

1) Dinâmica de uma partícula pontual

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Se o problema é um sistema de n partículas, vale

$$\vec{F}_i = m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

Se todas as forças puderem ser derivadas de um potencial, a equação fica

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i V,$$

onde

$$V = \sum_i^n V_i(\vec{r}_i) + \sum_{i < j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \equiv V(\vec{r}_i)$$

Em coordenadas cartesianas, o movimento do sistema é descrito por $3n$ equações diferenciais

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \end{cases}$$

2) Monta-se uma Lagrangeana. Como? De forma que ela produza as equações de Newton corretas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \Rightarrow \text{Equações de Lagrange.}$$

Se o problema é um sistema de uma partícula (vale para n partículas também), sob ação de uma força derivada de uma energia potencial $V(\vec{r}_i)$, a forma da Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_i^n \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_i) \right\}$$

Esta Lagrangeana gera as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \rightarrow m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{dV(\vec{r}_i)}{dx_i},$$

equivalentes às (como esperado) equações de Newton do sistema.

Momento conjugado da coordenada generalizada

3) Define-se o momento conjugado da coordenada generalizada q_i por

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

onde p_i e q_i são variáveis dinâmicas fundamentais (coordenadas canônicas).

Para o caso do slide anterior, o momento canônico é dado por: $p_{x_i} = m\dot{x}_i$.

As coordenadas canônicas viram operadores na Mecânica Quântica.

$$\text{Nem sempre } \mathcal{L} = T - V$$

Se o problema é de uma partícula que está sob a ação de uma força de Lorentz

$$\vec{F} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)],$$

a Lagrangeana que fornece a equação de Newton para esta força é

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - qU(\vec{r}, t),$$

onde $\vec{A}(\vec{r}, t)$ é um potencial vetor $\longrightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$

e $U(\vec{r}, t)$ é um potencial escalar $\longrightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Ambos os potenciais $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e $U(\vec{r}, t)$ podem depender explicitamente de t . Para esta Lagrangeana, encontramos o momento canônico:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}(\vec{r}, t).$$

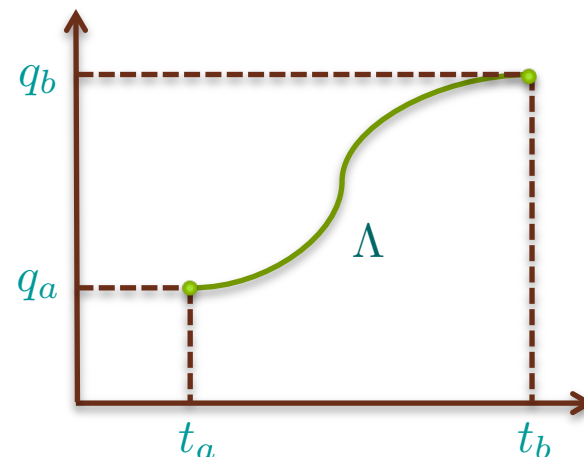
Princípio de Mínima Ação

4) O princípio de mínima ação pode ser escrito como:

“De todos os caminhos (Λ) possíveis no espaço-tempo conectando (q_a, t_a) com (q_b, t_b) , o caminho que realmente é seguido, é aquele para o qual a ação é mínima”.

A ação é definida por:

$$S_\Lambda = \int_{t_a}^{t_b} dt \underbrace{\mathcal{L}(q_\Lambda(t), \dot{q}_\Lambda(t); t)}_{\text{Lagrangiana}}$$



onde, o integrando depende apenas de t . Para escrever a ação, é preciso conhecer a dependência temporal de $q_\Lambda(t)$ e $\dot{q}_\Lambda(t)$ e colocá-los na expressão da Lagrangeana. O par $q_\Lambda(t)$ e $\dot{q}_\Lambda(t)$ define uma trajetória Λ da partícula. Em outras palavras, se escolhermos Λ' infinitesimalmente próxima de Λ , a trajetória correta, a variação $\delta S_\lambda = S_{\Lambda'} - S_\Lambda$ é nula, em primeira ordem.

