

Evolução temporal do valor médio de uma observável

F689

Aula 15

- Aprendemos que o valor médio de A para um sistema preparado em $|\psi\rangle$ é

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

Mas isso em que instante? Talvez fosse melhor colocar a dependência temporal

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$$

Para ser rigoroso a dependência temporal pode ser em $\left\{ \begin{array}{l} |\psi(t)\rangle \\ \langle \psi(t)| \\ \text{ou até em } A(t) \end{array} \right.$

- Fórmula Geral

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle(t) = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \left[\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right] A | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | A \left[\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle \right] + \langle \psi(t) | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi(t) \rangle$$

Fazendo uso da equação de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = H(t) | \psi(t) \rangle$, a equação fica:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | \frac{H}{-i\hbar} A | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | A \frac{H}{i\hbar} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi(t) \rangle$$

ou ainda,
$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | AH - HA | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{\partial A}{\partial t} | \psi(t) \rangle$$

para finalmente obter
$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

O valor médio de A é um número que depende apenas de t .

Se $[A, H] = 0$ e $\partial A / \partial t = 0 \forall t$, $\langle A \rangle$ não depende do tempo.

Evolução temporal do valor médio de uma observável

- Na mecânica clássica \mathcal{A} é uma quantidade física que depende explicitamente e implicitamente de t através de $\vec{r}(t)$ e $\vec{p}(t)$. Segundo as regras de quantização, temos

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(\vec{r}, \vec{p}, t) & \implies & A(\vec{R}, \vec{P}, t) \\
 \text{no } \mathcal{A} \text{ clássico } \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}(t) \text{ e } \vec{p}(t) \\ \text{dependem de } t, \\ \text{assim como } \mathcal{A}. \end{array} \right. & & \text{no } A \text{ quântico } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \text{ e } \vec{P} \text{ não} \\ \text{dependem de } t. \\ A \text{ dependência} \\ \text{está em } |\psi(t)\rangle. \end{array} \right.
 \end{array}$$

- Os operadores quânticos \vec{R} e \vec{P} são tais que $\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$.
- A dependência explícita no tempo é tratada da mesma maneira para $\mathcal{A}(\vec{r}, \vec{p}, t)$

e $A(\vec{R}, \vec{P}, t)$. Na representação $\{|\vec{r}\rangle\}$, podemos escrever $\langle A \rangle$, da seguinte forma:

$$\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A(\vec{R}, \vec{P}, t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \left(\int d^3r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| \right) A(\vec{R}, \vec{P}, t) | \psi(t) \rangle$$

que com cuidado pode ser escrito por $\langle A \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) A(\vec{r}, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, t) \psi(\vec{r}, t)$.

- Após integração $\langle A \rangle = \langle A \rangle(t) \rightarrow$ depende só de t .

Evolução temporal do valor médio de uma observável

- Casos especiais: observáveis \vec{R} e $\vec{P} \Rightarrow$ **Teorema de Ehrenfest.**

Suponha um partícula sem spin sujeita à um potencial escalar. A Hamiltoniana

clássica é dada por: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \Rightarrow$ a quântica é $H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{R})$

- Quanto vale $\langle \vec{R} \rangle(t)$ sabendo que o sistema evolui de acordo com $|\psi(t)\rangle$?

Aplicação direta da fórmula geral (caixa azul do slide 1) nos leva à:

seguintes equações $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{R}, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{R}, \frac{P^2}{2m}] \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{P}, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{P}, V(\vec{R})] \rangle \end{array} \right.$

Os comutadores dão $\left\{ \begin{array}{l} [\vec{R}, \frac{P^2}{2m}] = \frac{1}{2m} \left\{ P_x \underbrace{[\vec{R}, P_x]}_{i\hbar \hat{i}} \dots + [\vec{R}, P_x] \underbrace{P_x}_{i\hbar \hat{i}} \dots \right\} = \frac{i\hbar}{m} P_x \hat{i} + \dots \\ [\vec{P}, V(\vec{R})] = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rightarrow \text{aplique } \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \text{ em } \langle \vec{r} | V(\vec{R}) | \psi(t) \rangle \end{array} \right.$

resultando em $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \vec{R} \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{m} \\ \frac{d}{dt} \langle \vec{P} \rangle = - \langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle \end{array} \right. \Rightarrow$ muito parecidas com as equações clássicas!

lei de Newton?

