

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- O potencial de um oscilador harmônico em uma dimensão é dado por $\frac{1}{2}kx^2$.

Tal potencial gera uma força $F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Uma força de restauração.} \\ \text{Sempre atrativa para } x = 0. \end{array} \right.$

- Qual é a solução na mecânica clássica?

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \text{a partícula que em } t = 0 \text{ estava em} \\ x(0) = x_m \cos \varphi, \text{ com velocidade } \dot{x}(0) = x_m \omega \sin \varphi, \text{ oscila em} \\ \text{uma trajetória linear, com frequência angular } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{array} \right.$$

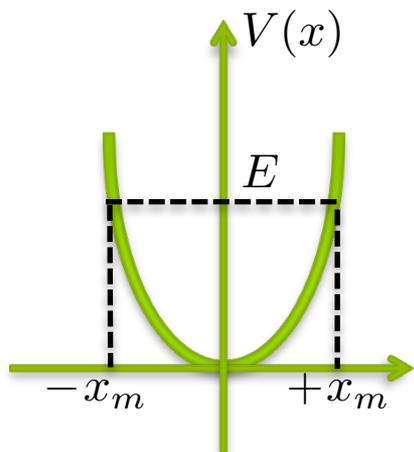
- Na mecânica quântica, além de ser uma boa descrição para qualquer fundo de poço (primeiro termo diferente de zero em uma expansão de Taylor), a ferramenta quântica que desenvolveremos (operadores de criação e destruição) será útil nos itens **d)**, **e)**, e **f)**, abaixo.

- Sua importância $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) espectroscopia molecular,} \\ \text{b) cristais e outras estruturas no estado sólido,} \\ \text{c) estrutura nuclear,} \\ \text{d) partículas idênticas e teoria de campo,} \\ \text{e) ótica,} \\ \text{f) mecânica estatística,} \\ \text{g) etc. Além de ser simples e pedagógico.} \end{array} \right.$

Alguns aspectos importantes do Oscilador Harmônico Simples

- Definição dos pontos de retorno clássicos.

$x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi)$ tem seus maiores valores absolutos em $\pm x_m$, quando $\cos(\omega t - \varphi) = \pm 1 \rightarrow (\omega t - \varphi) = n\pi$. Note que nesses pontos, as velocidades se anulam, pois $\dot{x}(t) = -x_m\omega \sin(n\pi) = 0$. A partícula, quando se move no sentido contrário à força, vai diminuindo sua velocidade até parar. Em seguida ela retorna, aumentando sua velocidade no mesmo sentido da força até atingir a posição $x = 0$. Após esse ponto o processo se repete. Os pontos de parada, $\pm x_m$, são conhecidos por pontos de retorno clássico. Um gráfico de energia mostra isso mais claramente.



$$E = T + V = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$$

$$\text{onde } \begin{cases} x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{x}(t) = -x_m\omega \sin(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad \text{e } k = m\omega^2$$

$$\text{Assim } E = \frac{1}{2}m(-x_m\omega \sin(\omega t - \varphi))^2 + \frac{1}{2}k(x_m \cos(\omega t - \varphi))^2$$

$$\text{Isso fornece } E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_m^2 \text{ (constante no tempo).}$$

- Fixando E podemos achar os pontos de retorno clássicos.

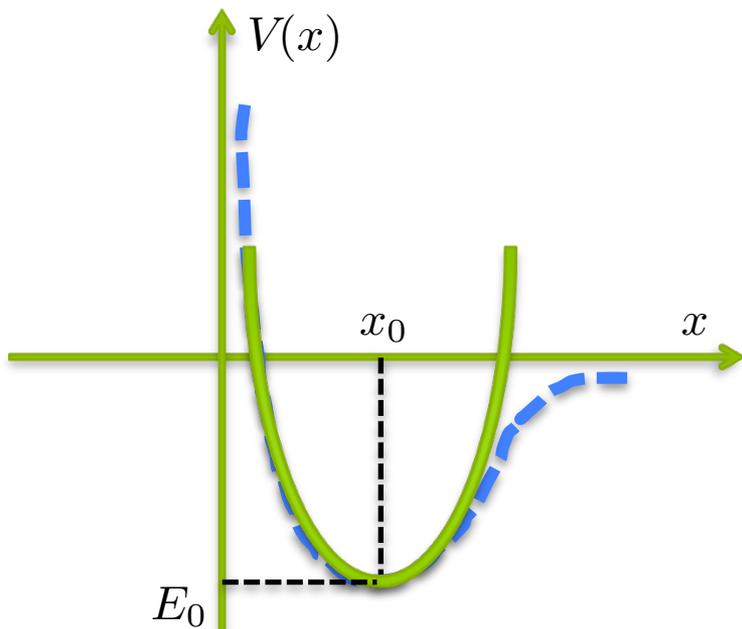
- Em $x = \pm x_m$ $\begin{cases} V(x) = E \text{ é máximo,} \\ T(\dot{x}) = 0 \text{ é mínimo.} \end{cases}$ Em $x = 0$ $\begin{cases} V(x) = 0 \text{ é mínimo,} \\ T(\dot{x}) = E \text{ é máximo.} \end{cases}$

