Spin ½ - Ilustrando os postulados

- Discutiremos algumas experiências com partículas de spin $1/2$ para ilustrar os postulados da Mecânica Quântica.
- Um bom começo é preparar estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Para tanto basta passar um feixe de partículas com spin $1/2$ por um experimento de Stern-Gerlach. As partículas que desviarem para "cima" (defina z como sendo o eixo onde $\vec{B}$ varia fortemente) estarão no estado $|+\rangle$ e as que desviaram para "baixo", no estado $|-\rangle$.

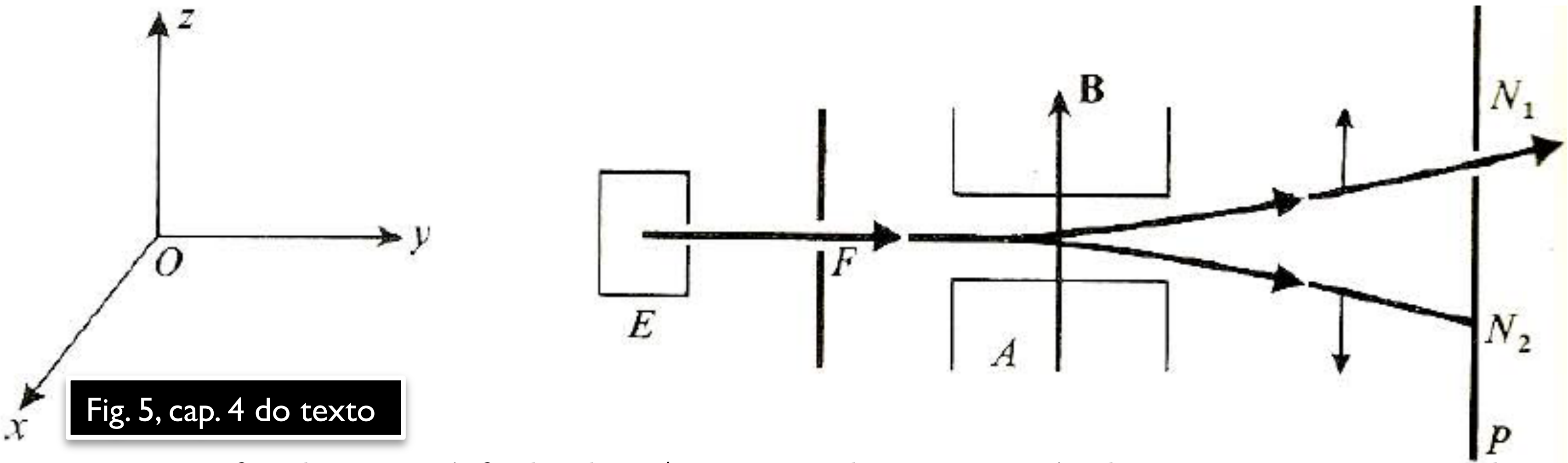


Fig. 5, cap. 4 do texto

- Note que a fenda 2 está fechada. Assim, todas as partículas que passarem pelo anteparo P (no caso, só pela fenda 1) estarão no estado $|+\rangle$.
- O que aconteceria se fizéssemos um novo experimento de Stern-Gerlach para o feixe de partículas que saem pela fenda 1? Se o campo magnético fosse como o do primeiro experimento, todas as partículas desviariam para a cima.

Instituto de Física Gleb Wataghin

Spin ½ - Ilustrando os postulados

- E se quiséssemos preparar o sistema em um auto estado de S_x? Para tanto, bastaria passar um feixe de partículas com spin 1/2 por um experimento de Stern-Gerlach, conforme a figura (campo magnético variando fortemente na direção x).
- Nesse experimento, todas as partículas que passassem pela fenda 1 estaríam no estado $|+\rangle_x$.