Precisamos entender melhor o que significa isso.

Teorema de Ehrenfest e o limite clássico

- Suponha que $\psi(\vec{r}, t)$ seja um pacote de ondas, como por exemplo, uma mistura de ondas planas, conforme discutimos nas primeiras aulas.

Note que

- (1) $\langle \vec{R} \rangle$ tem 3 componentes $\langle X \rangle$, $\langle Y \rangle$ e $\langle Z \rangle$.
- (2) $\langle \vec{R} \rangle(t)$ é o centro do pacote de ondas no instante t .
- (3) o conjunto de todos os pontos $\langle \vec{R} \rangle(t)$ descrevem a trajetória seguida pelo centro do pacote de ondas.

Se a extensão do pacote for muito menor que as outras distâncias do problema, podemos aproximar o pacote pelo seu centro. Neste caso, a mecânica quântica se aproxima da mecânica clássica

Será que o movimento do centro do pacote de ondas obedece as leis da mecânica clássica? O teorema de Ehrenfest responderá isso.

Vimos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \vec{R} \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{m} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{velocidade do centro do pacote é a média} \\ \text{do momento linear dividido pela massa.} \end{array} \right. \\ \frac{d}{dt} \langle \vec{P} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle \left\{ \begin{array}{l} \text{o lado esquerdo é } \frac{d}{dt} m \frac{d}{dt} \langle \vec{R} \rangle = m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{R} \rangle \\ \text{e o lado direito? } = F_{\text{clássica}} = -\vec{\nabla} V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Infelizmente, em geral $-\langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle \neq -\vec{\nabla} V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle}$

Teorema de Ehrenfest e o limite clássico

- Comentários sobre esse último resultado

- Considere $V(x) = \lambda x^n \Rightarrow V(X) = \lambda X^n$

e compare as expressões

$$\begin{cases} -\langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle \rightarrow -\langle \frac{dV}{dX} \rangle = n\lambda \langle X^{n-1} \rangle \\ -\vec{\nabla} V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle} \rightarrow \frac{dV}{dX}|_{X=\langle X \rangle} = n\lambda \langle X \rangle^{n-1} \end{cases}$$

- Em geral $\langle X^{n-1} \rangle \neq \langle X \rangle^{n-1}$. Veja, por exemplo, caso $n = 3$. Quando calculamos o desvio quadrático da média, vimos que $\langle X^2 \rangle \neq \langle X \rangle^2$.
- Tem situações interessantes, onde vale a igualdade.

por exemplo

$$\begin{cases} n = 0 \rightarrow \text{partícula livre} & -\frac{dV}{dX} = 0, \text{ pois } \langle 0 \rangle = 0. \\ n = 1 \rightarrow \text{campo uniforme} & -\frac{dV}{dX} = -\lambda, \text{ pois } \langle X^0 \rangle = \langle X \rangle^0 \\ n = 2 \rightarrow \text{campo do oscilador} & -\frac{dV}{dX} = -\lambda X, \text{ pois } \langle X^1 \rangle = \langle X \rangle^1 \end{cases}$$

- Embora, em geral $-\langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle \neq -\vec{\nabla} V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle}$, quando um pacote de ondas for suficientemente localizado, as diferenças são desprezíveis (região semi-clássica).

Para adquirir um pouco de intuição sobre o assunto, calcularemos essa diferença na representação das coordenadas.

Teorema de Ehrenfest e o limite clássico

- Quanto vale $-\langle \vec{\nabla}V(\vec{R}) \rangle \neq -\vec{\nabla}V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle}$ na representação das coordenadas?

Tome $\langle \vec{\nabla}V(\vec{R}) \rangle = \langle \psi | \vec{\nabla}V(\vec{R}) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} \vec{\nabla}V(\vec{R}) | \psi \rangle$ com $\mathbb{1} = \int d^3r |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|$

e obtenha $\langle \vec{\nabla}V(\vec{R}) \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) [\vec{\nabla}V(\vec{r})] \psi(\vec{r}, t) = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 \vec{\nabla}V(\vec{r})$.

