Relação de incerteza entre tempo e energia

- Existem sutilezas neste tópico que precisamos explorar.

$$\text{Suponha} \begin{cases} \Delta t \equiv \text{tempo de evolução do sistema} \\ \\ \Delta E \equiv \text{imprecisão na energia} \end{cases} \Rightarrow \Delta t \Delta E \gtrsim h$$

  - Precisamos discutir o que significa evoluir e o que significa imprecisão na energia.
  - Se o sistema está em um estado estacionário, o conhecimento sobre a energia E_n dele é preciso e podemos dizer que $\Delta E = 0$. Já vimos que ele não evolui (ganha apenas um fator, $e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}$, que não passa de um uma fase global) $\therefore$ $\Delta t = \infty$.
  - Isto está de acordo com a relação apresentada $\Delta t \Delta E \gtrsim h \begin{cases} \text{se um é zero, o outro} \\ \text{precisa ser infinito.} \end{cases}$

- Suponha agora $|\psi(t_0)\rangle = c_1 \underbrace{|\varphi_1\rangle}_{E_1} + c_2 \underbrace{|\varphi_2\rangle}_{E_2}$. Sabemos que o sistema evolui de acordo com $|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}|\varphi_1\rangle + c_2 e^{-iE_2(t-t_0)/\hbar}|\varphi_2\rangle$. Em instante t, se medirmos a energia, podemos encontrar E_1 ou E_2. Pode-se dizer que que a imprecisão na energia é $\Delta E \simeq |E_1 - E_2|$.
  - Considere B, tal que $[B, H] \neq 0$. Como a probabilidade de medir $\mathcal{B}$ e encontrar b_m, um autovalor de B, muda com o tempo?

Relação de incerteza entre tempo e energia

Ache b_m com $|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}|\varphi_1\rangle + c_2 e^{-iE_2(t-t_0)/\hbar}|\varphi_2\rangle$ (continuação)

Sabemos que $B|u_m\rangle = b_m|u_m\rangle$ e isso permite escrever $\mathcal{P}(b_m,t) = |\langle u_m|\psi(t)\rangle|^2$.

E como sabemos $|\psi(t)\rangle$, podemos escrever

$\mathcal{P}(b_m,t) = |\langle u_m|\big(c_1 e^{-iE_1(t-t_0)/\hbar}|\varphi_1\rangle + c_2 e^{-iE_2(t-t_0)/\hbar}|\varphi_2\rangle\big)|^2$ que pode ser reescrito

$$\mathcal{P}(b_m,t) = |c_1|^2|\langle u_m|\varphi_1\rangle|^2 + |c_2|^2|\langle u_m|\varphi_2\rangle|^2 + \underbrace{c_2^\star c_1 e^{i(E_2-E_1)(t-t_0)/\hbar}\langle\varphi_2|u_m\rangle\langle u_m|\varphi_1\rangle}_{\text{complexo conjugado um do outro}} +$$

$$+\ \overbrace{c_2 c_1^\star e^{-i(E_2-E_1)(t-t_0)/\hbar}\langle u_m|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|u_m\rangle}$$

ou ainda

$$\mathcal{P}(b_m,t) = |c_1|^2|\langle u_m|\varphi_1\rangle|^2 + |c_2|^2|\langle u_m|\varphi_2\rangle|^2 + 2\mathrm{Re}\{c_2^\star c_1 e^{i(E_2-E_1)(t-t_0)/\hbar}\langle\varphi_2|u_m\rangle\langle u_m|\varphi_1\rangle\}$$

Este resultado mostra que $\mathcal{P}(b_m,t)$ oscila entre valores extremos com a freqüência de Bohr $\nu_{21} = \dfrac{|E_2 - E_1|}{h}$

uma boa definição de tempo de evolução!

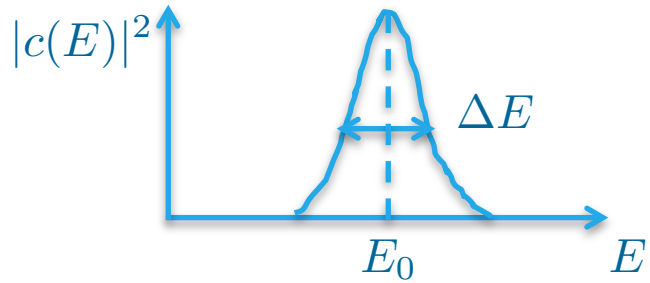
O $\overbrace{\text{tempo característico de oscilação}}$ é $\Delta t = \dfrac{1}{\nu_{21}} \Rightarrow \Delta t \Delta E \approx h.$

Relação de incerteza entre tempo e energia

- Suponha agora que o espectro de H seja contínuo $\Rightarrow |\psi(t_0)\rangle = \int dE\; c(E)|\varphi_E\rangle$.