Alguns aspectos importantes do Oscilador Harmônico Simples

- Uma aproximação razoável de potenciais com estrutura de mínimo.

A figura mostra uma possível curva de potencial de uma molécula diatômica.

Para $x \rightarrow 0$, os núcleos se repelem fortemente e para $x \rightarrow \infty$, a molécula dissocia. Ao redor do ponto de equilíbrio, x_0 , é possível aproximar a curva real por uma parábola. Os níveis vibracionais, próximos do fundo do poço desta molécula, podem ser obtidos nesta aproximação. De um modo geral podemos



escrever: $V(x) = V(x_0) + \underbrace{\frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_0}}_{0 \text{ (ponto de mínimo)}}(x - x_0) +$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \approx a + b(x - x_0)^2$$

com $a = V(x_0)$ e $b = \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x=x_0} > 0$ (mínimo).

A equação de Newton fica $m \frac{d^2x}{dt^2} = -2b(x - x_0)$

com $\omega = \sqrt{\frac{2b}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0}}$. Esta estratégia é geral e pode ser aplicada para qualquer potencial que tenha um mínimo local. Além disso, na mecânica quântica, ela cria bases úteis para o problema real.

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- Uma solução trivial do MHS, segundo a mecânica clássica.

A solução mais simples de $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0)$ é $\begin{cases} x(t) = x_0 \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t.$

Ela representa uma partícula eternamente em repouso. A mecânica quântica não aceita tal solução, pois ela violaria a relação de incerteza (neste caso $\Delta x \Delta p = 0$).

- Propriedades gerais da Hamiltoniana da Mecânica Quântica.

Fazendo a troca $\begin{cases} x \rightarrow X \\ p \rightarrow P \end{cases}$ a Hamiltoniana fica: $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$ com ω

igual ao valor clássico, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k$ (da lei de Hooke) e $[X, P] = i\hbar$.

- A equação que define os estados estacionários $H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$ pode ser escrita na representação das coordenadas $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] \varphi(x) = E\varphi(x)$.
 - Partícula prisioneira, \therefore espectro discreto. Só energias específicas satisfazem as condições de contorno. $E > 0$ (sempre maior que o fundo do poço).
 - As autofunções têm paridade bem definida $\varphi(-x) = \pm\varphi(x)$. Isso porque a Hamiltoniana é par na troca $x \rightarrow -x$ (ver complemento F_{II}).

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- *Autovalores da Hamiltoniana.*

Começamos definindo dois operadores auxiliares $\begin{cases} \hat{X} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \\ \hat{P} \equiv \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \end{cases}$

- Quanto vale o comutador $[\hat{X}, \hat{P}]$?

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X, \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \right] = \frac{[X, P]}{\hbar} = \frac{i\hbar}{\hbar} = i$$

- Como fica H em função de \hat{X} e \hat{P} ?

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 = \frac{m\hbar\omega}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \hat{X}^2 = \hbar\omega \frac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2}$$

Isso permite definir $\hat{H} \equiv \frac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2}$ e reduzir nosso problema para a equação de autovalor $\hat{H}|\varphi_\nu^i\rangle = \xi_\nu|\varphi_\nu^i\rangle$ (i é necessário, pois não discutimos degenerescência.)

- Operadores de criação (a^\dagger), de destruição (a), e contador ($N = a^\dagger a$) de quanta.

