

Compatibilidade de observáveis

- Sejam A e B , tais que $[A, B] = 0$

Já vimos que \exists um conjunto completo de kets, $\{|a_n, b_p, i\rangle\}$,

$$\text{tais que } \begin{cases} A|a_n, b_p, i\rangle = a_n|a_n, b_p, i\rangle \\ B|a_n, b_p, i\rangle = b_p|a_n, b_p, i\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{o índice } i \text{ serve para distinguir} \\ \text{vetores } |a_n, b_p, i\rangle \text{ com o mesmo} \\ \text{par de autovalores } a_n \text{ e } b_p. \end{cases}$$

- Estas duas observáveis que podem ser determinadas simultaneamente são ditas compatíveis.
- Se A e B não comutam, um estado $|\psi\rangle$ com autovalor a_n pode não ser um autoestado de B . De fato, mesmo que exista um ou outro estado que seja simultaneamente autoestado de A e B , ou até mesmo, um subconjunto de autoestados simultâneos de A e B , sabemos que não existe uma base completa, pois como já provamos, se existisse, os operadores comutariam. A e B são ditos incompatíveis.
- Examinaremos com algum cuidado o caso de observáveis compatíveis. Suponha um estado inicial igual à: $|\psi\rangle = \sum_{n,p,i} C_{n,p,i} |a_n, b_p, i\rangle$

O que poderíamos fazer em termos de medidas? Para começar, mediremos A e depois B . Em seguida, mediremos B e depois A .

Compatibilidade de observáveis

- Sabendo que o estado inicial, imediatamente antes da medida, é $|\psi\rangle$, vamos medir \mathcal{A} e em seguida \mathcal{B} .
- Medindo $\mathcal{A} \rightarrow$ probabilidade de obter a_n é $\mathcal{P}(a_n) = \sum_{p',i} |C_{n,p',i}|^2$ e o estado,

imediatamente após a medida, já normalizado, fica

$$|\psi'_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{p',i} |C_{n,p',i}|^2}} \sum_{p',i} C_{n,p',i} |a_n, b_{p',i}\rangle$$

- Estando o sistema em $|\psi'_n\rangle$, quanto vale a probabilidade de, ao medir \mathcal{B} , obter b_p ? que tal $\mathcal{P}_{a_n}(b_p) = \sum_i \left| \frac{C_{n,p,i}}{\sqrt{\sum_{p',i'} |C_{n,p',i'}|^2}} \right|^2 = \frac{\sum_i |C_{n,p,i}|^2}{(\sum_{p',i'} |C_{n,p',i'}|^2)}$
- Quanto vale a probabilidade de se obter o par a_n, b_p ? Que tal:

$$\mathcal{P}(a_n, b_p) = \mathcal{P}(a_n) \mathcal{P}_{a_n}(b_p) = \sum_i |C_{n,p,i}|^2$$

- Após as duas medidas, qual é o estado final do sistema? Que tal:

$$|\psi''_{n,p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i'} |C_{n,p,i'}|^2}} \sum_i C_{n,p,i} |a_n, b_p, i\rangle$$

- Se medirmos \mathcal{A} ou \mathcal{B} de novo, o que obtemos? a_n ou b_p .

Compatibilidade de observáveis

- Sabendo que o estado inicial, imediatamente antes da medida, é $|\psi\rangle$, vamos agora medir \mathcal{B} e em seguida \mathcal{A} .

- medindo $\mathcal{B} \rightarrow$ probabilidade de obter b_p é $\mathcal{P}(b_p) = \sum_{n',i} |C_{n',p,i}|^2$ e o estado,

imediatamente após a medida, já normalizado, fica

$$|\varphi'_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n',i'} |C_{n',p,i'}|^2}} \sum_{n'',i} C_{n'',p,i} |a_{n''}, b_p, i\rangle$$

- Estando o sistema em $|\varphi'_p\rangle$, quanto vale a probabilidade de, ao medir \mathcal{A} ,

$$\text{obter } a_n? \text{ que tal } \mathcal{P}_{b_p}(a_n) = \sum_i \left| \frac{C_{n,p,i}}{\sqrt{\sum_{n',i'} |C_{n',p,i'}|^2}} \right|^2 = \frac{\sum_i |C_{n,p,i}|^2}{\left(\sum_{n',i'} |C_{n',p,i'}|^2\right)}$$

- Quanto vale a probabilidade de se obter o par b_p, a_n ? Que tal:

$$\mathcal{P}(b_p, a_n) = \mathcal{P}(b_p) \mathcal{P}_{b_p}(a_n) = \sum_i |C_{n,p,i}|^2 = \mathcal{P}(a_n, b_p) \text{ (ver slide anterior)}$$

- Após as duas medidas, qual é o estado final do sistema? Que tal:

$$|\varphi''_{p,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i'} |C_{n,p,i'}|^2}} \sum_i C_{n,p,i} |a_n, b_p, i\rangle = |\psi'_{n,p}\rangle \text{ (ver slide anterior)}$$

Se $[A, B] = 0$ medir A e depois B é o mesmo que medir B e depois A .