  Nestas condições $|\psi(t)\rangle = \int dE\; c(E)\, e^{-iE(t-t_0)/\hbar}|\varphi_E\rangle$. Quanto vale $\mathcal{P}(b_m, t)$?

  A figura abaixo representa a distribuição de energias do pacote de ondas



$$\mathcal{P}(b_m, t) = |\langle u_m|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\int dE\; c(E)\, e^{-iE(t-t_0)/\hbar}\langle u_m|\varphi_E\rangle\right|^2$$

- Se $\langle u_m|\varphi_E\rangle$ não varia muito ao redor de E_0 e se ΔE é suficientemente fino, a variação de $\langle u_m|\varphi_E\rangle$ pode ser negligenciada no interior de $c(E)$. Isso permite substitui-lo por $\langle u_m|\varphi_{E_0}\rangle$ e retira-lo da integral. Assim, temos

$$\mathcal{P}(b_m, t) = |\langle u_m|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle u_m|\varphi_{E_0}\rangle|^2\left|\int dE\; c(E)\, e^{-iE(t-t_0)/\hbar}\right|^2$$

- Note que $\mathcal{P}(b_m, t)$ é proporcional ao quadrado do módulo da transformada de Fourier de $c(E)$. Chame essa transformada de $\mathcal{T}(t)$ e perceba:

Relação de incerteza entre tempo e energia

- Transformadas de Fourier estão ligadas à relação de incerteza.

$$\text{Lembre que} \begin{cases} \psi(x) = \int dp\ \bar{\psi}(p) e^{ipx/\hbar} \\ \bar{\psi}(p) = \int dx\ \psi(x) e^{-ipx/\hbar} \end{cases} \quad \text{gerou} \Rightarrow \Delta p \Delta x \geq \hbar/2$$

$$\text{Agora temos} \begin{cases} c(E) = \int dt\ \mathcal{T}(t)\, e^{+iE(t-t_0)/\hbar} \\ \mathcal{T}(t) = \int dE\ c(E)\, e^{-iE(t-t_0)/\hbar} \end{cases} \quad \text{fornecendo} \Rightarrow \Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

- Note que $\begin{cases} \Delta p \rightarrow \text{ largura de } |\bar{\psi}(p)|^2 \text{ e } p \text{ é autovalor do espectro contínuo de } P. \\ \Delta x \rightarrow \text{ largura de } |\psi(x)|^2 \text{ e } x \text{ é autovalor do espectro contínuo de } X. \end{cases}$
- Embora $\Delta E \rightarrow$ largura de $|c(E)|^2$ e E é autovalor do espectro contínuo de H,

$\Delta t \rightarrow$ *largura de* $|\mathcal{T}(t)|^2$, *mas* t *é apenas um parâmetro,* $\nexists$ *operador associado.*

- Note $\begin{cases} C(E) = \delta(E - E_0) \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow \mathcal{T}(t) = e^{-iE_0(t-t_0)/\hbar} \rightarrow \begin{cases} |\mathcal{T}(t)|^2 = 1 \\ \Delta t = \infty. \end{cases} \\ C(E) = 1\ \forall\ E \rightarrow \Delta E = \infty \rightarrow \mathcal{T}(t) = \delta(t - t_0) \rightarrow \Delta t = 0 \end{cases}$

Mais um exemplo e superposição de estados

- Comentários - exemplo usando um pacote unidimensional.
  - Associe à Δp um ΔE. Como?

    Que tal tomando o diferencial $\Delta E = \dfrac{dE}{dp}\Delta p$.

    Como $\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dE}{dp} = \dfrac{d\omega}{dk} = v_g$ velocidade de grupo, lembra? $\therefore\ \Delta E = v_g \Delta p$.
  - Qual seria uma boa estimativa de Δt? Que tal o tempo necessário para o pacote viajar com a velocidade v_g a sua extensão?
  - Quanto vale sua extensão? $\Delta x \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta x}{v_g}$.

    Assim, temos $\Delta E \Delta t = \Delta E \dfrac{\Delta x}{v_g} = v_g \Delta p \dfrac{\Delta x}{v_g} = \Delta p \Delta x \geq \hbar/2$.

    $$\therefore\ \Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$
- Princípio da superposição e previsões físicas.

  Temos falado em espaço vetorial e em equações lineares, agora daremos um significado mais preciso para isso. O postulado 1 diz que um sistema físico é definido por um ket $|\psi(t_0)\rangle \in \mathcal{E}$.
  - Soma de kets é ket $\rightarrow$ consequência imediata: efeitos de interferência.
  - Precisamos entender $\rightarrow$ o conceito de amplitude de probabilidade.

Superposição de estados

- Amplitudes de probabilidade e efeitos de interferência.

Comecemos por explorar o significado físico da superposição linear de estados.

Qual seria a diferença entre superposição linear e mistura estatística?

○ Para explorar esse assunto, considere $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, com $\begin{cases} \langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1 \\ \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0 \end{cases}$

Os kets $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ poderiam ser autokets de B com autovalores b_1 e b_2.