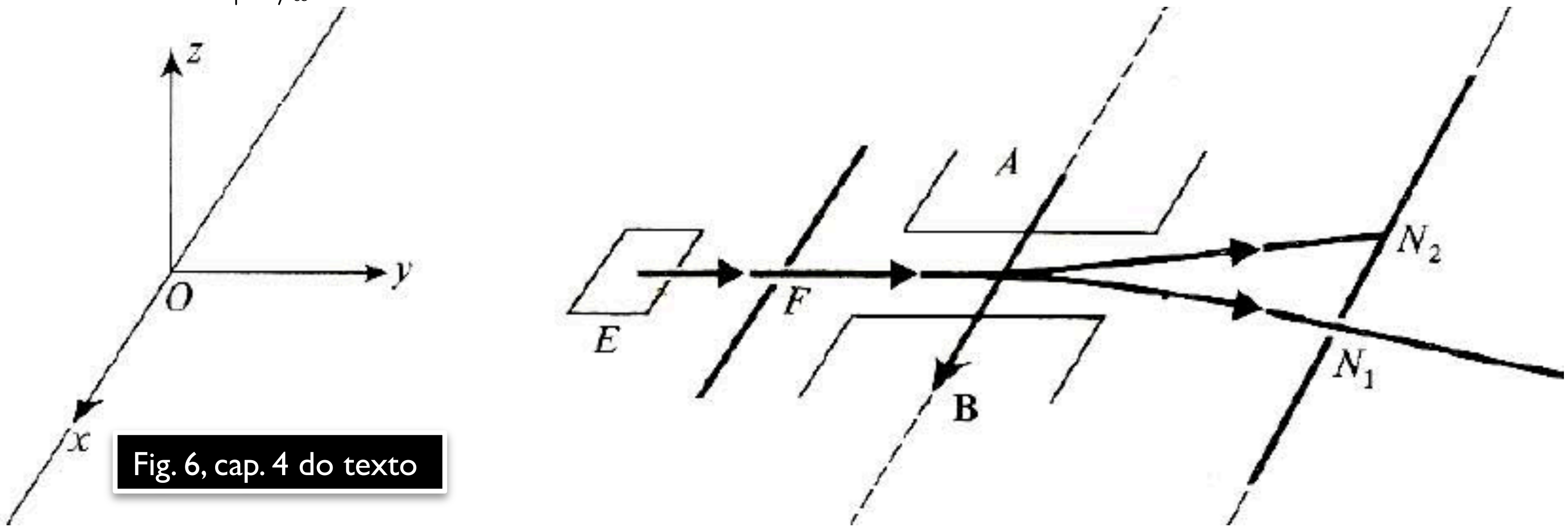
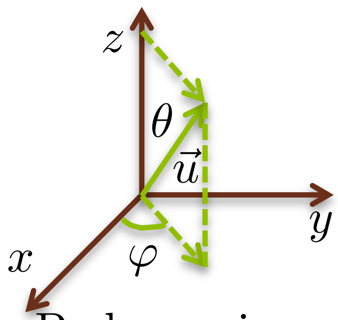


Fig. 6, cap. 4 do texto

- Se fechássemos a fenda 1 e abríssemos a fenda 2, obteríamos o sistema no estado $|-\rangle_x$.
- Como preparar o sistema nos estados $|+\rangle_u$ e $|-\rangle_u$? Basta colocar $\vec{B} \parallel \vec{u}$, onde $\vec{u} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

Spin ½ e sistemas de dois níveis



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Conforme vimos na aula passada,} \\ \vec{u} \text{ é um vetor unitário definido por:} \\ \vec{u} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\ \text{onde } \theta \text{ e } \varphi \text{ estão indicados na figura.} \end{cases}$$

- Podemos imaginar o feixe vindo perpendicularmente ao plano contendo $\vec{u}$ e o eixo z da figura. A escolha do plano (qualquer um que contenha $\vec{u}$ serve) e da direção do feixe é arbitrária, basta que passe pelo campo magnético variando fortemente na direção $\vec{u}$.
- Em $\forall$ escolha $\begin{cases} \text{desvio ao longo de } \vec{u} \rightarrow |+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{+i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle \\ \\ \text{desvio contrário a } \vec{u} \rightarrow |-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{+i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle \end{cases}$
- Será que esse experimento pode ser útil para preparar o sistema em um estado geral $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$, sendo que α e β são números complexos de sua escolha que satisfaçam $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$? A resposta é sim. Para isso, basta que encontremos θ e φ que tornem $|+\rangle_u$ colinear com $|\psi\rangle$. Se isso sempre for possível, o estado $|+\rangle_u$ de um experimento de Stern-Gerlach com campo fortemente variável na direção $\vec{u}$, preparará $|+\rangle_u = e^{-i\frac{\chi}{2}}|\psi\rangle$ (diferem apenas por uma fase global - o $\chi/2$ é de quem sabe a resposta).