Incompatibilidade de observáveis

- Conclusões adicionais sobre o caso $[A, B] = 0$.
 - A medida de B não destrói a informação causada pela medida anterior de A . E vice-versa. Tanto que se medirmos A novamente, continuamos a obter a_n .
 - A e B podem ser medidos em qualquer ordem e até simultaneamente.
- Suponha agora que $[A, B] \neq 0$. Como a medida de A afeta a medida de B ?
 - Para entender isso, considere um espaço vetorial bidimensional real (só para facilitar), tal que

$$\begin{cases} \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\} \text{ autokets de } A \text{ com autovalores } a_1 \text{ e } a_2 \\ \{|v_1\rangle, |v_2\rangle\} \text{ autokets de } B \text{ com autovalores } b_1 \text{ e } b_2 \end{cases}$$
 - Como $[A, B] \neq 0$, sabemos que esse dois pares necessariamente não coincidem. A figura representa essa situação.

As projeções indicam $\left\{ \begin{array}{l} \text{as chances de se} \\ \text{obter um resultado} \end{array} \right.$

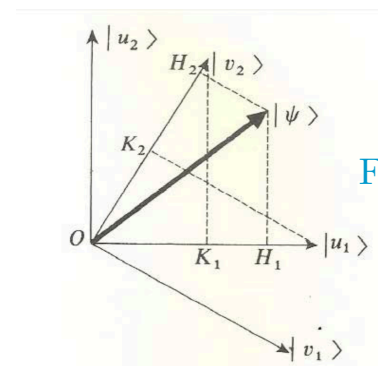


Fig.3, Cap.3 do texto

- Suponha os seguintes processos de medida (para obter o par a_1 e b_2) :

$$\text{A partir de } |\psi\rangle, \text{ meça } A \text{ e } B \text{ ou meça } B \text{ e } A \left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle \xrightarrow{(a_1)} |u_1\rangle \xrightarrow{(b_2)} |v_2\rangle \\ |\psi\rangle \xrightarrow{(b_2)} |v_2\rangle \xrightarrow{(a_1)} |u_1\rangle \end{array} \right.$$

Incompatibilidade de observáveis

- Suponha agora que $[A, B] \neq 0$ (continuação).
- Quanto valem as probabilidades, $\mathcal{P}(a_1, b_2)$ (mede \mathcal{A} e em seguida mede \mathcal{B}) e $\mathcal{P}(b_2, a_1)$ (mede \mathcal{B} e em seguida mede \mathcal{A})? A figura do slide anterior, indica

as seguintes probabilidades

$$\begin{cases} \mathcal{P}(a_1, b_2) = |OH_1|^2 \times |OK_2|^2 \\ \mathcal{P}(b_2, a_1) = |OH_2|^2 \times |OK_1|^2 \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} |OK_1| = |OK_2| \\ |OH_1| \neq |OH_2| \end{cases}$$

salvo casos especiais

- Note que a segunda medida destrói a “seleção” da primeira medida. No nosso exemplo, ao medir \mathcal{A} e encontrar a_1 , o estado do sistema colapsa para $|u_1\rangle$. Se voltássemos a medir \mathcal{A} encontraríamos a_1 com 100% de chances. Se, entretanto, após obter a_1 , medíssemos \mathcal{B} e encontrássemos b_2 , o sistema colapsaria de $|u_1\rangle$ para $|v_2\rangle$. Uma nova medida de \mathcal{A} não teria 100% de chances de encontrar a_1 e a destruição da seleção inicial criaria chances não nulas de encontrar a_2 .
- A ordem das medidas (\mathcal{A} e \mathcal{B} ou \mathcal{B} e \mathcal{A}) faz diferença (o sistema fica em estados diferentes, não colineares) e não tem sentido falar em medidas simultâneas.

Supomos que o sistema estava no estado $|\psi\rangle$. Como prepará-lo assim?

Preparação de um estado

- Considere que A tem espectro discreto. Suponha que o sistema esteja no estado inicial $|\psi\rangle$ e meça \mathcal{A} . Consideraremos a_n não-degenerado e degenerado.