○ Se A é uma observável e $|u_n\rangle$ é tal que $A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle$, podemos dizer que:

para o estado $\begin{cases} |\psi_1\rangle \Rightarrow \mathcal{P}_1(a_n) = |\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 \\ |\psi_2\rangle \Rightarrow \mathcal{P}_2(a_n) = |\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 \end{cases}$

○ Considere o sistema no estado $|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$, tal que $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$.

◇ Qual é a probabilidade de estando o sistema em $|\psi\rangle$ achar $|\psi_1\rangle$? $|\lambda_1|^2$.

◇ Qual é a probabilidade de estando o sistema em $|\psi\rangle$ achar b_1? $|\lambda_1|^2$.

⋆ Qual é a probabilidade de estando o sistema em $|\psi\rangle$ achar $|\psi_2\rangle$? $|\lambda_2|^2$.

⋆ Qual é a probabilidade de estando o sistema em $|\psi\rangle$ achar b_2? $|\lambda_2|^2$.

Tal interpretação pode nos levar, erroneamente, a pensar que $|\psi\rangle$ é uma mistura estatística de $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ com pesos $|\lambda_1|^2$ e $|\lambda_2|^2$, respectivamente.

Superposição de estados

- Ou seja, acreditar, erroneamente, que N sistemas no estado $|\psi\rangle$ equivalem à $N|\lambda_1|^2$ no estado $|\psi_1\rangle$ e $N|\lambda_2|^2$ no estado $|\psi_2\rangle$.
  Se tal interpretação fosse correta, a probabilidade de medir a_n, em um sistema no estado $|\psi\rangle$, seria $\mathcal{P}(a_n) \stackrel{?}{=} |\lambda_1|^2\mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2\mathcal{P}_2(a_n)$.
- De fato, sabemos o que esperar da medida de A para obter a_n :
  $\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 = \big(\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle\big)^\star \times \big(\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle\big) = |\lambda_1|^2|\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2|\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 + \big(\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle\big)^\star\lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle + \lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle\big(\lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle\big)^\star$, ou seja

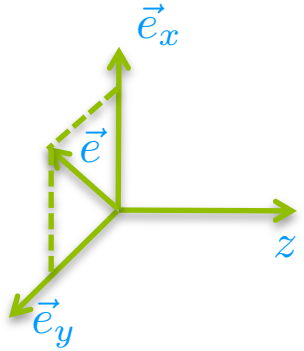
$$\mathcal{P}(a_n) = |\lambda_1|^2 \underbrace{|\langle u_n|\psi_1\rangle|^2}_{\mathcal{P}_1(a_n)} + |\lambda_2|^2 \underbrace{|\langle u_n|\psi_2\rangle|^2}_{\mathcal{P}_2(a_n)} + \underbrace{2\mathrm{Re}\{\lambda_1\lambda_2^\star\langle u_n|\psi_1\rangle\langle u_n|\psi_2\rangle\}}_{\text{efeitos de interferência}}.$$

- Note que se $\begin{cases} \lambda_1' = e^{i\phi}\lambda_1 \\ \lambda_2' = e^{i\phi}\lambda_2 \end{cases}$ onde ϕ é uma fase global $\Rightarrow \mathcal{P}'(a_n) = \mathcal{P}(a_n)$

A expressão que contém os efeitos de interferência corresponde à realidade experimental, o que indica que a expressão obtida pela mistura estatística não é correta.

Um exemplo com fótons polarizados e um sobre fases relativas

- Considere fótons propagando na direção Oz. Suponha $\vec{e} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$



Em analogia $\begin{cases} \text{seria errado imaginar que } N \text{ fótons} \\ \text{polarizados fossem equivalentes à} \\ N \times |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 \text{ na direção } \vec{e}_x + N \times |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 \text{ na direção } \vec{e}_y \end{cases}$

- ○ Por que sabemos que são diferentes? Coloque um analisador $\perp$ à $\vec{e}$. Quantos passam? Olhando para $\vec{e}$, sabemos que nenhum. No entanto, com a interpretação errônea $N \times |\dfrac{1}{\sqrt{2}}|^2$ na direção $\vec{e}_x + N \times |\dfrac{1}{\sqrt{2}}|^2$ na direção $\vec{e}_y$, metade dos fótons passam.

- A importância das fases relativas. Considere $\vec{e} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + e^{i\phi}\vec{e}_y)$. Note que

$\phi = 0 \colon \vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ linear; $\quad \phi = \pi \colon \vec{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y))$ linear;

$\phi = \dfrac{\pi}{2} \colon \vec{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \begin{cases} \text{circular} \\ \text{direita;} \end{cases} \quad \phi = -\dfrac{\pi}{2} \colon \vec{e}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)) \begin{cases} \text{circular} \\ \text{esquerda.} \end{cases}$

Esses quatro estados são fisicamente bastante diferentes!