Spin ½ e sistemas de dois níveis

- Se queremos $|+\rangle_u$ colinear com $|\psi\rangle$, precisamos impor $\begin{cases} |\alpha| = |\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}| \\ |\beta| = |\sin\frac{\theta}{2}e^{+i\varphi}| \end{cases}$

  Isso é o mesmo que pedir que $\begin{cases} |\alpha| = \cos\frac{\theta}{2} \\ |\beta| = \sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$ se tomarmos $0 \leq \theta \leq \pi$.

  Nesta condições $\cos\dfrac{\theta}{2} \geq 0$ e $\sin\dfrac{\theta}{2} \geq 0$ e $\tan\dfrac{\theta}{2} = |\dfrac{\beta}{\alpha}|$ define θ de forma única.

- Sabemos que somente as diferenças de fase entre α e β afetam as previsões físicas. Assim chame $\begin{cases} \varphi \equiv \arg\beta - \arg\alpha \\ \chi \equiv \arg\beta + \arg\alpha \end{cases}$ e obtenha $\begin{cases} \arg\beta = \frac{1}{2}\chi + \frac{1}{2}\varphi \\ \arg\alpha = \frac{1}{2}\chi - \frac{1}{2}\varphi \end{cases}$

- Use isso para escrever

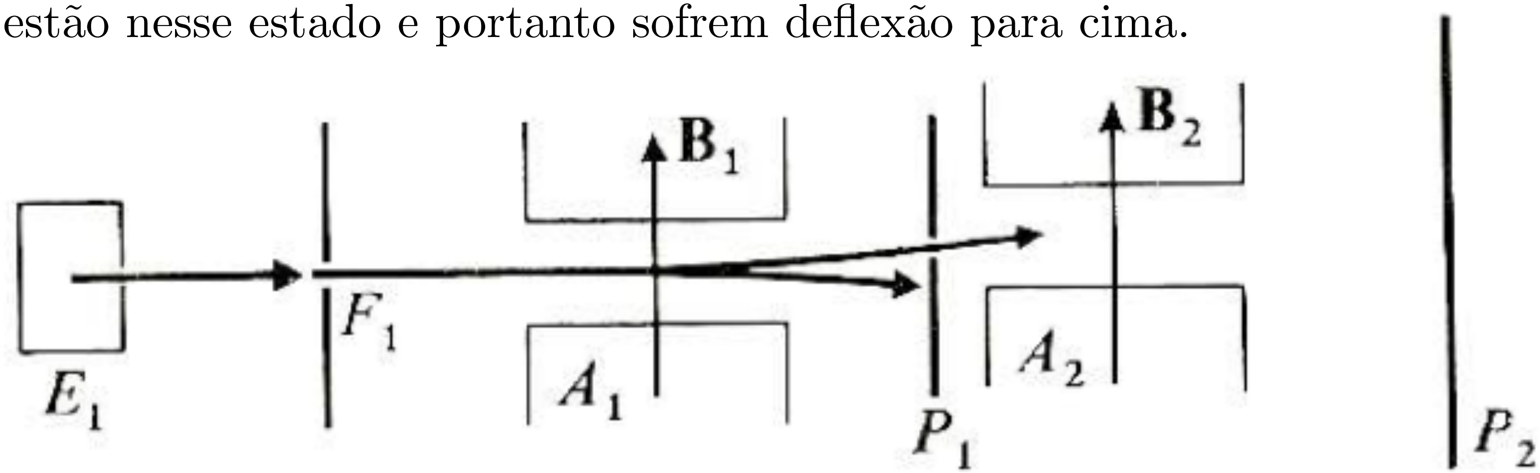
$$|\psi\rangle = |\alpha|e^{i\arg\alpha}|+\rangle + |\beta|e^{i\arg\beta}|-\rangle = e^{i\frac{\chi}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{+i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle\right) = e^{i\frac{\chi}{2}}|+\rangle_u$$

- As escolhas $\begin{cases} \tan\frac{\theta}{2} = |\frac{\beta}{\alpha}| \\ \varphi = \arg\beta - \arg\alpha \\ \chi = \arg\beta + \arg\alpha \end{cases}$ $\Rightarrow$ tornam $|+\rangle_u$ colinear com o $|\psi\rangle$ desejado.

Aprendemos com isso a colocar o sistema em um estado arbitrário $|\psi\rangle$. Isso foi feito para um sistema de spin $1/2$, mas a estratégia pode ser utilizada para sistemas mais complexos.

