i |\varphi_n^i(1)\rangle\langle\varphi_n^i(1)| \otimes \mathbb{1}(2)$$

  - Note que é apenas uma extensão do projetor $P_n(1) = \sum_i |\varphi_n^i(1)\rangle\langle\varphi_n^i(1)|$ que atua em $\mathcal{E}_1$.

- *Equação de autovalor de $C = A(1) + B(2)$.*

Suponha $\begin{cases} A(1)|\varphi_n(1)\rangle = a_n|\varphi_n(1)\rangle \\ \\ B(2)|\chi_p(2)\rangle = b_p|\chi_p(2)\rangle \end{cases}$ onde $\begin{cases} \text{para simplificar, consideramos} \\ \text{discretos e não-degenerados.} \end{cases}$

$A(1)$ e $B(2)$ comutam, pois atuam em espaços distintos e $|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle$ formam uma base em $\mathcal{E}$ de autokets simultâneos de $A(1)$ e $B(2)$.

Equações de Autovalor em Produtos de Espaços

- *Equação de autovalor de* $C = A(1) + B(2)$ (continuação).

$$\text{Assim}\begin{cases} A(1)|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle = a_n|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle \\ \\ B(2)|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle = b_p|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle \end{cases} \quad \text{e consequentemente}$$

$$C|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle = \big(A(1) + B(2)\big)|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle = (a_n + b_p)|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle.$$

A equação acima mostra que o problema $C|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ está resolvido, onde

$$\text{se nota que}\begin{cases} \{a_n + b_p\} \text{ é o espectro de autovalores } C, \text{ e} \\ \\ |\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle \text{ são autoestados de } C \text{ em } \mathcal{E}. \end{cases}$$

Comentários:

- $\{|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle\}$ forma uma base de autokets de $A(1), B(2),$ e C em $\mathcal{E}$.
- Os autovalores de C são do tipo $c_{n,p} = a_n + b_p$. Se, por exemplo, dois pares distintos produzem o mesmo autovalor, $c_{n,p}$ é bi-degenerado. Se isso não ocorre ele seria não-degenerado. Para o caso bi-degenerado, teríamos a condição $c_{m,q} = c_{n,p}$ e o autoestado correspondente poderia ser escrito por $|\psi\rangle{=}\lambda|\varphi_m(1)\rangle|\chi_q(2)\rangle{+}\mu|\varphi_n(1)\rangle|\chi_p(2)\rangle \neq$ produto tensorial simples.

CCOC em Produtos de Espaços

- Se tivermos CCOC's em $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, veremos que é fácil obter um para $\mathcal{E}$.

$$\text{Por exemplo, considere} \begin{cases} \mathcal{E}_1 \text{ não-degenerado } \rightarrow A(1)|\varphi_n(1)\rangle = a_n|\varphi_n(1)\rangle \\ \\ \mathcal{E}_2 \text{ degenerado } \rightarrow \begin{cases} B(2)|\chi_{pr}(2)\rangle = b_p|\chi_{pr}(2)\rangle \\ C(2)|\chi_{pr}(2)\rangle = c_r|\chi_{pr}(2)\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Como $B(2)$ e $C(2)$ formam um CCOC em $\mathcal{E}_2, |\chi_{pr}(2)\rangle$ é único, a menos de um fator constante. Isto é suficiente para perceber que os 3 números $\{a_n, b_p, c_r\}$ definem o ket $|\varphi_n(1)\rangle|\chi_{pr}(2)\rangle$, a menos de um fator de fase. Assim, como $A(1), B(2)$ e $C(2)$ comutam entre si e são observáveis em $\mathcal{E}$, podemos afirmar que formam um CCOC neste espaço.

Comentários.

- $A(1)$ não é por si só um CCOC em $\mathcal{E}$, pois nele a_n é N_2-degenerado.
- $B(2)$ e $C(2)$ não formam por si só um CCOC em $\mathcal{E}$, pois, nesse espaço, o par $\{b_p, c_r\}$ é N_1-degenerado.
- Generalizável: juntando dois CCOC de $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, obtemos um CCOC em $\mathcal{E}$.

Primeira aplicação: estados de partículas uni- e tri-dimensionais

- Voltamos agora para uma questão de nosso primeiro slide desta aula: Como estão relacionados os espaços $\mathcal{E}_x$ e $\mathcal{E}_{\vec{r}}$?