Soma sobre estados intermediários

- Previsões de resultados experimentais em dois experimentos simples.

Experimento 1:

- Suponha que a observável A tenha sido medida e você tenha obtido o valor a não degenerado. Se $A|u_a\rangle = a|u_a\rangle$, qual é o novo estado do sistema imediatamente após a medida? Sabemos que ele colapsa para $|u_a\rangle$. Antes dele ter tempo de evoluir, meça C, tal que $[C, A] \neq 0$, qual é a probabilidade de se obter c?

$$\mathcal{P}_a(c) = |\langle v_c|u_a\rangle|^2.$$

Experimento 2:

- Agora meça rapidamente $A, B,$ e C, respectivamente ($A, B,$ e C não comutam entre si). Seja $\mathcal{P}_a(b, c) =$ probabilidade de se obter $a, b,$ e c, respectivamente. Quanto vale essa probabilidade? Pelo que estudamos seria $\mathcal{P}_a(b, c) = \mathcal{P}_a(b)\mathcal{P}_b(c)$.

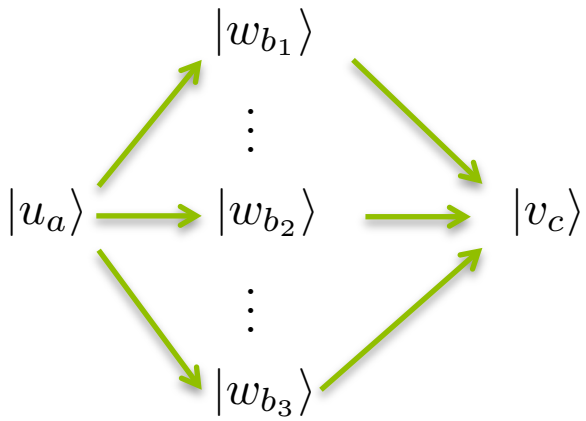
$$\text{Se } \begin{cases} A|u_a\rangle = a|u_a\rangle \\ B|w_b\rangle = b|w_b\rangle \\ C|v_c\rangle = c|v_c\rangle \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{P}_a(b, c) = |\langle w_b|u_a\rangle|^2 |\langle v_c|w_b\rangle|^2$$

- Quais seriam as diferenças fundamentais entre esses experimentos?

$$\text{Em ambos} \begin{cases} \text{após } \underbrace{\text{medir } A}_{\text{fixa o estado inicial}} \text{ tem-se } |u_n\rangle \\ \text{o estado final é } |v_c\rangle. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Podíamos pensar que em ambos,} \\ \text{antes de se atingir } |v_c\rangle\text{, o sistema} \\ \text{passou para } |w_b\rangle. \end{cases}$$

Soma sobre estados intermediários

- Analisaremos, considerando que $\begin{cases} \text{1o. experimento não tentamos medir } B \\ \text{2o. experimento medimos } B \end{cases}$



Poderíamos ficar tentados a acreditar que as duas experiências são equivalentes se somarmos os caminhos possíveis do experimento 2, isto é

$$\mathcal{P}_a(c) \stackrel{?}{=} \sum_b \mathcal{P}_a(b,c)$$

- Nós sabemos calcular a relação correta entre $\mathcal{P}_a(c)$ e $\mathcal{P}_a(b,c)$. Comece com o cálculo de $\langle v_c|u_a\rangle$, sabendo que $\sum_b |w_b\rangle\langle w_b| = \mathbb{1}$, e obtenha $\mathcal{P}_a(c) = |\langle v_c|u_a\rangle|^2$

Veremos que isso nos levará novamente à um termo de interferência!

Soma sobre estados intermediários

- Diferenças entre os experimentos $\mathcal{P}_a(c) \stackrel{?}{=} \sum_b \mathcal{P}_a(b,c)$ (continuação).

$$\mathcal{P}_a(c) = |\langle v_c|\big(\sum_b |w_b\rangle\langle w_b|\big)|u_a\rangle|^2 = \Big(\sum_{b'}\langle v_c|w_{b'}\rangle\langle w_{b'}|u_a\rangle\Big)^\star\Big(\sum_b\langle v_c|w_b\rangle\langle w_b|u_a\rangle\Big)$$

$\mathcal{P}_a(c) = \sum_{b'}\sum_b(\langle v_c|w_{b'}\rangle\langle w_{b'}|u_a\rangle)^\star\langle v_c|w_b\rangle\langle w_b|u_a\rangle$. Divida essas somas em dois grupos, um com $b' = b$ e outro com $b' \neq b$, e escreva

$$\mathcal{P}_a(c) = \underbrace{\sum_b |\langle v_c|w_b\rangle|^2|\langle w_b|u_a\rangle|^2}_{\sum_b \mathcal{P}_a(b,c)} + \underbrace{\sum_{b'\neq b}\sum_b\langle v_c|w_{b'}\rangle^\star\langle w_{b'}|u_a\rangle^\star\langle v_c|w_b\rangle\langle w_b|u_a\rangle}_{\text{interferência!}}$$

- Quando os estados intermediários do sistema não são determinados experimentalmente, são as amplitudes de probabilidade e não as probabilidades que deve ser somadas.