- Se $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ for suficientemente localizado $\nabla V(\vec{r})$ não varia muito na região em que $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ contribui e pode ser tratado por $\nabla V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle}$ e retirado da integral. Assim

$$\int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 \vec{\nabla}V(\vec{r}) = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 \overbrace{\vec{\nabla}V(\vec{r})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle}}^1 = \vec{\nabla}V(\vec{r})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle} \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2,$$

ou seja, se o pacote de ondas for pequeno e ao redor do valor médio de X ,

$$\langle \vec{\nabla}V(\vec{R}) \rangle = \vec{\nabla}V(\vec{R})|_{\vec{R}=\langle \vec{R} \rangle}$$

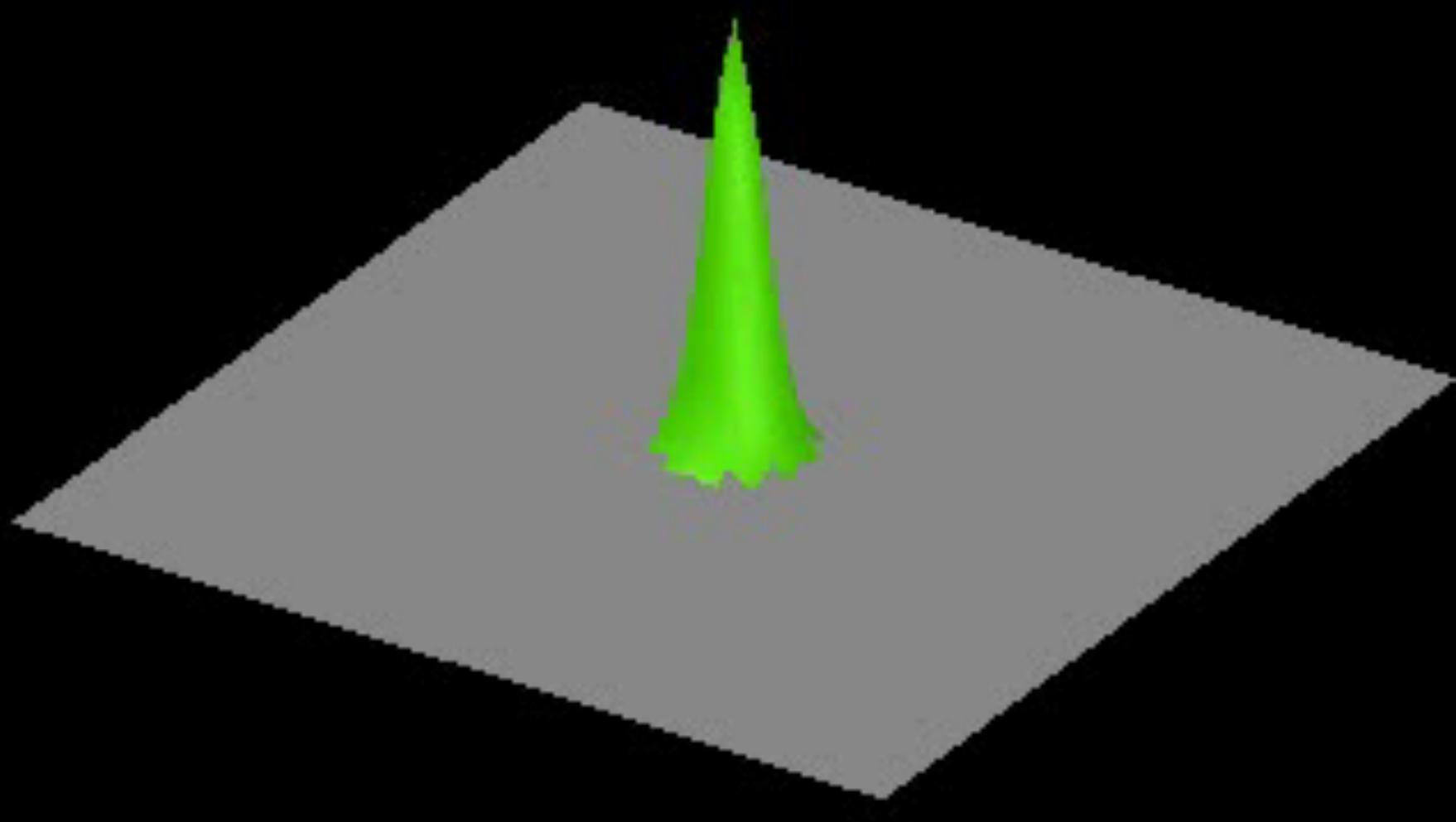
- No limite macroscópico ($\lambda_{\text{de Broglie}} \ll 1$), ou seja quando $\lambda_{\text{de Broglie}}$ é menor que outras dimensões, tais como as distâncias onde o potencial varia, os pacotes são suficientemente localizados e a equação acima é satisfeita.