Definição $\begin{cases} a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \\ a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \end{cases}$ cuidado $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2} \neq a^\dagger a$, pois $[\hat{X}, \hat{P}] = i$.

$$a^\dagger a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) = \frac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2} + i \frac{(\hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X})}{2} = \hat{H} - \frac{1}{2}.$$

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- *Autovalores da Hamiltoniana (continuação).*
 - Com isso temos $\hat{H} = a^\dagger a + \frac{1}{2}$ e $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$ onde $N \equiv a^\dagger a$.
 Note que $[N, \hat{H}] = [N, H] = 0$ e que se houver degenerescência no espectro de H , nem \hat{H} , nem N podem quebrá-la. \therefore se resolvermos $N|\varphi_\nu^i\rangle = \nu|\varphi_\nu^i\rangle$, o problema estará resolvido, pois $H|\varphi_\nu^i\rangle = \hbar\omega\xi_\nu|\varphi_\nu^i\rangle = \hbar\omega(\nu + \frac{1}{2})|\varphi_\nu^i\rangle$, sendo que o índice i continua mantido para permitir degenerescência.
 - Como $(a^\dagger)^\dagger = a$, N é Hermiteano, pois $N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = N$.
 - $[a, a^\dagger] = \frac{1}{2}[\hat{X} + i\hat{P}, \hat{X} - i\hat{P}] = \frac{i}{2}[\hat{P}, \hat{X}] - \frac{i}{2}[\hat{X}, \hat{P}] = \frac{i}{2}(-i) - \frac{i}{2}(+i) = 1$.
 - Mostre que se tivéssemos iniciado a discussão com aa^\dagger , obteríamos $\hat{H} = aa^\dagger - \frac{1}{2}$.
- Será que N comuta com a ou com a^\dagger ?
 - $[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a]a = -a$
 - $[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = a^\dagger$.

Veremos que estas duas propriedades de comutação de N permitirão obter o espectro do OHS sem precisar resolver a equação diferencial.

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Autovalores da Hamiltoniana (continuação). Lemas:

Sobre os autovalores de N .

- Lema 1: os autovalores são positivos ou zero.

Considere $|\varphi_\nu^i\rangle$ tal que $N|\varphi_\nu^i\rangle = \nu|\varphi_\nu^i\rangle$. Quanto vale o o quadrado da norma de $a|\varphi_\nu^i\rangle$?

$$\|a|\varphi_\nu^i\rangle\|^2 = \langle\varphi_\nu^i|a^\dagger a|\varphi_\nu^i\rangle = \langle\varphi_\nu^i|N|\varphi_\nu^i\rangle = \langle\varphi_\nu^i|\nu|\varphi_\nu^i\rangle = \nu \geq 0$$

O que demonstra o lema: os autovalores de N não podem ser negativos.

Sobre $a|\varphi_\nu^i\rangle$.

- Lema 2: se
$$\begin{cases} \nu = 0 \rightarrow a|\varphi_\nu^i\rangle = 0 \\ \nu > 0 \rightarrow N(a|\varphi_\nu^i\rangle) = (\nu - 1)a|\varphi_\nu^i\rangle \end{cases}$$

- Vimos no lema 1 que $\|a|\varphi_\nu^i\rangle\|^2 = \nu$. A norma é zero só se o ket for o keto nulo, $\therefore a|\varphi_\nu^i\rangle = 0$ se $\nu = 0$. Note que se $a|\varphi_\nu^i\rangle = 0 \Rightarrow a^\dagger a|\varphi_\nu^i\rangle = 0 \therefore N|\varphi_\nu^i\rangle = 0|\varphi_\nu^i\rangle$.

Com isso aprendemos que $|\varphi_0^i\rangle$ é autoket de N com autovalor 0.

- Vimos que $[N, a] = -a$. Aplique isso em $|\varphi_\nu^i\rangle$ para obter:

$$[N, a]|\varphi_\nu^i\rangle = -a|\varphi_\nu^i\rangle \Rightarrow Na|\varphi_\nu^i\rangle = aN|\varphi_\nu^i\rangle - a|\varphi_\nu^i\rangle = (\nu - 1)a|\varphi_\nu^i\rangle, \text{ ou seja}$$

$$\underbrace{N}_{\text{autoket}} \underbrace{a}_{\text{autovalor}} \underbrace{|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} = \underbrace{(\nu - 1)}_{\text{autovalor}} \underbrace{a}_{\text{autoket}} \underbrace{|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} \Rightarrow a|\varphi_\nu^i\rangle \text{ é um autoket de } N \text{ com autovalor } \nu - 1.$$

autoket autovalor autoket

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Autovalores da Hamiltoniana (continuação). Lemas:

Sobre $a^\dagger |n, i\rangle$.