- *Caso não-degenerado.*

Se a_n é não-degenerado, o estado imediatamente após a medida é $|u_n\rangle$. Lembre que os autokets da observável A formam um conjunto completo e $|\psi\rangle$ pode ser

escrito por $|\psi\rangle = \sum_{n'} \sum_{i=1}^{g_{n'}} |u_{n'}^i\rangle \langle u_{n'}^i | \psi \rangle$, onde para a_n não-degenerado $g_n = 1$.

Imediatamente após a medida de \mathcal{A} , o sistema no estado $|\psi\rangle$ colapsa para um

ket colinear com $|u_n^1\rangle \langle u_n^1 | \psi \rangle$, que se normalizado tem a forma $\frac{c_n^1}{|c_n^1|} |u_n^1\rangle$. Este ket

é uma fase vezes o ket $|u_n^1\rangle$. Ou seja, qualquer que fosse o $|\psi\rangle$, se medíssemos a_n não-degenerado, obteríamos o mesmo ket $|u_n^1\rangle$ a menos de uma fase global. Em

outras palavras, a medida de \mathcal{A} , prepara o sistema de forma única (em $|u_n^1\rangle$), se o autovalor correspondente for não-degenerado.

- *Caso degenerado.*

Se a_n é degenerado, ao medir \mathcal{A} , o sistema que estava em $|\psi\rangle$ colapsa para

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_i |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2}} \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i | \psi \rangle \Rightarrow \text{esse resultado depende de } |\psi\rangle!$$

Aula 14 ○ *Caso degenerado (continuação).*

Suponha que exista \mathcal{B} , tal que $[A, B] = 0$. Sabemos que B é bloco diagonal no subespaço \mathcal{E}_n (de autokets de A com autovalor a_n). Suponha que ao diagonalizar B encontremos autovalores distintos dentro de \mathcal{E}_n . Isso permite escrever $|\psi\rangle$ na forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{n'} \sum_{p'} \sum_{i=1}^{g_{n',p'}} |a_{n'}, b_{p'}, i\rangle \langle a_{n'}, b_{p'}, i | \psi \rangle \text{ onde estamos considerando que } g_{n,p} = 1$$

★ Nesta nova base ao medir \mathcal{A} e encontrar a_n , o estado colapsa para

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{p'} \sum_{i=1}^{g_{np'}} |\langle a_n, b_{p'}, i | \psi \rangle|^2}} \sum_{p'} \sum_{i=1}^{g_{np'}} |a_n, b_{p'}, i\rangle \langle a_n, b_{p'}, i | \psi \rangle \Rightarrow \text{onde a soma}$$

em p e i correspondem à soma em i do slide anterior (só kets dentro de \mathcal{E}_n).

Havendo degenerescência, o resultado do colapso depende de $|\psi\rangle$.

★ Se medirmos \mathcal{B} e encontrarmos b_p , o que acontece com $|\psi_n\rangle$? Que tal

$$|\psi_{np}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_{np}} |\langle a_n, b_p, i | \psi \rangle|^2}} \sum_{i=1}^{g_{np}} |a_n, b_p, i\rangle \langle a_n, b_p, i | \psi \rangle$$

★ Se $g_{np} = 1 \Rightarrow |\psi_{np}\rangle = e^{i\alpha} |a_n, b_p, 1\rangle$ e não depende de $|\psi\rangle$. Assim,

se $\{A, B\}$ é um CCOC, a medida de A e B prepara $e^{i\alpha} |a_n, b_p\rangle$

Preparação de um estado

- *Caso degenerado (continuação).*
- ★ Se $g_{np} \neq 1$, $\{A, B\}$ não é um CCOC. Escolha C que comute com ambos. Repita o procedimento e conclua:
- ★ Se $\{A, B, C\}$ é um CCOC, as medidas de A (obtendo a_n), B (obtendo b_p) e C (obtendo c_r) preparam o sistema em $e^{i\beta}|a_n, b_p, c_r\rangle$, Ou, se preferir, causam o colapso de $|\psi\rangle$ para $e^{i\beta}|a_n, b_p, c_r\rangle$, de forma única (a menos de uma fase global). Ou, em outras palavras, caso as medidas de \mathcal{A} , \mathcal{B} , e \mathcal{C} forneçam a_n, b_p e c_r , respectivamente, o sistema é colapsado para $e^{i\beta}|a_n, b_p, c_r\rangle$ independente do estado inicial $|\psi\rangle$. Só β depende do estado inicial e como vimos fases globais não alteram a informação física de um ket.
- ★ Se $\{A, B, C\}$ não é um CCOC, adicione D, E, \dots etc., até formar um COOC.