- No 2o. experimento cada vez que mediamos B perturbávamos o sistema (reduzindo o pacote de onda) e destruíamos a interferência.

Soma sobre estados intermediários

- Comentários sobre $\mathcal{P}_a(c) \neq \sum_b \mathcal{P}_a(b,c)$ (continuação).

  $1^{\underline{0}}$ No 1o. experimento o sistema não passa por um dos $|w_b\rangle$, mas sim por todos.

  $2^{\underline{0}}$ Na experiência de fótons com duas fendas, lembre: somamos $\vec{E}'s$ e não $|E|^{2'}s$.

  $3^{\underline{0}}$ A hipótese de medidas rápidas pode ser relaxada, se soubermos H.

  Conclusão: $\begin{cases} \textit{vimos que a fórmula correta é do tipo o "quadrado da soma"} \\ \textit{e não a "soma dos quadrados".} \end{cases}$

- As previsões probabilísticas da teoria quântica são sempre obtidas a partir do quadrado do módulo da amplitude de probabilidade.

- Se não medimos estados intermediários, nunca pense em termos dos resultados que você poderia ter obtido se tivesse medido e sim em termos das amplitudes.

- Os estados devem ser linearmente superpostos,

  $\therefore$ a amplitude de probabilidade = soma das amplitudes parciais.

Soma sobre estados finais ortogonais

- Caso em que muitos estados podem ser associados com o mesmo resultado de medida, $\mathcal{P}(a_n) = \sum_i |\langle u_n^i | \psi_{\text{inicial}} \rangle|^2 \rightarrow$ note que isso é uma soma de quadrados!

  - Primeiro, observe que, havendo degenerescência, e dependendo da escolha de $|\psi\rangle$, muitos estados finais são possíveis. Considere $A|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle$, $i = 1...g_n$. Já aprendemos nesse curso que a realização da medida da quantidade física $\mathcal{A}$ não é suficiente para especificarmos o estado final (se ela não forma um CCOC por si só). Qualquer combinação de kets do subespaço $\mathcal{E}_n$ dos kets $\{|u_n^i\rangle\}$ têm autovalor a_n, ou seja, uma infinidade de estados finais estão associados com o mesmo autovalor e a seleção de um deles depende do estado $|\psi_{\text{inicial}}\rangle$. Isso pode ser visto pelo colapso do estado $|\psi_{\text{inicial}}\rangle$, por meio da medida de $\mathcal{A}$, quando a_n é obtido. Como já discutimos o novo estado é: $|\psi_{\text{final}}\rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|\psi_{\text{inicial}}\rangle}{\sqrt{\langle\psi_{\text{inicial}}|P_n|\psi_{\text{inicial}}\rangle}}$.
    Está claro que dependendo do estado inicial teremos um estado final diferente.

  - Já havíamos visto que $\mathcal{P}(a_n) = \sum_i |\langle u_n^i|\psi_{\text{inicial}}\rangle|^2 = \sum_j |\langle v_n^j|\psi_{\text{inicial}}\rangle|^2$ onde $\{|v_n^j\rangle\}$ é outra base de autokets de A em $\mathcal{E}_n$. As somas são iguais, mas as probabilidades $|\langle v_n^j|\psi_{\text{inicial}}\rangle|^2$ podem ser diferentes das $|\langle u_n^i|\psi_{\text{inicial}}\rangle|^2$.

Soma sobre estados finais ortogonais

- Note que um determinado estado $|\psi_{\text{inicial}}\rangle$ carrega as probabilidades de cada componente $|u_n^i\rangle$ associada à a_n ser encontrada. A soma destas probabilidades (sobre todo o subespaço $\mathcal{E}_n$) é a chance de encontrar a_n.
- Note, entretanto, que se o estado inicial for uma combinação de estados, seria preciso somar amplitudes e depois quadrar, isto é, se $|\psi_{\text{inicial}}\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$, use $\langle u_n^i|\psi_{\text{inicial}}\rangle = \lambda_1\langle u_n^i|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n^i|\psi_2\rangle$ em $\mathcal{P}(a_n) = \sum_i |\langle u_n^i|\psi_{\text{inicial}}\rangle|^2$.

- **Aparelhos de medida insuficientemente** (pobremente) **seletiva.**

  Do que se trata? Nosso aparelho tem, por definição, as seguintes características:
- Duas respostas: SIM ou NÃO (é fácil generalizar depois).
- Se o sistema está em um dado autoestado de A, cujo autovalor está incluído em um dado intervalo $\Delta \to$ o aparelho responde SIM (isso também vale para combinações de autoestados cujos autovalores estão em Δ). Vamos definir melhor o significado dessa combinação.
- Se o sistema está em um dado autoestado (ou combinação de autoestados) de A, cujo(s) autovalor(es) está(ão) fora do intervalo $\Delta \to$ o aparelho responde NÃO.