  $\mathcal{E}_x$ é o espaço de estados de uma partícula unidimensional, associado ao espaço de funções $\varphi(x)$. Nesse espaço, a observável $X,$ por si só, forma um CCOC,

  onde $X|x\rangle = x|x\rangle$ e $\begin{cases} x \text{ é um autovalor do espectro de } X \\ |x\rangle \text{ é o autoket correspondente.} \end{cases}$

  Um ket $|\varphi\rangle$ de $\mathcal{E}_x$ pode ser representado por $\langle x|\varphi\rangle = \varphi(x),$ sendo que em particular quando $|\varphi\rangle = |x_0\rangle,$ temos $\langle x|x_0\rangle = \xi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0).$

- De forma similar podemos construir $\mathcal{E}_y$ e $\mathcal{E}_z$ associados aos espaços de funções $\chi(y)$ e $w(z)$. Nestes casos, Y é um CCOC em $\mathcal{E}_y$ e Z é um CCOC em $\mathcal{E}_z,$ com

  $Y|y\rangle{=}y|y\rangle \begin{cases} y \text{ é autovalor de } Y \\ |y\rangle \text{ é autovetor de } Y \end{cases}$ e $Z|z\rangle{=}z|z\rangle \begin{cases} z \text{ é autovalor de } Z \\ |z\rangle \text{ é autovetor de } Z \end{cases}$

  Sendo que $\begin{cases} \text{na representação } |y\rangle, \text{ em } \mathcal{E}_y, \text{ temos } \Rightarrow \chi(y) = \langle y|\chi\rangle \\ \text{na representação } |z\rangle, \text{ em } \mathcal{E}_z, \text{ temos } \Rightarrow w(z) = \langle z|w\rangle. \end{cases}$

  Em particular, temos $\begin{cases} \text{para } |\chi\rangle = |y_0\rangle \rightarrow \langle y|y_0\rangle = \delta(y - y_0) \\ \text{para } |w\rangle = |z_0\rangle \rightarrow \langle z|z_0\rangle = \delta(z - z_0) \end{cases}$

$\boxed{\textit{Estamos prontos para estudar } \mathcal{E}_{xyz} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z}$

Primeira aplicação: estados de partículas uni- e tri-dimensionais

- Obteremos uma base de $\mathcal{E}_{xyz}$ a partir do produto tensorial entre $\{|x\rangle\}, \{|y\rangle\}$ e $\{|z\rangle\}$. Chamaremos de

$$|x, y, z\rangle = |x\rangle|y\rangle|z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$$

Estes kets que são autokets de $X, Y,$ e Z $\begin{cases} X|x,y,z\rangle = x|x,y,z\rangle \\ Y|x,y,z\rangle = y|x,y,z\rangle \\ Z|x,y,z\rangle = z|x,y,z\rangle \end{cases}$ e formam

uma base em $\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_{xyz}$. Para simplificar, chamaremos $|x, y, z\rangle \equiv |\vec{r}\rangle = |x\rangle|y\rangle|z\rangle$. Um ket genérico de $\mathcal{E}_{\vec{r}},$ fruto de produto tensorial de kets de $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ e $\mathcal{E}_z,$ é dado por $|\varphi\chi w\rangle = |\varphi\rangle|\chi\rangle|w\rangle$. Suas componentes na representação $\{|\vec{r}\rangle\}$ são dadas por $\langle\vec{r}|\varphi\chi w\rangle = \langle x|\varphi\rangle\langle y|\chi\rangle\langle z|w\rangle = \phi(x)\chi(y)w(z)$ (produto simples) Como fica a representação $\{|\vec{r}\rangle\}$ para o caso $|\varphi\chi w\rangle = |x_0, y_0, z_0\rangle$?

$$\boxed{\langle\vec{r}|x_0, y_0, z_0\rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)}$$

Para um caso geral de $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_{\vec{r}},$ podemos escrever suas componentes na representação $\{|\vec{r}\rangle\}$ por $\langle x, y, z|\psi\rangle = \psi(x, y, z),$ onde

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int d^3r \; |x, y, z\rangle\langle x, y, z|\psi\rangle = \int dxdydz \; \psi(x, y, z)|x, y, z\rangle$$

Ainda sobre estados de partículas uni- e tri-dimensionais

- Uma base de $\mathcal{E}_{\vec{r}} = \mathcal{E}_{xyz}$ (continuação)

  Cada um dos operadores, $X, Y,$ e $Z,$ formam um CCOC em seus espaços unidimensionais ($\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y,$ e $\mathcal{E}_z,$ respectivamente), mas em $\mathcal{E}$ seus autovalores (sozinhos) são infinitamente degenerados. Entretanto a trinca (x, y, z) define completamente o ket, $|\vec{r}\rangle,$ a menos de um fator. Portanto, podemos

  dizer que $X, Y,$ e Z das equações $\begin{cases} X|x,y,z\rangle = x|x,y,z\rangle \\ Y|x,y,z\rangle = y|x,y,z\rangle \\ Z|x,y,z\rangle = z|x,y,z\rangle \end{cases}$ formam um COCC.