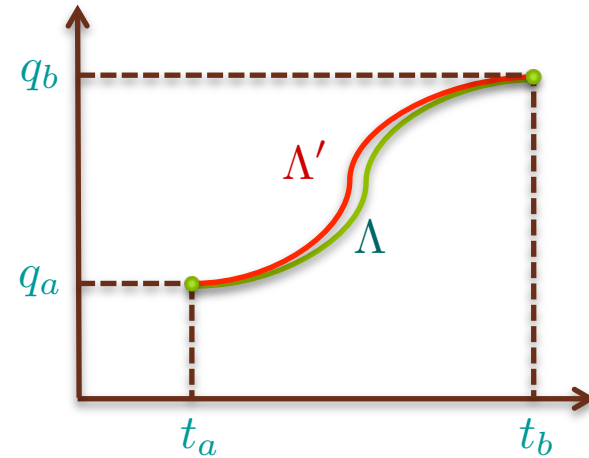
As equações de Lagrange nascem do Princípio de Mínima Ação

Vamos ver como as equações de Lagrange podem ser deduzidas do princípio de mínima ação. Suponha Λ' um caminho infinitesimalmente diferente de Λ . Para construir Λ' é preciso manter fixos os pontos $q_a(t_a)$ e $q_b(t_b)$.

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t) \rightarrow \text{mas, com } \delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$$

$$\text{Com isso } \frac{dq'(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt} + \frac{d\delta q(t)}{dt} \text{ ou}$$

$$\dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + \frac{d\delta q(t)}{dt} \rightarrow \delta \dot{q} = \frac{d\delta q(t)}{dt}$$



A variação da ação com a mudança de Λ para Λ' pode ser calculada, pois:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_a}^{t_b} dt \delta \mathcal{L} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} dt \delta q \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \end{aligned}$$

= 0 para qualquer variação arbitrária de δq . Só se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$ que

é a equação de Lagrange. Fiz para q , mas poderia ter feito para q_i .

A Hamiltoniana

5) Define-se a Hamiltoniana: $\mathcal{H} = \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \mathcal{L}$. Em seguida, reescreve-se a

Hamiltoniana em função das coordenadas canônicas, isto é: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{r}_i, \vec{p}_i; t)$.

Na Mecânica Quântica, a Hamiltoniana, escrita desta forma, em função das coordenadas canônicas, define o operador de evolução temporal. Exemplos:

a) Se $\mathcal{L} = T - V = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_i) \right\}$

temos
$$\begin{cases} \vec{p}_i = m \dot{\vec{r}}_i \\ \mathcal{H} = \sum_i \left\{ \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right\} \end{cases}$$

b) Se $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - qU(\vec{r}, t)$

temos
$$\begin{cases} \vec{p} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q \vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + qU(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Equações de Hamilton-Jacobi

6) Novas equações, equivalentes às de Lagrange, e conhecidas por equações de Hamilton-Jacobi são definidas, a partir da Hamiltoniana.

$$\text{Mesmo problema, novas equações: } \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Para demonstrar a equivalência, construa e compare os diferenciais de \mathcal{H} , pela sua definição $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ e pela exigência de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.

$$\text{Assim, temos: } \begin{cases} d\mathcal{H} = \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - d\mathcal{L} \rightarrow \text{da definição acima} \\ d\mathcal{H} = \sum_i dp_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \sum_i dq_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \rightarrow \text{de } \mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i; t) \end{cases}$$

Equações de Hamilton-Jacobi

$$\begin{aligned}
 \text{Assim, } d\mathcal{H} &= \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - d\mathcal{L} = \\
 &= \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right] = \\
 &= \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right] = \\
 &= \sum_i dp_i \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad \text{que por comparação com} \\
 &= \sum_i dp_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \sum_i dq_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

fornece as equações

$$\begin{cases}
 1) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\
 2) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (\text{primeira equação}) \\
 3) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}
 \end{cases}$$

Das equações de Lagrange, da definição de $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, e equação 1, temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \rightarrow \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (\text{segunda equação}).$$

Descrição clássica e expectativas da descrição quântica

A descrição clássica pode ser resumida da seguinte forma:

- O estado clássico do sistema para um certo instante t_0 é definido por
$$\begin{cases} q_i(t_0) \\ p_i(t_0) \\ i=1, \dots, N \end{cases}$$
- No instante t_0 , qualquer grandeza física pode ser determinada e sua medida prevista, se estas N coordenadas q_i e N coordenadas p_i forem conhecidas neste instante.
- Com \mathcal{H} , o futuro é conhecido. Basta resolver as equações de Hamilton-Jacobi:

Se soubermos $\begin{cases} q_i(t_0) \\ p_i(t_0) \end{cases}$ saberemos de forma única $\begin{cases} q_i(t) \\ p_i(t) \end{cases}$

Para a descrição quântica tentaremos responder as seguintes questões:

- Como é a descrição matemática do estado de um sistema quântico em um dado instante?
- Dado esse estado, como podemos prever o resultado de medidas de quantidades físicas interessantes?
- Como o estado evolui com o tempo?

Roteiro: (1) Postulados; (2) Interpretação física; (3) Consequências.

Os Postulados da Mecânica Quântica

• 1º Postulado:

Em um dado instante t_0 o estado de um sistema físico é definido por um ket $|\psi(t_0)\rangle$ pertencente ao espaço \mathcal{E} .

Comentário(s):

- No início do curso o estado era $\psi(\vec{r}) \in \mathfrak{F}$. Depois introduzimos os kets $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_{\vec{r}}$, onde $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$ era apenas a representação de $|\psi\rangle$ no espaço das coordenadas. \mathcal{E} é o espaço $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ estendido para descrever qualquer problema de interesse (com spin, de muitos corpos, etc.)
- Vale o princípio da superposição: uma combinação linear de vetores estados é um vetor estado.

• 2º Postulado:

Toda quantidade física mensurável A é descrita por um operador A que age em \mathcal{E} ; Este operador é uma observável.

Comentário(s):

- Um bom exemplo é a quantidade física energia (Hamiltoniana), \mathcal{H} , descrita pelo operador H (a Hamiltoniana do sistema).

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários (continuação):

- O operador Hamiltoniana do sistema, H , é escrito em termos dos operadores \vec{R} e \vec{P} . Por exemplo, a Hamiltoniana clássica de uma partícula sujeita à um potencial $V(\vec{r})$ é dada por $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$, e na Mecânica Quântica vira o operador

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{R}).$$

- Os operadores \vec{R} e \vec{P} , descrevem quantidades físicas mensuráveis, relacionadas às coordenadas canônicas, posição e momento, respectivamente.
- Outros operadores, como os de momento angular orbital e momento angular intrínseco (quantidade física chamada spin), serão apresentados brevemente.

- **3º Postulado:**

O único resultado possível da medida de uma quantidade física \mathcal{A} é um dos autovalores da observável correspondente A .

Comentários:

- A medida de \mathcal{A} é sempre um número real, pois A é Hermiteano.

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários (continuação):

- Se o espectro de A é discreto, os resultados que podem ser obtidos medindo A são quantizados.

Princípio da Decomposição espectral.

Pode-se dizer que isso seria a generalização do problema de fótons polarizados.

Considere o sistema no estado $|\psi\rangle$, tal que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. O resultado da medida de \mathcal{A} associado à A (observável) é um dos autovalores e achá-lo, como no caso de fótons polarizados, tem sentido probabilístico. Para o caso discreto,

$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$ com $\sum_n |u_n\rangle\langle u_n| = \mathbb{1} \rightarrow A$ é observável. Podemos escrever

$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_n |u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle = \sum_n c_n|u_n\rangle$. Defina: $\mathcal{P}(a_n) = |c_n|^2 = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$.

- 4º Postulado** (espectro discreto não degenerado):

Quando A é medida em um sistema em um estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de obter o autovalor não degenerado a_n da observável correspondente A é $\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$, onde $|u_n\rangle$ é o autovetor normalizado de A com autovalor a_n .

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários:

- Se o espectro de A é discreto e degenerado, poderíamos escrever

$$A|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle \text{ com } i = 1, \dots, g_n \text{ e } \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| = \mathbb{1} \text{ e } \therefore$$

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle. \text{ Neste caso, defina:}$$

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_i^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_i^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2 \text{ e rescreva o postulado.}$$

- 4º Postulado** (espectro discreto):

Quando A é medida em um sistema em um estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de obter o autovalor a_n , com degenerescência g_n , da

observável correspondente A é $\mathcal{P}(a_n) = \sum_i^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2$, onde o conjunto $\{|u_n^i\rangle\}$

compõe o subespaço \mathcal{E}_n (de dimensão g_n) de autovetores normalizados de A com autovalor a_n .