Aparelhos de medida

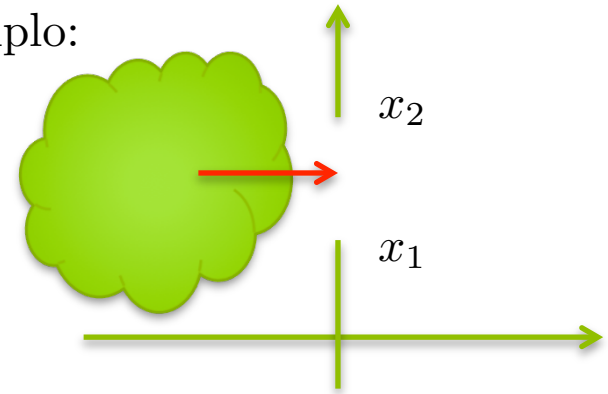
- Se em Δ existe apenas um a_n dizemos que o aparelho tem resolução infinita. Neste caso, a probabilidade de achar a_n é igual a probabilidade de se obter SIM. Qual seria a probabilidade de se obter NÃO? $\mathcal{P}(\text{NÃO}) = 1 - \mathcal{P}(\text{SIM})$.

- Se no intervalo Δ existem vários autovalores a_n de A, dizemos que o aparelho é insuficientemente seletivo.

- Digamos que existe um pacote de ondas chegando no nosso aparelho. O que esperar da função de onda depois que o pacote passa pelo aparelho? Que tal:

Transmite os autoestados de A associados aos autovalores incluídos em Δ e bloqueia o resto (filtro perfeito).

Exemplo:



só passam $x_1 < x < x_2$

Aparelho insuficientemente seletivo

- Descrição quântica $\begin{cases} \text{Para um aparelho insuficientemente} \\ \text{seletivo, diversos estados finais são} \\ \text{possíveis (os estados associados com} \\ \text{os autovalores do intervalo } \Delta). \end{cases}$

- O problema físico interessante está relacionado com "o que acontece com o pacote depois que ele entra no aparelho". Faremos um tratamento semelhante ao que foi dado aos estados degenerados. Para tanto, defina:

$$P_\Delta = \sum_{a_n \in \Delta} \underbrace{\sum_{i=1}^{g_n}}_{\text{degenerescência do } a_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|$$

  - Quais são os autovetores de P_Δ? Já vimos que projetores são observáveis e $\therefore$ seus autokets descrevem qualquer estado $|\psi\rangle = P_\Delta|\psi\rangle + (1 - P_\Delta)|\psi\rangle$, onde:

$$\text{os autokets de } P_\Delta \begin{cases} \text{os que } \in \mathcal{E}_\Delta, \text{ tem autovalor } 1 \to P_\Delta(\underbrace{P_\Delta|\psi\rangle}) = +1(\underbrace{P_\Delta|\psi\rangle}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq 0 \\ \text{os que } \notin \mathcal{E}_\Delta, \text{ tem autovalor } 0 \to P_\Delta\big(\overbrace{(1 - P_\Delta)|\psi\rangle}\big) = 0 \end{cases}$$

  - Note que $\begin{cases} \text{autoautovalor } 1 \to \text{SIM} \\ \text{autoautovalor } 0 \to \text{NÃO} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Nosso aparelho está de fato} \\ \text{medindo } P_\Delta \text{ e não } A. \end{cases}$

Aparelho insuficientemente seletivo

- Como ficariam os postulados sobre probabilidade de se obter um resultado e sobre o novo estado após a medida?

○ *Sobre as probabilidades:*

$$\mathcal{P}(\text{SIM}) = \sum_{a_n \in \Delta} \sum_{i=1}^{g_n} \left|\langle u_n^i | \psi \rangle\right|^2 \begin{cases} \text{A probabilidade de se obter a} \\ \text{resposta SIM é igual a} \\ \text{probabilidade de se encontrar o} \\ \text{autovalor } +1 \text{ da observável } P_\Delta. \end{cases}$$

$\mathcal{P}(\text{NÃO}) = 1 - \mathcal{P}(\text{SIM})$ sendo que podemos escrever $\mathcal{P}(\text{SIM}) = \langle \psi | P_\Delta | \psi \rangle$

○ *Sobre o colapso de $|\psi\rangle$ em $|\psi'\rangle$.*

Imediatamente após a medida de P_Δ temos: $|\psi'\rangle = \dfrac{P_\Delta |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_\Delta | \psi \rangle}}$, ou melhor:

$$|\psi'\rangle = \sum_{a_n \in \Delta} \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i | \psi \rangle \Big/ \sqrt{\sum_{a_n \in \Delta} \sum_{i=1}^{g_n} \left|\langle u_n^i | \psi \rangle\right|^2}$$

Afinal de contas, devemos somar amplitudes ou as probabilidades?