Medidas de spin – colocar magnetos um atrás do outro

- A figura abaixo mostra a situação com dois experimentos de Stern-Garlech alinhados ($\vec{B}_1 \parallel \vec{B}_2$). Todos os átomos que forem empurrados para cima no aparelho A_1 sofrerão o mesmo efeito em A_2. Isso é porque qualquer que seja o estado do átomo antes dele chegar em A_1, a medida causa o colapso do estado para o estado $|+\rangle$. Todos os átomos que chegam no aparelho A_2 estão nesse estado e portanto sofrem deflexão para cima.

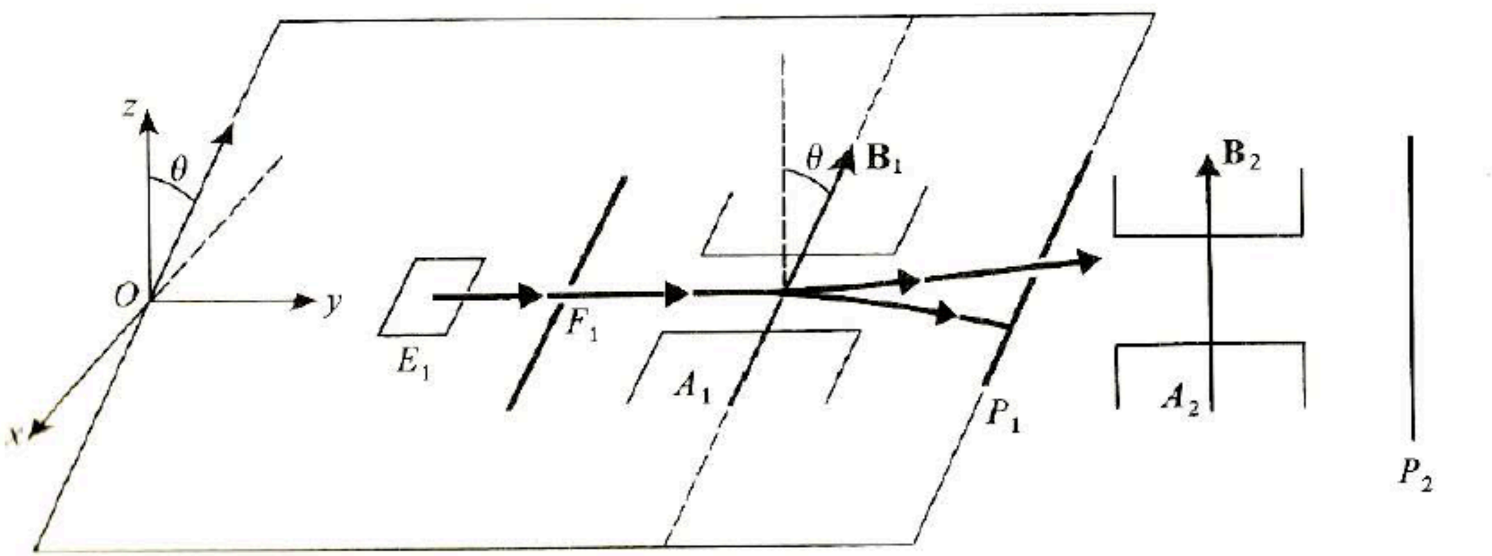


- Esta experiência é uma clara confirmação da validade do postulado 5 (a medida causa um colapso do estado original para o autoestado associado ao autovalor medido da observável S_z. No caso o autoestado $|+\rangle$ associado ao autovalor $+\hbar/2$. Note que nenhum átomo em A_2 moveria para baixo.

- O átomo em A_2 está no estado $|+\rangle, \therefore$ medir $\mathcal{S}_z \begin{cases} \mathcal{P}(+\hbar/2) = 1 \\ \mathcal{P}(-\hbar/2) = 0 \end{cases}$

Medidas de spin – colocar magnetos um atrás do outro

- A figura abaixo mostra a situação com dois experimentos de Stern-Garlech desalinhados (B_1 faz $\angle\,\theta$ com B_2). Todos os átomos que forem empurrados para cima no aparelho A_1 saem no estado $|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{+i\frac{\varphi}{2}}|-\rangle$ com $\varphi = 0$ (nossa escolha). Ou seja em uma combinação de autoestados de S_z dada por $|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$. Quais são os resultados possíveis em A_2 e com que probabilidades? (Note que a figura é para $\varphi = \pi$ e não $\varphi = 0$).