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários:

- É natural que $\mathcal{P}(a_n) = \sum_i^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_i^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$ não dependa da base escolhida

em \mathcal{E}_n . Para perceber isso, lembre que $|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$ e que os c_n^i que aparecem em $\mathcal{P}(a_n)$ são os mesmos que aparecem nessa expansão.

Assim, poderíamos escrever $|\psi_n\rangle = \sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$ como sendo o pedaço de $|\psi\rangle$

em \mathcal{E}_n . Isso permite definir um projetor em \mathcal{E}_n dado por $P_n = \sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i |$ de

tal forma que $|\psi_n\rangle = P_n|\psi\rangle$. Note que $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \sum_i^{g_n} |c_n^i|^2 = \mathcal{P}(a_n)$, ou seja, a

probabilidade de encontrar a_n é o quadrado da norma de $|\psi_n\rangle = P_n|\psi\rangle$. Note que a norma de um ket independe da representação. Podemos ainda escrever

$\mathcal{P}(a_n) = \langle \psi | P_n^\dagger P_n | \psi \rangle$ e isso fornece $\mathcal{P}(a_n) = \langle \psi | P_n | \psi \rangle$. Para fazer uma mudança

de base, usaremos $\mathbb{1}^{(t)} = \sum_n \sum_j^{g_n} |t_n^j\rangle \langle t_n^j |$ nesta expressão.

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários (continuação):

Com $\mathbb{1}^{(t)} = \sum_n \sum_j^{g_n} |t_n^j\rangle\langle t_n^j|$, podemos escrever

$$P_n = \mathbb{1}^{(t)} \left(\sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| \right) \mathbb{1}^{(t)} = \sum_{n'} \sum_j^{g_{n'}} |t_{n'}^j\rangle\langle t_{n'}^j| \left(\sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| \right) \sum_{n''} \sum_k^{g_{n''}} |t_{n''}^k\rangle\langle t_{n''}^k|$$

Como os kets $|u_n^i\rangle$, $|t_{n'}^j\rangle$ e $|t_{n''}^k\rangle$ são autokets do mesmo operador, sabemos que são ortogonais a menos que $n'' = n' = n$. Isso permite escrever

$$P_n = \sum_j^{g_n} |t_n^j\rangle\langle t_n^j| \left(\sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| \right) \sum_k^{g_n} |t_n^k\rangle\langle t_n^k| = \sum_{ijk}^{g_n} |t_n^j\rangle \underbrace{S_{ji}^{(n)\dagger} S_{ik}^{(n)}}_{\delta_{jk} \text{ e } S \text{ bloco diagonal}} \langle t_n^k| = \sum_j^{g_n} |t_n^j\rangle\langle t_n^j|$$

δ_{jk} e S bloco diagonal

o No caso de um espectro contínuo, teríamos $A|v_\alpha\rangle = \alpha|v_\alpha\rangle$ e $\mathbb{1} = \int d\alpha |v_\alpha\rangle\langle v_\alpha|$.

Isso permite escrever $|\psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha)|v_\alpha\rangle$ com $c(\alpha) = \langle v_\alpha|\psi\rangle$. Com isso, define-se

$d\mathcal{P}(\alpha) = \rho(\alpha)d\alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{probabilidade de encontrar um valor incluído entre } \alpha \text{ e } \alpha + d\alpha, \\ \text{onde } \rho(\alpha) = |c(\alpha)|^2 = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2 \text{ é a densidade de probabilidade.} \end{array} \right.$

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

- **4º Postulado** (espectro contínuo não-degenerado):

Quando a quantidade física \mathcal{A} é medida em um sistema que está em um estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $d\mathcal{P}(\alpha)$ de obter um resultado entre α e $\alpha+d\alpha$ é igual a $d\mathcal{P}(\alpha)=\rho(\alpha)d\alpha=|\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2d\alpha$, onde $|v_\alpha\rangle$ é um autovetor correspondendo ao autovalor α da observável A associada com \mathcal{A} .