Nestas condições (maioria dos sistemas macroscópicos), a equação de Schrödinger fornece os mesmos resultados que as equações clássicas.



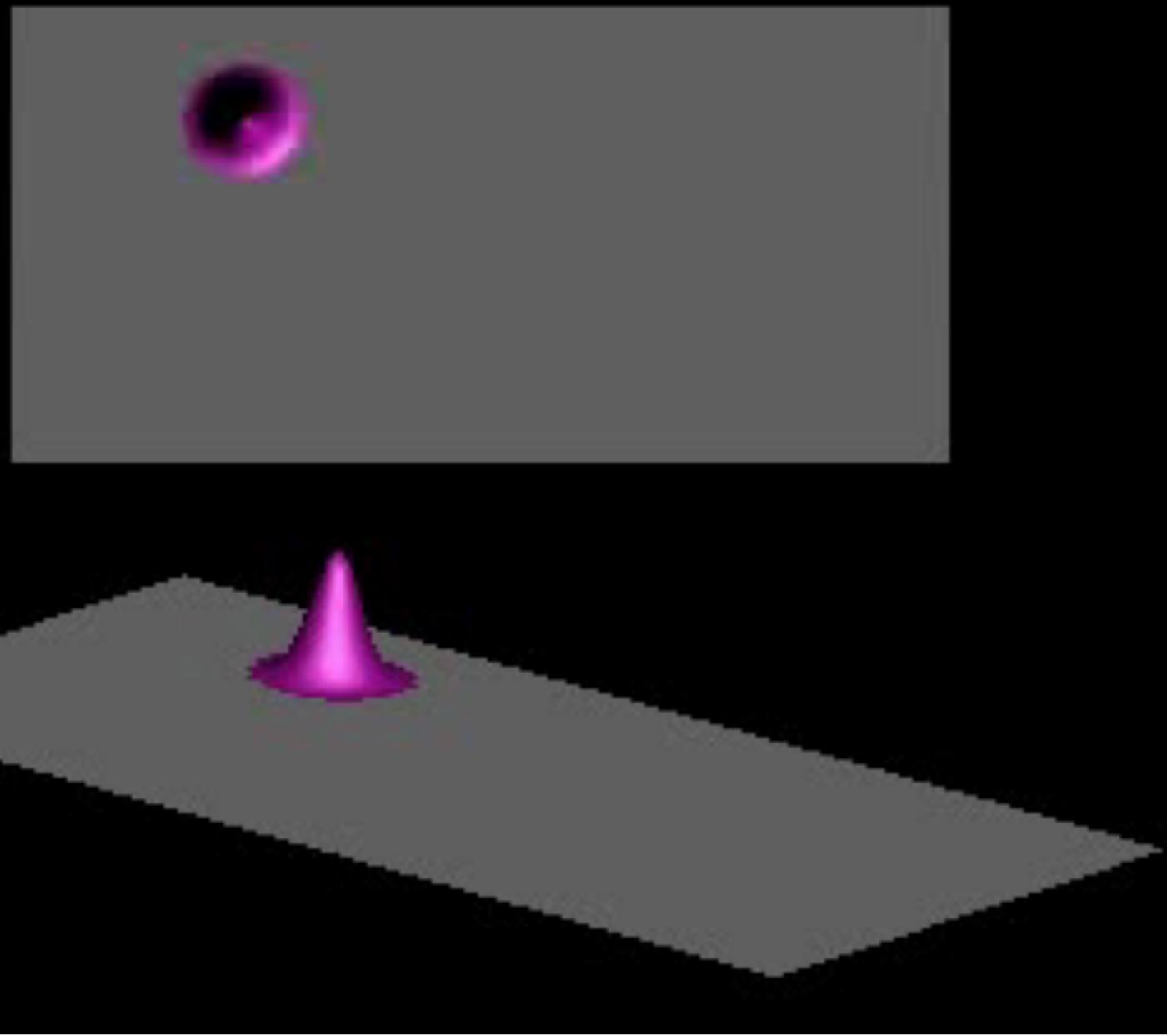
Partícula livre

Para ver as animações, visite: <http://www.embd.be/quantummechanics/>



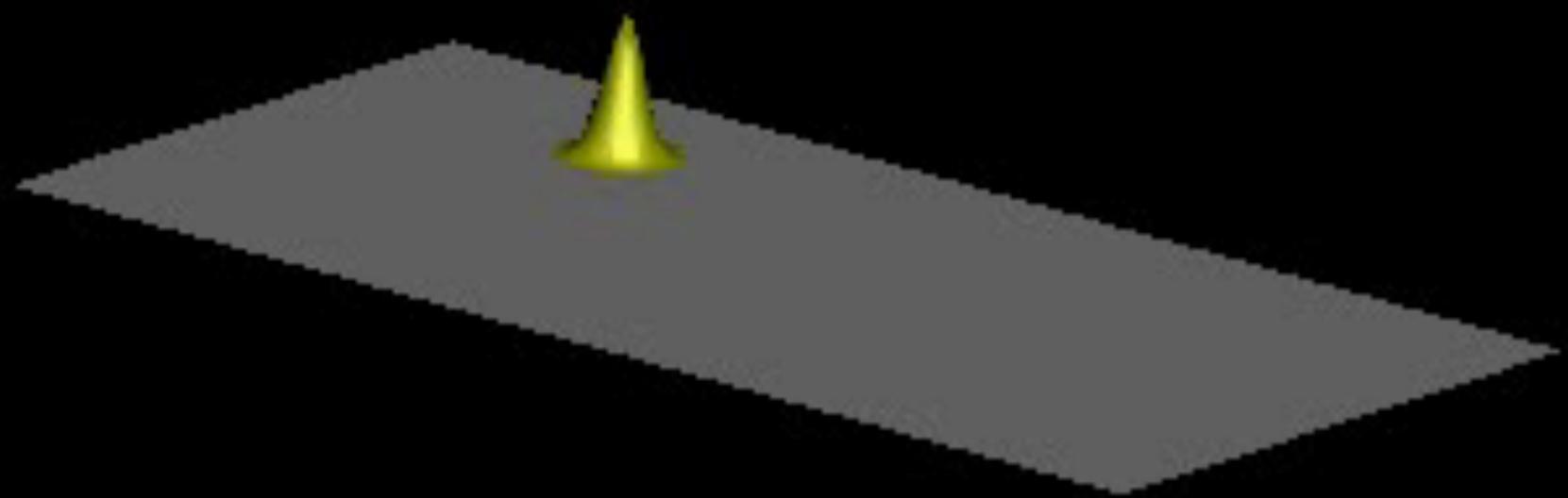
Partícula prisioneira na caixa

Para ver as animações, visite: <http://www.embd.be/quantummechanics/>



Partícula carregada em um campo magnético constante

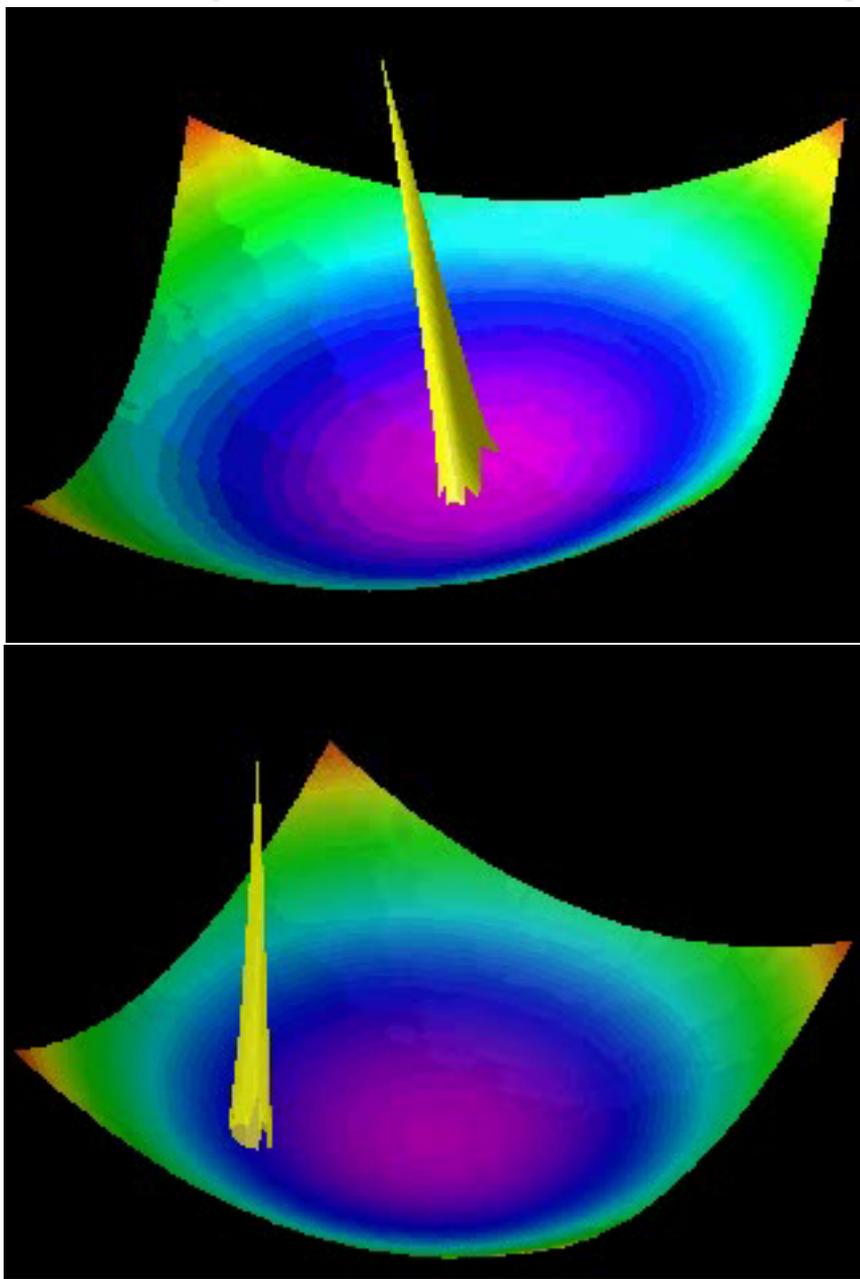
Para ver as animações, visite: <http://www.embd.be/quantummechanics/>



Partícula carregada na caixa em um campo magnético constante

Para ver as animações, visite: <http://www.embd.be/quantummechanics/>

Cuidados especiais com nossas interpretações