- Note que poderíamos ter escolhido outras trincas que formam um CCOC

  em $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ $\begin{cases} \{P_x, Y, Z\} \\ \{P_x, Y, P_z\} \\ \{P_x, P_y, P_z\} \\ \{\text{etc}\} \end{cases}$ $\Rightarrow$ pois cada um é CCOC em seu espaço unidimensional.

- Um exemplo importante: $H = H_x + H_y + H_z.$

  Neste exemplo $\begin{cases} H_x \text{ é estendido de } \mathcal{E}_x \\ H_y \text{ é estendido de } \mathcal{E}_y \\ H_z \text{ é estendido de } \mathcal{E}_z \end{cases}$ $\Rightarrow$ e H atua em $\mathcal{E}$.

Sabendo as soluções de cada subespaço, como resolver $H|\psi\rangle = E\psi\rangle$?

Ainda sobre estados de partículas uni- e tri-dimensionais

- Um exemplo importante: $H = H_x + H_y + H_z$ (continuação)

Ou seja, sabendo que $\begin{cases} H_x|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \\ H_y|\chi_p\rangle = E_p|\chi_p\rangle \\ H_z|w_r\rangle = E_r|w_r\rangle \end{cases}$ $\Rightarrow$ a equação $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

tem a seguinte solução $\begin{cases} E = E^{n,p,r} = E_n + E_p + E_r \text{ é o espectro} \\ \text{e os kets } |\varphi_n\rangle|\chi_p\rangle|w_r\rangle \text{ são os autokets.} \end{cases}$

Na representação das coordenadas ($\{|\vec{r}\rangle\}$), as componentes dos autokets são:

$$\langle\vec{r}|\psi^{n,p,r}\rangle = \langle x|\varphi_n\rangle\langle y|\chi_p\rangle\langle z|w_r\rangle = \varphi_n(x)\chi_p(y)w_r(z)$$

Esta solução (produto de funções) é correta sempre que o operador H for separável. Isso ocorre, por exemplo, quando $H = \dfrac{P^2}{2m} + V(\vec{r})$, com $V(\vec{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$. Lembre que na representação das coordenadas cartesianas $\dfrac{P^2}{2m} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\triangle = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Rightarrow$ separável.

Para ilustrar, ainda nesse semestre, estudaremos o oscilador harmônico tridimensional, onde $V = \dfrac{1}{2}m\omega^2R^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2 + Z^2)$

Estado de um sistema de duas partículas

- Considere um sistema físico feito por duas partículas sem spin. Podemos distinguí-las com uso de índices (1) e (2). Para estudar esse sistema, precisamos generalizar o conceito de função de onda do início do curso. Diremos que o estado do sistema pode ser caracterizado por uma função de onda $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$. A interpretação probabilística é dada por:

$$d\mathcal{P}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = C\left|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right|^2 d^3r_1 d^3r_2 \begin{cases} \text{probabilidade de encontrar a partícula} \\ \text{(1) em um volume } d^3r_1 \text{ situado em } \vec{r}_1, \\ \text{e a partícula (2), em um volume } d^3r_2 \\ \text{situado em } \vec{r}_2. \end{cases}$$

C é encontrado forçando que as duas partículas precisam ser "encontradas".

$$\int d\mathcal{P}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int\int C\left|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right|^2 d^3r_1 d^2r_2 = 1 \therefore \frac{1}{C} = \int\int \left|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right|^2 d^3r_1 d^2r_2$$

Agora basta criar $\mathcal{E}_{\vec{r}_1\vec{r}_2} = \mathcal{E}_{\vec{r}_1} \otimes \mathcal{E}_{\vec{r}_2}$

onde $\begin{cases} X_1, Y_1 \text{ e } Z_1 \text{ formam um CCOC em } \mathcal{E}_{\vec{r}_1} \\ X_2, Y_2 \text{ e } Z_2 \text{ formam um CCOC em } \mathcal{E}_{\vec{r}_2} \end{cases}$ e $|\vec{r}_1\rangle|\vec{r}_2\rangle$ é um ket de $\mathcal{E}_{\vec{r}_1\vec{r}_2}$

Um ket produto genérico $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$ tem componentes $\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)$.

No futuro, estudaremos kets gerais $\Rightarrow \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle\vec{r}_1, \vec{r}_2|\psi\rangle$.