Comentários sobre as 3 versões do postulado 4:

- Quanto vale $\sum_n \mathcal{P}(a_n)$? e $\int d\mathcal{P}(\alpha) = \int d\alpha \rho(\alpha)$?
- Como $\mathcal{P}(a_n) = \sum_i^{g_n} |c_n^i|^2 = \sum_i^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2 = \sum_i^{g_n} \langle \psi|u_n^i\rangle\langle u_n^i|\psi\rangle$, temos

$$\sum_n \mathcal{P}(a_n) = \langle \psi | \left(\sum_n \sum_i^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{1} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Isso está de acordo com nossas expectativas: uma medida de \mathcal{A} fornece necessariamente um dos autovalores de A . Portanto, a soma das probabilidades de encontrar um deles é igual à 1. Repita o procedimento e mostre que

$$\int d\mathcal{P}(\alpha) = \int d\alpha \rho(\alpha) = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários sobre as 3 versões do postulado 4 (continuação):

- o Como $\sum_n \mathcal{P}(a_n) = \int d\mathcal{P}(\alpha) = \langle \psi | \psi \rangle$, para garantir que a soma sobre todo o

espectro seja 1, basta redefinir $\begin{cases} d\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\langle \psi | \psi \rangle} |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha \\ \mathcal{P}(a_n) = \frac{1}{\langle \psi | \psi \rangle} \sum_i^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2 \end{cases} \Rightarrow \text{vale } \forall \langle \psi | \psi \rangle$

- o Sempre consideraremos $|\psi\rangle$ como uma combinação de autovetores de A , \therefore é essencial que A seja uma observável.
- o Note que poderíamos ter feito casos mais gerais misturando espectros discretos e contínuos.
- o Tenho dito sistematicamente que constantes multiplicativas não modificam a informação física contida no ket. O postulado 4 permite entender melhor esta afirmação. Primeiro considere dois kets $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ igualmente normalizados, mas diferindo por uma fase $|\psi'\rangle = e^{i\theta} |\psi\rangle$, onde θ é um número real. Primeiro note

que $\begin{cases} \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | e^{-i\theta} e^{i\theta} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \\ |\langle u_i | \psi' \rangle|^2 = |\langle u_i | e^{i\theta} | \psi \rangle|^2 = |\langle u_i | \psi \rangle|^2 \end{cases}$ e conclua que $\mathcal{P}(a_n)$ dá o mesmo

resultado para $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$. Isso vale também para $|\psi'\rangle = c|\psi\rangle$.

Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários sobre as 3 versões do postulado 4 (continuação):

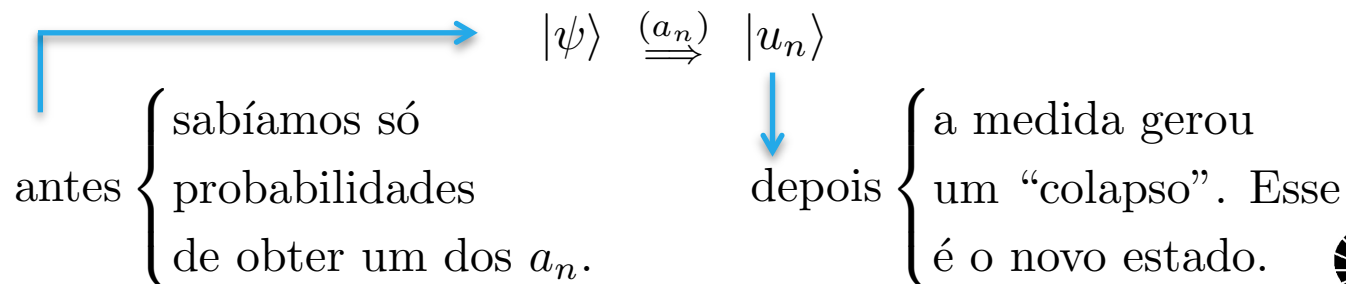
- Assim, dois estados que diferem por um fator complexo representam o mesmo estado físico. Seja cuidadoso com esse conceito, pois $|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$ e $|\phi\rangle = \lambda_1e^{i\theta_1}|\psi_1\rangle + \lambda_2e^{i\theta_2}|\psi_2\rangle$ são distintos, a menos que $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$, com n inteiro, pois nesse caso $|\psi\rangle = e^{i\theta_1}|\phi\rangle$. Conclui-se que:

Um fator de fase global não afeta as previsões físicas, mas as fases relativas dos coeficientes de uma expansão são significativas.