- Lema 3 $\begin{cases} a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle \text{ nunca é zero} \\ a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle \text{ é autoket de } N \text{ com autovalor } \nu + 1 \end{cases}$
- Para a primeira parte, calcule $\|a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle\|^2 = \langle \varphi_\nu^i | a a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle = \langle \varphi_\nu^i | 1 + a^\dagger a |\varphi_\nu^i\rangle$
 \downarrow
 $[a, a^\dagger] = 1$
- Isso fornece $\|a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle\|^2 = \langle \varphi_\nu^i | 1 + N |\varphi_\nu^i\rangle = (\nu + 1)$. Como $\nu \geq 0 \rightarrow \nu + 1 > 0$.
 Norma diferente de zero permite concluir que $a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle$ nunca é zero.
- Vimos que $[N, a^\dagger] = a^\dagger$. Aplique isso em $|\varphi_\nu^i\rangle$ para obter:
 $[N, a^\dagger] |\varphi_\nu^i\rangle = a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle \Rightarrow N a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle = a^\dagger N |\varphi_\nu^i\rangle + a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle = (\nu + 1) a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle$, ou seja

$$\underbrace{N}_{\text{autoket}} \underbrace{a^\dagger}_{\text{autovalor}} \underbrace{|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} = \underbrace{(\nu + 1)}_{\text{autovalor}} \underbrace{a^\dagger}_{\text{autoket}} \underbrace{|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} \Rightarrow a^\dagger |\varphi_\nu^i\rangle \text{ é autoket de } N \text{ com autovalor } \nu + 1.$$

A partir das propriedades de $a|\varphi_\nu^i\rangle$ e $a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle$ estamos prontos para calcular o espectro do OHS.

O espectro de N é composto de inteiros não negativos

- Já vimos que $N|\varphi_\nu^i\rangle = \nu|\varphi_\nu^i\rangle$ com $\nu \geq 0$.

Suponha que ν não é inteiro, $\therefore \exists n$, inteiro, tal que $n < \nu < n + 1$.

Considere uma série de vetores $\{|\varphi_\nu^i\rangle, a|\varphi_\nu^i\rangle, a^2|\varphi_\nu^i\rangle, \dots, a^n|\varphi_\nu^i\rangle\}$ escolha p inteiro com $0 \leq p \leq n$ e lembre que $a^p|\varphi_\nu^i\rangle$ é autoket de N com autovalor $\nu - p$.

Aplicando a em $|\varphi_\nu^i\rangle$, p vezes, construímos a seguinte tabela:

Autovetor	Autovalor
$ \varphi_\nu^i\rangle$	ν
$a \varphi_\nu^i\rangle$	$\nu - 1$
$a^2 \varphi_\nu^i\rangle$	$\nu - 2$
\vdots	\vdots
$a^{p-1} \varphi_\nu^i\rangle$	$\nu - p + 1$
$a^p \varphi_\nu^i\rangle$	$\nu - p$

Note que

{

por construção:

ν está entre n e $n + 1$,

p é menor ou igual à n ,

$\therefore \nu - p > 0$ e $a^p|\varphi_\nu^i\rangle \neq 0$.

Vale também para $p = n$,

pois $\nu - n > 0 \rightarrow a^n|\varphi_\nu^i\rangle \neq 0$

- Como $n < \nu < n + 1$, subtraia n dos 3 termos para obter $0 < \nu - n < 1$ e conclua $a^n|\varphi_\nu^i\rangle$ é autoket de N com autovalor $\nu - n$, entre 0 e 1. O que obteríamos se aplicássemos mais uma vez o operador a ? Um autoket de N com autovalor negativo! Para evitar isso, basta exigir que ν seja inteiro. Ou seja ν não pode estar entre n e $n + 1$, precisa ser um deles (n ou $n + 1$).
- Se $\nu = n$, teríamos $a^n|\varphi_n^i\rangle \propto |\varphi_0^i\rangle \therefore a^{n+1}|\varphi_n^i\rangle = 0 \Rightarrow$ novas aplicações de a não gerariam kets com autovalores negativos ($a^\mu a^{n+1}|\varphi_n^i\rangle = 0, \forall \mu$).

O espectro de N é composto de inteiros não negativos

- Considerando que o menor autovalor de N é 0, e supondo que você conhece um dos autokets de N , por exemplo, o $|\varphi_n^i\rangle$, como construir um autovetor de N com autovalor k ?