Sistemas conservativos

- Os sistemas cujas Hamiltonianas podem ser descritas com potenciais e não dependem explicitamente do tempo, isto é, $H(\vec{R}, \vec{P}, t) = H(\vec{R}, \vec{P})$, são ditos conservativos. Na mecânica clássica a situação é descrita de forma semelhante por $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p})$ e significa que a energia do sistema se conserva ao longo do tempo e é uma constante de movimento.
- Solução da equação de Schrödinger. Considere

$$H|\varphi_{n,\tau}\rangle = E_n|\varphi_{n,\tau}\rangle$$

Por simplicidade, considere um espectro discreto e τ representando os índices necessários para que $|\varphi_{n,\tau}\rangle$ seja um único vetor (de um CCOC).

- H é uma observável (o conjunto $\{|\varphi_{n,\tau}\rangle\}$ forma uma base) e se H não depende do tempo E_n e $|\varphi_{n,\tau}\rangle$ também não dependem do tempo.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,\tau} c_{n,\tau}(t)|\varphi_{n,\tau}\rangle.$$

A base não muda com o tempo e a dependência temporal está em $c_{n,\tau}(t)$, onde, $c_{n,\tau}(t) = \langle\varphi_{n,\tau}|\psi(t)\rangle$.

- Sabemos que $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$. Multiplique pela esquerda por $\langle\varphi_{n,\tau}|$ e

obtenha a equação

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\varphi_{n,\tau}|\psi(t)\rangle = \langle\varphi_{n,\tau}|H|\psi(t)\rangle \Rightarrow \dots$$

Sistemas conservativos

- A equação da caixa azul do slide anterior pode virar uma equação para $c_{n,\tau}(t)$.