- Redução do pacote de onda devido à uma medida**

- Caso espectro discreto (inspirados nos experimentos de ótica):

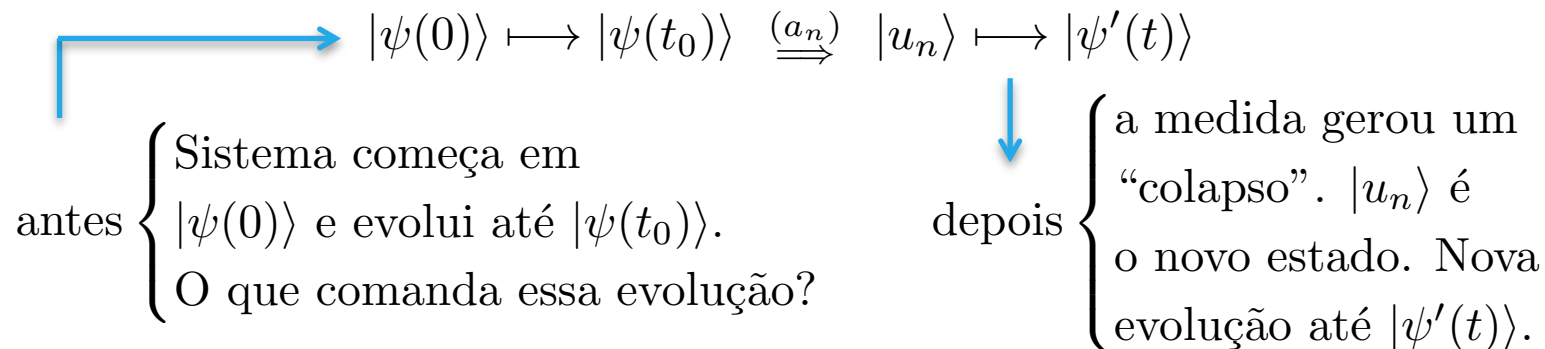
Suponha que o sistema esteja em um estado qualquer $|\psi\rangle$, quando se faz uma medida da quantidade física \mathcal{A} e um dos autovalores a_n da observável A é obtido. Representamos isso por:



Os Postulados: medidas e resultados possíveis.

Comentários: preparação para o postulado 5:

- A figura do slide anterior representa o 5o. postulado. De fato, a situação que desejamos estudar é um pouco mais complexa e poderia ser representada por:



- Caso fizéssemos outra medida imediatamente após t_0 (sem dar tempo do estado evoluir), encontraríamos a_n .

- Se a_n fosse degenerado, escreva o estado por $|\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{(a_n)} \sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \text{ normalizado para } \frac{1}{\sqrt{\sum_i^{g_n} |c_n^i|^2}} \sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$$

- Note que $\sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle = |\psi_n\rangle$ é a projeção de $|\psi\rangle$ sobre \mathcal{E}_n (subespaço dos

autovetores com autovalor a_n . Resumindo: $|\psi\rangle \xrightarrow{(a_n)} \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}}$

A medida gerando um colapso.

● 5º Postulado:

Se a medida de uma quantidade física A sobre o sistema em um estado $|\psi\rangle$ dá o resultado a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção

normalizada, $\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$, de $|\psi\rangle$ sobre o subespaço associado com a_n .

Comentários

- Note que após a medida, o novo estado é um autoestado de A com autovalor a_n .
- Não é qualquer estado. É a projeção de $|\psi\rangle$ em \mathcal{E}_n .
- Considere $g_n = 1$.

Após a medida, teríamos $\frac{c_n}{|c_n|}|u_n\rangle = e^{i \arg c_n}|u_n\rangle \rightarrow$ mesmo que $|u_n\rangle$.

*Estamos prontos para estudar a evolução temporal do sistema.
Conforme esperado a Hamiltoniana terá papel especial. A partir da próxima aula, estudaremos*

$$|\psi(0)\rangle \xrightarrow{H} |\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{(a_n)} |u_n\rangle \xrightarrow{H} |\psi'(t)\rangle$$