O estado de um sistema fica completamente definido (de forma única e a menos de uma fase global) por meio dos resultados obtidos com um CCOC. Se o conjunto de observáveis for dado por $\{A, B, C, D, \dots\}$, o estado final seria $e^{i\gamma}|a_n, b_p, c_r, d_k \dots\rangle$.

Implicações físicas da Equação de Schrödinger

- Propriedades gerais
 - *Determinismo na mecânica quântica.*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

- ★ A equação é de primeira ordem em $t \Rightarrow$ dado $|\psi(t_0)\rangle$, $|\psi(t)\rangle$ é determinado. Uma vez conhecida a Hamiltoniana, a evolução temporal do estado é única. Na mecânica clássica a trajetória (posição e momento da partícula) estaria definida, na mecânica quântica, a todo instante, o estado estaria definido pela solução da equação de Schrödinger. Neste sentido o determinismo continua valendo.
- ★ O indeterminismo está na medida: exceto em condições especiais, temos apenas probabilidades de encontrar um certo resultado e, de um modo geral, não é possível prever, para qual estado o sistema colapsará após a medida.
- ★ Entre duas medidas, o estado evolui de forma determinística.

Implicações físicas da Equação de Schrödinger

- *Princípio da superposição.*

Se $|\psi_1(t)\rangle$ e $|\psi_2(t)\rangle$ são duas soluções da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

podemos dizer que se o estado inicial for $\lambda_1 |\psi_1(t_0)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t_0)\rangle$, no instante t , ele será $\lambda_1 |\psi_1(t)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t)\rangle$.

- ★ Aqui residem as explicações sobre os resultados da experiência de interferência e difração de um feixe de partículas atirado contra duas fendas, para posterior detecção das partículas em um filme fotográfico sobre um anteparo. As franjas de interferência são decorrentes da onda passar pelas duas fendas. Pense em $|\psi_1(t_0)\rangle$ como a solução em que a partícula, em t_0 , passa pela fenda 1 e $|\psi_2(t_0)\rangle$ como a solução onde, em t_0 , a partícula passa pela fenda 2. Na solução dada por $\lambda_1 |\psi_1(t)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t)\rangle$, em t a partícula chega ao anteparo, mas pode ter passado por qualquer uma das fendas em t_0 . Ver a discussão feita na primeira aula desta disciplina e no artigo:

- ★ **Quantum “Ghosts”**, Gabriela M. Amaral, David Q. Aruquipa, Ludwing F. M. Camacho, Luiz F. C. Faria, Sofía I. C. Guzmán, Damaris T. Maimone, Melissa Mendes, and Marco A. P. Lima, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. **38**, n^o 3, e3309 (2016).

Implicações físicas da Equação de Schrödinger

- *Conservação da probabilidade.*

A norma do vetor estado permanece constante (esperado). Para ver isso calcule

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle$$
 e use a equação de Schrödinger

para escrever
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} H(t) | \psi(t) \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H(t) \end{cases} \Rightarrow \text{lembre que } H^\dagger = H.$$

Faça as substituições e obtenha

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle = 0$$

Na representação das coordenadas temos que

$$\langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \left(\int d^3r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \right) | \psi(t_0) \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t_0) \psi(\vec{r}, t_0) = 1$$

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \left(\int d^3r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \right) | \psi(t) \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = 1$$

- ★ Ou seja, a densidade local de probabilidade $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ pode ser diferente de $|\psi(\vec{r}, t_0)|^2$. Isto é, em \vec{r} a densidade de probabilidade pode mudar com o tempo, mas a chance da partícula estar em algum lugar (fruto da integração no espaço todo) é sempre 1.

Conservação de probabilidade: densidades e correntes.

- *Continuemos a considerar um sistema de uma partícula sem spin.*

No slide anterior vimos que $\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \text{ pode mudar com o tempo} \\ \text{mas } \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) = \int d^3r \rho(\vec{r}, t) = 1, \forall t \end{array} \right.$

O que significa isso? Se a probabilidade aumentar (diminuir) em algum lugar, ela precisa diminuir (aumentar) em outro lugar. Isso induz a criação de alguma quantidade que indique com que taxa e para onde a densidade de probabilidade está indo. Preocupações semelhantes aparecem em mecânica de fluídos, em eletromagnetismo, etc. Chamamos essa quantidade física de densidade de corrente ou fluxo. Em mecânica de fluídos, o fluxo é um vetor cujas unidades são dadas em $\frac{\text{litros}}{\text{área} \times \text{tempo}}$. No eletromagnetismo, o fluxo de carga, conhecido

por $\vec{J}(\vec{r}, t)$, é dado em $\frac{\text{carga}}{\text{área} \times \text{tempo}}$. Na mecânica quântica, definiremos uma

densidade de corrente de probabilidade ou fluxo de probabilidade (também a chamaremos de $\vec{J}(\vec{r}, t)$) e suas unidades serão dadas por $\frac{\text{probabilidade}}{\text{área} \times \text{tempo}}$.