Para tanto use as relações

$$\begin{cases} c_{n,\tau}(t) = \langle \varphi_{n,\tau} | \psi(t) \rangle \\ \langle \varphi_{n,\tau} | H | \psi(t) \rangle = \langle \varphi_{n,\tau} | E_n | \psi(t) \rangle = E_n \langle \varphi_{n,\tau} | \psi(t) \rangle = E_n c_{n,\tau} \end{cases}$$

e obtenha $i\hbar \frac{d}{dt} c_{n,\tau}(t) = E_n c_{n,\tau}(t) \implies c_{n,\tau}(t) = c_{n,\tau}(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}$

- Esse resultado pode ser usado em todos os $c_{n,\tau}(t)$ da expressão da caixa lilás do slide anterior e, com isso, obter uma fórmula geral de evolução temporal de $|\psi(t)\rangle$, dada por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,\tau} c_{n,\tau}(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,\tau}\rangle,$$

que informa que em $t = t_0 \implies |\psi(t_0)\rangle = \sum_{n,\tau} c_{n,\tau}(t_0) |\varphi_{n,\tau}\rangle$

- Esse resultado pode ser obtido para o caso contínuo. Neste situação

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\tau} \int dE c_{\tau}(E, t_0) e^{-iE(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{E,\tau}\rangle,$$

- Como evolui no tempo um autoestado de H ? Para pegar um caso geral,

podemos supor que $|\psi(t_0)\rangle = \sum_{\tau} c_{n,\tau}(t_0) |\varphi_{n,\tau}\rangle \in \mathcal{E}_n$ subespaço de E_n .

Sistemas conservativos

- Aplicação direta do resultado da caixa laranja do slide anterior, fornece

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\tau} c_{n,\tau}(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,\tau}\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \sum_{\tau} c_{n,\tau}(t_0) |\varphi_{n,\tau}\rangle.$$

ou seja $|\psi(t)\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle$. Isso significa que $|\psi(t)\rangle$ e $|\psi(t_0)\rangle$ diferem por um fator de fase global. Eles contêm a mesma informação física. Esses

estados são fisicamente indistinguíveis $\left\{ \begin{array}{l} \text{As propriedades de um sistema em} \\ \text{um autoestado de } H \text{ não variam com} \\ \text{o tempo} \rightarrow \textit{estados estacionários.} \end{array} \right.$

- Se houvesse uma soma em n na descrição de $|\psi(t)\rangle$ em $t = t_0$, isso não seria verdade. A fase não seria global. Teríamos fases parciais multiplicando seus estados estacionários correspondentes.
- Neste último caso, não saberíamos dizer qual é a energia do sistema. Pode ser qualquer uma das energias E_n da mistura de n 's. Entretanto, após a primeira medida, o sistema colapsa para o estado estacionário correspondente. A partir de então, a energia se conserva.

*Estamos prontos para discutir “constantes de movimento”
da mecânica quântica*

Constantes de Movimento

- Uma observável A , é uma constante de movimento se
$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \\ [A, H] = 0 \end{cases}$$

- Para um sistema conservativo, H é uma constante de movimento,

pois
$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{por definição de sistema conservativo.} \\ [H, H] = 0 \rightarrow \text{todo operador comuta com ele mesmo.} \end{cases}$$

- A constante de movimento respeita a seguinte relação

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \underbrace{[A, H]}_0 | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_0 | \psi(t) \rangle = 0$$

O valor médio de uma constante de movimento não muda com o tempo.

- Sejam A e H , tais que $[A, H] = 0$, observáveis com espectros discretos (por

simplicidade) e respeitando as equações
$$\begin{cases} H |\varphi_{n,p,\tau}\rangle = E_n |\varphi_{n,p,\tau}\rangle \\ A |\varphi_{n,p,\tau}\rangle = a_p |\varphi_{n,p,\tau}\rangle \end{cases}$$

$\tau \rightarrow$ autovalores de operadores que junto com A e $H \rightarrow$ um CCOC.