Somar amplitudes ou somar probabilidades?

- Inspiração para uma regra geral: a experiência de Young de fenda dupla.

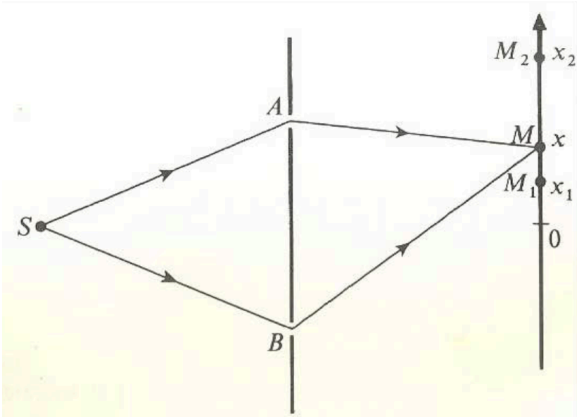


Fig. 8, Cap. 3, Livro texto

Suponha que você queira medir a probabilidade de um fóton bater entre x_1 e x_2.

- Quanto seria a intensidade da luz total que bate entre x_1 e x_2?

  Neste caso faríamos $\int_{x_1}^{x_2} I(x)dx$ com $I(x) \propto |\vec{E}(x)|^2 \rightarrow$ uma soma de quadrados!

- Quanto seria a intensidade da luz total em x?

  Neste caso faríamos $I(x) \propto |\vec{E}_A(x) + \vec{E}_B(x)|^2 \rightarrow$ somaríamos amplitudes antes de quadrar!

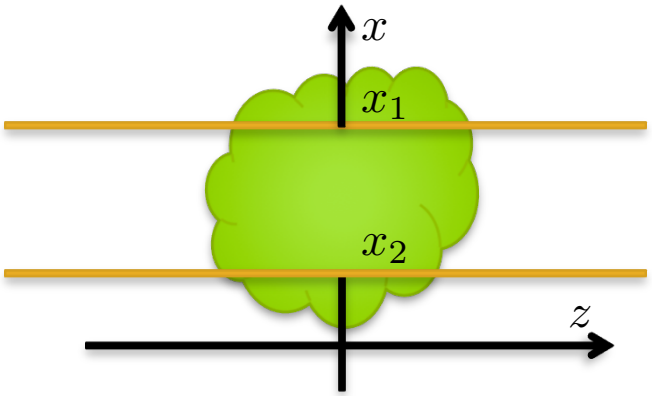
- **Regra geral:**

  Adicione amplitudes correspondendo ao mesmo estado final e depois as probabilidades correspondendo à estados finais ortogonais.

Aparelho insuficientemente seletivo

- Aplicação para o tratamento de espectro contínuo.
  - Quando a observável que queremos medir tem um espectro contínuo o "poder de resolução infinito é impossível". Isso é o mesmo que dizer:

    É impossível imaginar um aparato experimental que possa isolar um único autovalor pertencente à um conjunto contínuo de possibilidades.
  - Aparelhos insuficientemente seletivos podem nos ajudar nesse assunto. Comece perguntando, se $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r}|\psi\rangle$ é a função de onda de uma partícula, qual é a probabilidade de encontrar essa partícula dentro do intervalo $[x_1, x_2]$ do eixo x? Que tal responder: onde houver função de onda entre os planos laranjas, representados por retas na figura. Esses planos entram e saem perpendicularmente ao slide na direção do eixo y. Ou seja, onde a função de onda for diferente de zero na região entre os planos paralelos ao plano yz.



Qual é o subespaço $\mathcal{E}_\Delta$ associado *com esse resultado de medida?*

$$\textit{que tal?}\begin{cases} \textit{os kets } |\vec{r}\rangle = |x, y, z\rangle \\ \textit{com} \\ x_1 < x < x_2; \forall y; \forall z. \end{cases}$$

Aparelho insuficientemente seletivo

- Aplicação para o tratamento de espectro contínuo (continuação).
  - Um vez que os kets $|x,y,z\rangle$ são ortonormais (no sentido extendido) devemos simplesmente aplicar a regra que diz que basta adicionar as probabilidades correspondendo à estados finais ortogonais. Isto é:

$$\mathcal{P}(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz\left|\langle x,y,z|\psi\rangle\right|^2=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz\left|\psi(\vec{r})\right|^2$$

Note que trata-se da fórmula já estudada $\mathcal{P}(\text{SIM})=\langle\psi|P_\Delta|\psi\rangle$ com

$$P_\Delta=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz|x,y,z\rangle\langle x,y,z|$$

  - Como seria $|\psi'\rangle$, o estado obtido com o colapso de $|\psi\rangle$, devido à medida?