- Nesse experimento, o postulado de decomposição espectral é prontamente verificado $\begin{cases}\mathcal{P}(+\hbar/2) = |\langle + | \Psi\rangle|^2 = \cos^2\theta/2 \\ \mathcal{P}(-\hbar/2) = |\langle - | \Psi\rangle|^2 = \sin^2\theta/2\end{cases} \Rightarrow \mathcal{P}(+\hbar/2) + \mathcal{P}(-\hbar/2) = 1$

Medidas de spin – colocar magnetos um atrás do outro

- Considere um experimento conforme figura do slide anterior, mas com o aparelho A_2, medindo $\mathcal{S}_x$ e não $\mathcal{S}_z$. Neste caso, quais seriam as chances de se obter $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$?

  Novamente após passar por A_1 os átomos estarão no estado

$$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle.$$

  Se queremos informação sobre a observável S_x, precisamos do operador unidade $\mathbb{1} = |+\rangle_{x\,x}\langle +| + |-\rangle_{x\,x}\langle -|$ para escrever $|\psi\rangle = |+\rangle_u$ nesta base, isto é:

$$|+\rangle_u = \mathbb{1}|+\rangle_u = |+\rangle_{x\,x}\langle +|+\rangle_u + |-\rangle_{x\,x}\langle -|+\rangle_u$$

- Isso informa que ao medir $\mathcal{S}_x$, teremos $\begin{cases} \mathcal{P}(+\hbar/2) = |{}_x\langle +|+\rangle_u|^2 \\ \mathcal{P}(-\hbar/2) = |{}_x\langle -|+\rangle_u|^2 \end{cases}$

Sabendo que $\begin{cases} |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right) \end{cases}$ teremos amplitudes

dadas por $\begin{cases} {}_x\langle +|+\rangle_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta/2 + \sin\theta/2\right) = \cos\left(\pi/4 - \theta/2\right) \\ {}_x\langle -|+\rangle_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta/2 - \sin\theta/2\right) = \sin\left(\pi/4 - \theta/2\right) \end{cases}$

e $\therefore \begin{cases} \mathcal{P}(+\hbar/2) = \cos^2\left(\pi/4 - \theta/2\right) \\ \mathcal{P}(-\hbar/2) = \sin^2\left(\pi/4 - \theta/2\right) \end{cases}$ Esperado? $\begin{cases} \text{Troque } \underbrace{\theta}_{\angle\, \hat{z}\&\vec{B}} \rightarrow \underbrace{\pi/2 - \theta}_{\angle\, \hat{x}\&\vec{B}} \text{ no} \\ \text{experimento anterior} \end{cases}$

Medidas de spin – Valores médios

- Considere novamente a figura do slide 6 com $\varphi = 0$. Os átomos que saem pela fenda em P_1 estão no estado $|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$. Se medíssemos agora o spin na direção $\hat{z}$, qual seria o valor médio dos resultados obtidos?

  Duas formas de calcular essa média:

- ○ Primeiro considere as probabilidades previstas no postulado 4. Se medirmos $\mathcal{S}_z$, em um sistema que se encontra no estado $|+\rangle_u$, as probabilidades de encontrar os autovalores são $\begin{cases} \mathcal{P}(+\hbar/2) = |\langle +|+\rangle_u|^2 = \cos^2\theta/2 \\ \mathcal{P}(-\hbar/2) = |\langle -|+\rangle_u|^2 = \sin^2\theta/2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ se realizássemos $\mathcal{N}$ medidas esperaríamos encontrar

$$\langle S_z\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}\left[\frac{\hbar}{2}\mathcal{N}\cos^2\theta/2 - \frac{\hbar}{2}\mathcal{N}\sin^2\theta/2\right] = \frac{\hbar}{2}\cos\theta.$$

- ○ Outra forma de calcular a média seria segundo a fórmula $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$, que fornece $\langle S_z\rangle = {}_u\langle +|S_z|+\rangle_u = \cos^2\theta/2\langle +|S_z|+\rangle + \sin^2\theta/2\langle -|S_z|-\rangle +$

$$+\cos\theta/2\sin\theta/2\big[\underbrace{\langle +|S_z|-\rangle}_{0} + \underbrace{\langle -|S_z|+\rangle}_{0}\big] = \frac{\hbar}{2}\cos^2\theta/2 - \frac{\hbar}{2}\sin^2\theta/2 = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

- E se medíssemos $\mathcal{S}_x$, qual seria a média dos valores obtidos? Em seguida, aplicaremos as duas fórmulas acima para obter $\langle S_x\rangle$.