• $[A, H] = 0$ (continuação) **Constantes de Movimento**

- Já vimos que $|\varphi_{n,p,\tau}\rangle$ são estados estacionários ($H(t) = H$).
Se, inicialmente $|\psi\rangle$ for um deles, permanecerá neste estado para sempre.
- Quando A é uma constante de movimento, se $|\psi\rangle$ for um dos $\{|\varphi_{n,p,\tau}\rangle\}$, que também é autoestado de A , esse permanecerá o mesmo (a menos de uma fase global) indefinidamente e com o mesmo autovalor a_p . Por esta razão os autovalores de A são ditos “bons números quânticos”.
- Se, entretanto, $|\psi(t)\rangle$ for uma mistura arbitrária dos estados $\{|\varphi_{n,p,\tau}\rangle\}$, o que é possível dizer sobre a probabilidade de encontrar a_p em uma medida de \mathcal{A} ? Para ver isso, considere, inicialmente

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_n \sum_p \sum_\tau c_{n,p,\tau}(t_0) |\varphi_{n,p,\tau}\rangle$$

Qual a chance de medir \mathcal{A} e obter a_p ? $\mathcal{P}(a_p, t_0) = \sum_n \sum_\tau |c_{n,p,\tau}(t_0)|^2$

E em t ? Quanto vale $|\psi(t)\rangle$?

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \sum_p \sum_\tau c_{n,p,\tau}(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,p,\tau}\rangle$$

Qual a chance de obter a_p ? $\mathcal{P}(a_p, t) = \sum_n \sum_\tau |c_{n,p,\tau}(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar}|^2$

$\mathcal{P}(a_p, t) = \mathcal{P}(a_p, t_0) \rightarrow$ a probabilidade não muda com o tempo!

Frequências de Bohr de um sistema e regras de seleção

- Seja B uma observável que pode não comutar com H , isto é $[B, H] \neq 0$.

Sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \langle B \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | B | \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \underbrace{[B, H]}_{\neq 0} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \underbrace{\frac{\partial B}{\partial t}}_0 | \psi(t) \rangle$$

- Para um sistema conservativo, vimos que:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \sum_{\tau} c_{n,\tau}(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,\tau}\rangle$$

Substituição direta permite calcular explicitamente $\langle B \rangle$, isto é

$$\langle \psi(t) | B | \psi(t) \rangle = \sum_{n',\tau'} \sum_{n,\tau} \langle \varphi_{n',\tau'} | c_{n',\tau'}^* e^{iE_{n'}(t-t_0)/\hbar} B c_{n,\tau} e^{iE_n(t-t_0)/\hbar} | \varphi_{n,\tau} \rangle$$

$$\langle \psi(t) | B | \psi(t) \rangle = \sum_{n',\tau'} \sum_{n,\tau} c_{n',\tau'}^* c_{n,\tau} \langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle e^{iE_{n'}(t-t_0)/\hbar} e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}$$

- Como assumimos $B(t) = B$, $\langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle$ são constantes.
- Assim, o valor médio de B pode ser escrito da seguinte forma:

$$\langle B \rangle(t) = \sum_{n',\tau'} \sum_{n,\tau} c_{n',\tau'}^* c_{n,\tau} \langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle e^{i(E_{n'} - E_n)(t-t_0)/\hbar}$$

O futuro de $\langle B \rangle(t)$ é governado pela combinação de termos

$\langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle$ ponderados pelas fases parciais $e^{i(E_{n'} - E_n)(t-t_0)/\hbar}$.

Frequências de Bohr de um sistema e regras de seleção

- Note que podemos definir $\nu_{n'n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|E_{n'} - E_n|}{2\pi\hbar} = \frac{|E_{n'} - E_n|}{h}$, como frequências de oscilação das fases. Estas frequências são conhecidas por *frequências de Bohr*. As frequências independem de B e do estado inicial.
- Embora $\nu_{n'n}$ independa da observável B , os coeficientes que multiplicam as exponenciais dependem.
- O termo $\langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle$ diz quanto importante será $\nu_{n'n}$. Em particular, se por alguma razão $\langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle$ for zero, a frequência $\nu_{n'n}$ ficará ausente. Isso é a origem das chamadas *Regras de Seleção*.
- Se $|\psi(t_0)\rangle$ for um estado estacionário (um único n , suponha igual à k), temos que $\nu_{kk} = 0$ e $\langle B \rangle$ não depende de t .

- Se B é uma constante de movimento $\begin{cases} [B, H] = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle \varphi_{n',\tau'} | B | \varphi_{n,\tau} \rangle = 0$

para $n \neq n'$ e como $\nu_{nn} = 0$, temos que $\langle B \rangle(t) = \langle B \rangle(t_0)$, conforme já havíamos visto.