$|\psi'\rangle=\dfrac{P_\Delta|\psi\rangle}{N}$, com $N=\sqrt{\langle\psi|P_\Delta|\psi\rangle}$, obtido pela condição $\langle\psi'|\psi'\rangle=1$.

Ou ainda $|\psi'\rangle=\dfrac{1}{N}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz|x,y,z\rangle\langle x,y,z|\psi\rangle$ que na representação das coordenadas fica: $\psi'(\vec{r})=\langle\vec{r}|\psi'\rangle=\dfrac{1}{N}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}dy'\int_{-\infty}^{+\infty}dz'\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle\psi(\vec{r}\,')$

  - Como $\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle=\delta(\vec{r}-r\,')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$, temos:

$$\psi'(\vec{r})=\frac{1}{N}\int_{x_1}^{x_2}dx'\delta(x-x')\psi(x',y,z)=\begin{cases}\frac{1}{N}\psi(x,y,z)\text{ se }x_1<x<x_2\\ 0\text{ se }x>x_1\text{ ou }x>x_2\end{cases}$$

Aparelho insuficientemente seletivo

- Aplicação para o tratamento de espectro contínuo (continuação).
  - A parte de $\psi(\vec{r})$ correspondente ao intervalo aceito pelo aparato de medida persiste inalterada imediatamente após a medida (o fator $\dfrac{1}{N}$ aparece só para normalizar $\psi'(x, y, z)$. Note entretanto que o restante de $\psi(x, y, z)$ é suprimido pelo experimento.

Comentários.

1º Chamaremos isso de redução do pacote de onda.

2º Se um número grande de partículas é enviado para o aparato, o resultado será:

☐ SIM para algumas $\rightarrow$ as partículas continuam, começando no estado $|\psi'\rangle$.

☐ NÃO para outras $\rightarrow$ absorvidas pela tela.

3º Lembre que $\begin{cases} \text{SIM tem probabilidade } \mathcal{P}(\text{SIM}) \text{ de ocorrer.} \\ \text{NÃO tem probabilidade } \mathcal{P}(\text{NÃO}) \text{ de ocorrer.} \end{cases}$

Vamos reescrever o postulado 4 (colapso da função de onda), caso espectro continuo, chamando-o de:

Aparelho insuficientemente seletivo

- **Postulado de redução de pacotes de onda de um espectro contínuo.**

  Se a medida de $\mathcal{A}$ sobre um sistema em um estado $|\psi\rangle$ deu um resultado α_0 dentro de $\Delta\alpha$ $(\forall\alpha \to \alpha_0 - \dfrac{\Delta\alpha}{2} < \alpha < \alpha_0 + \dfrac{\Delta\alpha}{2})$, o sistema imediatamente após a medida é descrito por

$$|\psi'\rangle = \frac{P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)|\psi\rangle}} \text{ onde } P_{\Delta\alpha}(\alpha_0) = \int_{\alpha_0-\frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}} d\alpha\ |v_\alpha\rangle\langle v_\alpha|$$

  - Note que $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} P_{\Delta\alpha}(\alpha_0) = d\alpha|v_\alpha\rangle\langle v_\alpha|$ e $d\mathcal{P}(\alpha) = \langle\psi|P_{\Delta\alpha}(\alpha_0)|\psi\rangle = d\alpha|\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2$ e recuperamos o postulado 4 original.
  - As figuras mostram a redução do pacote. Na prática $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}$ não é possível!

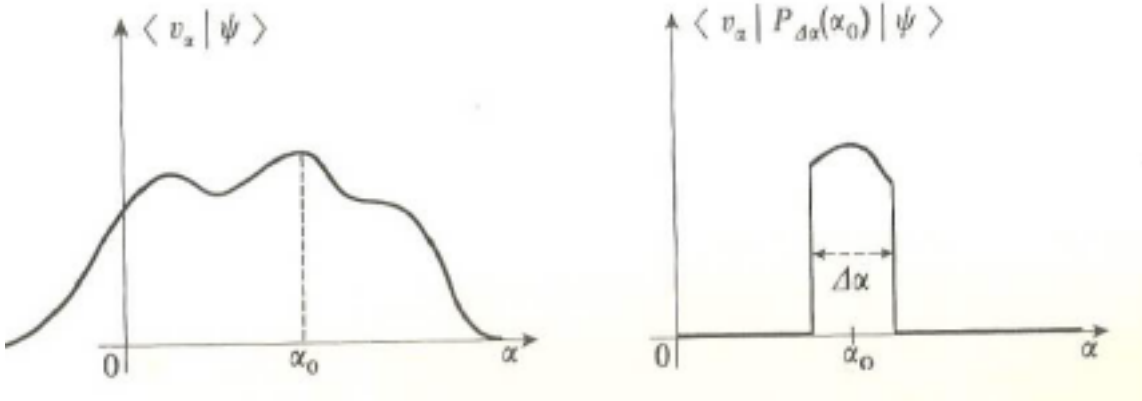


Fig. 9, Cap. 3 do livro texto