Medidas de spin – Valores médios

- Primeiro considere as probabilidades previstas no postulado 4. Se medirmos $\mathcal{S}_x$, em um sistema que se encontra no estado $|+\rangle_u(\varphi=0)$, as probabilidades de obter os autovalores são $\begin{cases}\mathcal{P}(+\hbar/2)=|_x\langle+|+\rangle_u|^2=\cos^2(\pi/4-\theta/2)\\ \mathcal{P}(-\hbar/2)=|_x\langle-|+\rangle_u|^2=\sin^2(\pi/4-\theta/2)\end{cases}$ conforme vimos no slide 7. Se realizássemos $\mathcal{N}$ medidas esperaríamos encontrar

$$\langle S_x\rangle=\frac{1}{\mathcal{N}}\left[\frac{\hbar}{2}\mathcal{N}\cos^2(\pi/4-\theta/2)-\frac{\hbar}{2}\mathcal{N}\sin^2(\pi/4-\theta/2)\right]=\frac{\hbar}{2}\cos(\pi/2-\theta)=\frac{\hbar}{2}\sin\theta.$$

- A outra forma de calcular a média seria segundo a fórmula $\langle A\rangle=\langle\psi|A|\psi\rangle$, que forneceria $\langle S_x\rangle={}_u\langle+|S_x|+\rangle_u=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix}.$

Ou seja, $\langle S_x\rangle=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}2\sin\theta/2\cos\theta/2=\frac{\hbar}{2}\sin\theta.$

- Seguindo um raciocínio clássico, quais seriam as componentes do momento angular após o feixe te sido polarizado por $\vec{B}_1$ do slide 6? $\begin{cases}\frac{\hbar}{2}\cos\theta\ \hat{z}\\ \frac{\hbar}{2}\sin\theta\ \hat{x}\end{cases}$

Medidas de spin – Valores médios

- Relaxe agora a condição de $\varphi = 0$. Os átomos que saem do aparelho A_1 estarão no estado $|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{+i\varphi/2}|-\rangle$. Que previsão podemos fazer sobre os valores médios de $\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y,$ e $\mathcal{S}_z$? Basta usar $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$.
  - Comece por $\langle S_z\rangle = {}_u\langle +|S_z|+\rangle_u,$ isto é:

$$\langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta/2e^{+i\varphi/2} & \sin\theta/2e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2e^{-i\varphi/2}\\ \sin\theta/2e^{+i\varphi/2}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta.$$

  - Em seguida, calcule $\langle S_x\rangle = {}_u\langle +|S_x|+\rangle_u,$ que na forma matricial é dada por:

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta/2e^{+i\varphi/2} & \sin\theta/2e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2e^{-i\varphi/2}\\ \sin\theta/2e^{+i\varphi/2}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sin\theta/2e^{-i\varphi/2} & \cos\theta/2e^{+i\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2e^{-i\varphi/2}\\ \sin\theta/2e^{+i\varphi/2}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\theta/2\sin\theta/2\left(e^{-i\varphi} + e^{+i\varphi}\right) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi.$$

  - De forma análoga, calcule $\langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi$

Estes valores médios são iguais às componentes clássicas do momento angular de módulo $\hbar/2$, orientado ao longo do vetor $\vec{u}$, cujos ângulos polares são: θ e φ.

Note, entretanto que cada medida fornece: $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$.