O que elas tem em comum? A equação da continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

Conservação de probabilidade: densidades e correntes.

A da equação de continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$, quando integrada em um dado volume nos leva a:

$$\int_{\text{Volume}} d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \int_{\text{Volume}} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$$

que, por meio do teorema do divergente, permite escrever a expressão:

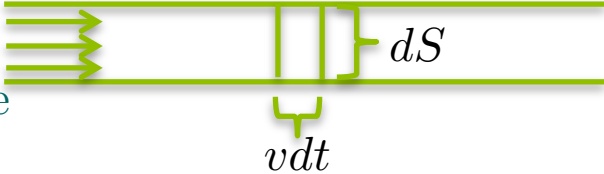
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Volume}} d^3r \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\text{Superfície}} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

e que é interpretada como: a taxa de probabilidade (ou carga, ou fluído, etc.) que entra ou sai do volume, é igual a taxa que passa pela superfície que envolve este volume.

Note as unidades: $\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{\text{probabilidade}}{\text{volume}} \\ \mathbf{j}(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{\text{probabilidade}}{\text{área} \times \text{tempo}} \end{array} \right.$

Em mecânica de fluídos, vocês já viram:

Fluído com velocidade v e densidade ρ


$$j = \frac{\rho dS v dt}{dS dt} = \rho v$$

Conservação de probabilidade: densidades e correntes.

Quanto vale a densidade de corrente de probabilidade $\vec{J}(\vec{r}, t)$ na mecânica quântica? Para isso, calcule primeiro

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\vec{r}, t)\right)\psi(\vec{r}, t) + \psi^*(\vec{r}, t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t)\right)$$

depois $\left\{ \begin{array}{l} \text{use } i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) \text{ e seu complexo conjugado} \\ \text{multiplique uma por } \psi^* \text{ e outra por } \psi \text{ e subtraia uma da outra} \\ \text{lembre que } V(\vec{r})^* = V(\vec{r}) \\ \text{e compare com } \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \text{ coloque } \vec{\nabla} \text{ em evidência} \end{array} \right.$

para finalmente obter $\vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}[\psi^*\vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi] = \frac{\hbar}{m}\text{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)$

O $\vec{J}(\vec{r}, t)$ deve estar relacionado com o momento \vec{P} . Para ver isso, calcule

$$\int d^3r \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} \int d^3r [\psi^* \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi + (\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi)^* \psi] = \frac{1}{2m} [\langle \vec{P} \rangle + \langle \vec{P} \rangle] = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{m}$$

Conservação de probabilidade: densidades e correntes.

Note que a equação da caixa azul do slide anterior poderia ter sido dada por

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} \left[\psi^* \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi + \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi \right)^* \psi \right] = \frac{1}{m} \text{Re} \left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi \right)$$

Com isso, $\vec{J}(\vec{r}, t)$ pode ser escrito como o valor médio do operador simetrizado

$$\frac{1}{2} \left[|\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \frac{\vec{P}}{m} + \frac{\vec{P}}{m} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \right]$$

Para confirmar, basta calcular

$$\langle \psi | \frac{1}{2} \left[|\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \frac{\vec{P}}{m} + \frac{\vec{P}}{m} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \right] | \psi \rangle = \frac{1}{2m} \left[\psi^* \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi + \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi \right)^* \psi \right] = \vec{J}(\vec{r}, t)$$

Note que $\left\{ \begin{array}{l} \text{o maior médio de } |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \text{ é } \rho(\vec{r}, t) \\ \text{e o valor médio de } \frac{\vec{P}}{m} \text{ é a velocidade } \vec{v} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{J}(\vec{r}, t) = \text{“} \rho(\vec{r}, t) \vec{v} \text{”}$

Exemplo: $\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, $\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |A|^2 = \vec{v}_g \rho$

E se a partícula estiver sob a ação de um potencial vetor?

Repetindo o procedimento para a Hamiltoniana adequada, encontramos

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{1}{m} \text{Re} \left(\psi^* \underbrace{\left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right)}_{\vec{p}} \psi \right)$$

lembre que $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$