Conexão entre física clássica e quântica

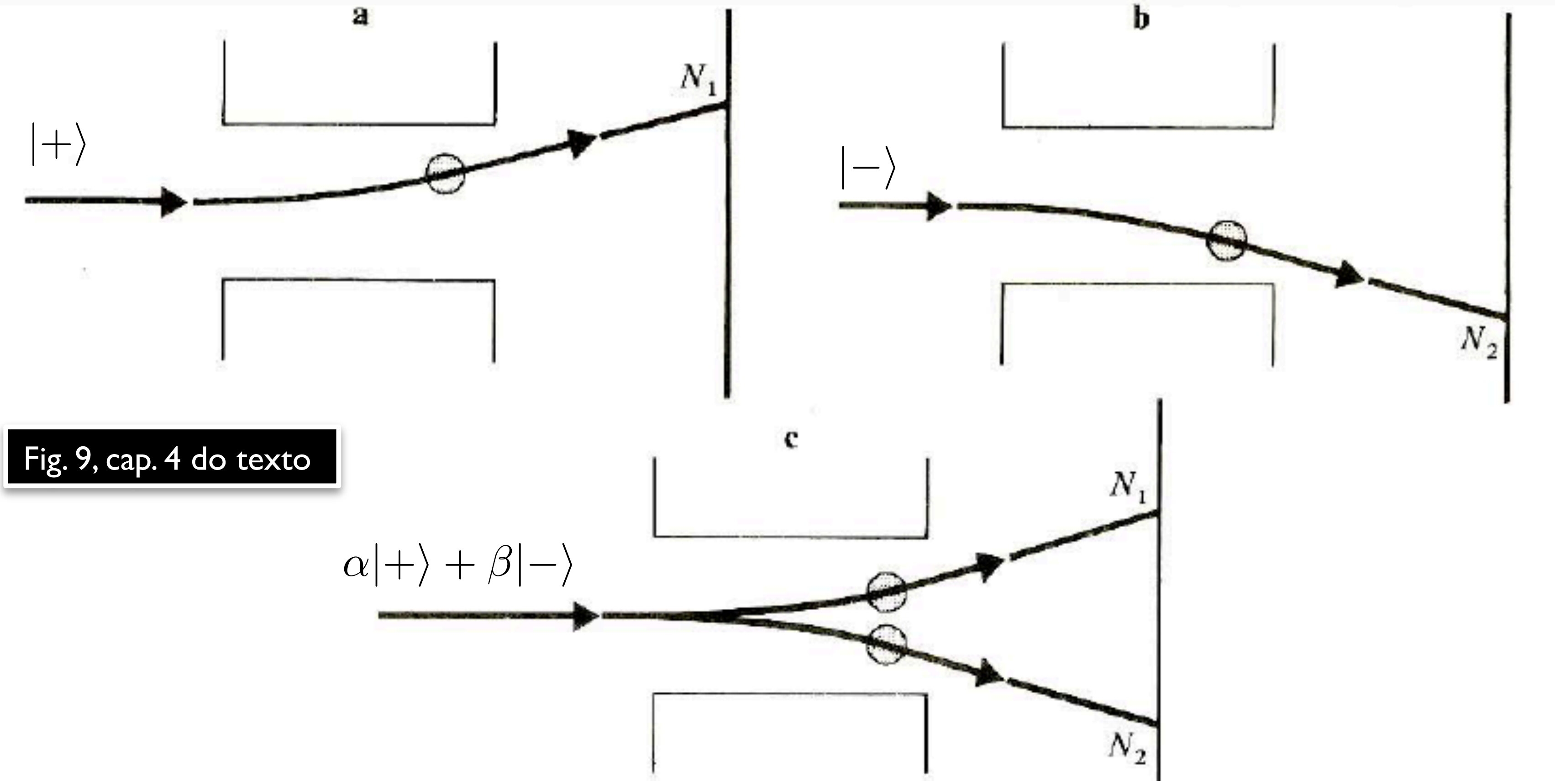


Fig. 9, cap. 4 do texto

- A equação de Schrödinger é linear: a solução de (c) é a combinação das soluções de (a) e (b). Se o pacote é pequeno e o seu centro se move segundo as leis clássicas, (a) e (b) mostram que $\vec{r}$ e $\vec{p}$ podem ser tratados classicamente.
- O mesmo ocorre na situação (c), exceto que o pacote está dividido (combinação de duas trajetórias clássicas). A partícula não segue nenhuma delas (segue as duas - até que se meça onde ela se encontra).

Evolução temporal de uma partícula com spin ½ em $\vec{B}$ constante

- Como seria a Hamiltoniana clássica do sistema, considerando que um campo magnético homogêneo atue sobre uma partícula com momento magnético permanente? Levando em conta apenas as coordenadas internas, teríamos para $\vec{B} = B_0\hat{z}$ atuando em um átomo como momento magnético constante $\vec{\mathcal{M}} = \gamma\vec{\mathcal{J}},$ uma energia potencial clássica dada por

$$U = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = -\mathcal{M}B_0 = -\gamma B_0 \mathcal{J}_z$$

- As unidades de U (energia) são $\dfrac{[M][L]^2}{[T]^2}$ (tomei as de $\dfrac{1}{2}mv^2$) e as unidades de $\mathcal{J}_z$ (momento angular) são $\dfrac{[L][M][L]}{[T]}$ (tomei as de $\vec{r} \times \vec{p}$). Isso permite concluir que as unidades de $-\gamma B_0 \equiv \omega_0$ são de velocidade angular $\dfrac{1}{[T]}$.
- A Hamiltoniana quântica fica $H = \omega_0 S_z,$ onde trocamos $\mathcal{J}_z = \mathcal{S}_z$ por S_z.
- Um sistema governado por essa Hamiltoniana é conservativo, pois ela não depende do tempo, $H(t) = H$. Conforme vimos, a evolução temporal de qualquer estado deste sistema é facilmente obtida, se expandirmos este estado como combinação dos estados estacionários. Para obter os estados estacionários, basta resolver a equação de autovalor:

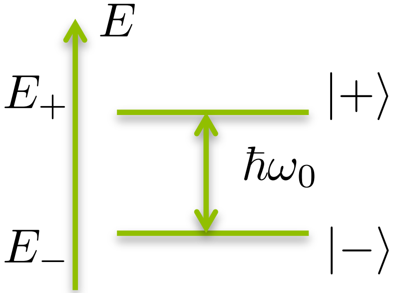
$$H|E,\tau\rangle = E|E,\tau\rangle$$

Evolução temporal de uma partícula com spin ½ em $\vec{B}$ constante

- Como a Hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, é proporcional à S_z, já temos a solução. Os autokets de H são os mesmos que os autokets de S_z e os autovalores precisam apenas ser multiplicados por ω_0, ou seja

$$H|\pm\rangle = \omega_0 S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar\omega_0}{2}|\pm\rangle$$

- Existem apenas duas energias e elas são não degeneradas. Para esse sistema existe apenas uma freqüência de Bohr $\nu_{+-} = \dfrac{1}{h}(E_+ - E_-) = \dfrac{\hbar}{h}\omega_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.



Comentários

$$\left\{\begin{array}{l} \circ\ \text{usei que } \gamma_{\text{prata}} < 0 \text{ e } \therefore\ \omega_0 > 0 \Rightarrow E_- < E_+. \\ \\ \circ\ \text{Se } \vec{B} = B_0\vec{u},\ \text{basta escrever } H = \omega_0 S_u. \end{array}\right.$$

- Precessão de Larmor.
  Suponha que o sistema com esta Hamiltoniana H esteja em $t = 0$ no estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_u = \cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin\dfrac{\theta}{2}e^{+i\varphi/2}|-\rangle$. Lembre que qualquer ket do tipo $\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ pode ser escrito neste formato. Como seria $|\psi(t)\rangle$?

Evolução temporal de uma partícula com spin ½ em $\vec{B}$ constante

- $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_u$ corresponde ao ket associado ao autovalor $\hbar/2$ de um experimento de Stern-Gerlach com campo magnético direcionado para $\vec{u}$, definido por (θ, φ) em coordenadas esféricas. Para preparar o sistema neste estado, precisaríamos realizar esse experimento antes.
- Já aprendemos a calcular $|\psi(t)\rangle$. Basta inserir as fases apropriadas aos estados estacionários e obter $|\psi(t)\rangle = \cos\dfrac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t}|+\rangle + \sin\dfrac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t}|-\rangle$. Mas $E_\pm = \pm\dfrac{\hbar\omega_0}{2} \Longrightarrow |\psi(t)\rangle = \cos\dfrac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2}|+\rangle + \sin\dfrac{\theta}{2} e^{+i(\varphi+\omega_0 t)/2}|-\rangle$.
- Note que esse estado corresponde ao $|+\rangle_u$ de um experimento de Stern-Gerlach com campo magnético direcionado para $\vec{u}$, definido agora por $(\theta, \varphi + \omega_0 t)$.
- O estado parece estar precessionando ao redor de $B_0\hat{z}$ com velocidade angular ω. Digo "parece" devido à um resultado estranho $|\psi(t{+}2\pi/\omega_0)\rangle = -|\psi(t)\rangle$. Para obter $|\psi(t)\rangle$ novamente é preciso esperar $\dfrac{4\pi}{\omega_0}$. Note $\mathcal{P}(+) = \cos^2\theta/2; \mathcal{P}(-) = \sin^2\theta/2$
- Um bom exercício é obter valores médios de $\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y$ e $\mathcal{S}_z$. Note que $[S_z, H] = 0$, $[S_x, H] \neq 0$ e $[S_y, H] \neq 0$ e calcule $\langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle = (\hbar/2)\sin\theta\cos(\varphi + \omega_0 t)$; $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle = (\hbar/2)\sin\theta\sin(\varphi + \omega_0 t)$; $\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = (\hbar/2)\cos\theta$.

Os valores médios rodam ao redor de $B_0\hat{z}$ com velocidade angular ω_0.