Aprendemos que $a^n |\varphi_n^i\rangle \propto |\varphi_0^i\rangle \neq 0$, autoket de N com autovalor 0. Basta aplicar k vezes o a^\dagger . Cada vez que aplicamos o a^\dagger , o autovalor do ket correspondente fica acrescido de 1. Assim o ket procurado é proporcional à $a^{\dagger k} a^n |\varphi_n^i\rangle$.

- Finalmente podemos escrever o espectro do OHS quântico como solução da equação

$$H|\varphi_n^i\rangle = E_n|\varphi_n^i\rangle \text{ com } E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Note que a menor energia possível não é zero como no caso clássico. É $\frac{1}{2}\hbar\omega$.
- Os outros níveis são obtidos acrescentando um múltiplo de $\hbar\omega$ (que pode ser definido como um quanta de energia).

- Interpretação física $\begin{cases} N \rightarrow \text{contador de quantas de energia.} \\ a \rightarrow \text{aniquila ou destrói um quanta de energia.} \\ a^\dagger \rightarrow \text{cria ou constrói um quanta de energia.} \end{cases}$
- Essa interpretação inspirou uma ferramenta para tratar partículas idênticas (férmions e bósons), com quantas trocados por partículas

Degenerescência dos autovalores

- Considere o estado fundamental que satisfaz a equação

$$H|\varphi_0^i\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|\varphi_0^i\rangle, \text{ com } a|\varphi_0^i\rangle = 0.$$

Para achar a degenerescência, precisamos saber quantos vetores linearmente independentes satisfazem $a|\varphi_0^i\rangle = 0$.

- Lembre que $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right)$. Isso combinado com a equação $a|\varphi_0^i\rangle = 0$ pode dar uma equação diferencial simples na representação das coordenadas. Para explorar a ideia tome $\langle x|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right)|\varphi_0^i\rangle = 0$, que pode ser escrita por $(m\omega x + i\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx})\varphi_0^i(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0^i(x) = 0$.
- A solução geral desta equação é dada por $\varphi_0^i(x) = ce^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$, onde a constante c tem alguma flexibilidade. Quando escrevemos $c = |c|e^{i\arg c}$, observamos que $|c|$ fica definido pela condição de normalização. Assim, a flexibilidade se reduz a escolha da fase global $e^{i\arg c}$. Na mecânica quântica, isso significa que todas as soluções são linearmente dependentes. Com isso concluímos que o estado fundamental é não degenerado.

Degenerescência dos autovalores

- O estado fundamental é não degenerado. E os outros? De fato, todos são não degenerados, conforme mostramos a seguir. Faremos uma demonstração por indução finita.
- Suponha que o n -ésimo estado é não degenerado. Ele satisfaz a equação:

$$N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$$

O que podemos esperar da degenerescência do estado $|\varphi_{n+1}^i\rangle$? Sabemos que $a|\varphi_{n+1}^i\rangle$ é necessariamente diferente de zero e autoestado de N com autovalor n . Isso obriga que $a|\varphi_{n+1}^i\rangle$ seja colinear com $|\varphi_n\rangle$, isto é $a|\varphi_{n+1}^i\rangle = c^i|\varphi_n\rangle$. Aplique a^\dagger nesta equação e obtenha $a^\dagger a|\varphi_{n+1}^i\rangle = c^i a^\dagger|\varphi_n\rangle \Rightarrow N|\varphi_{n+1}^i\rangle = c^i a^\dagger|\varphi_n\rangle \therefore$

$|\varphi_{n+1}^i\rangle = \frac{c^i}{n+1} a^\dagger|\varphi_n\rangle$ a diferença entre os diversos $|\varphi_{n+1}^i\rangle$, $\forall i$, está em uma constante multiplicativa, c^i . Ou seja, são todos colineares! \therefore , podemos dizer que se n é não degenerado, $(n+1)$ também é um autovalor não degenerado. Como provamos que $n=0$ é não degenerado, a prova por indução finita está completa.

- Com isso concluímos que o espectro do OHS é por inteiro não degenerado e

daqui para frente dispensaremos o índice i $\begin{cases} N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle \\ H|\varphi_n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|\varphi_n\rangle \end{cases}$ **N ou H é CCOC**

Autoestados da Hamiltoniana

- A representação $|\varphi_n\rangle$

Como N e H são observáveis, seus autovetores formam uma base em \mathcal{E}_x .

Lembre que o \mathcal{E}_x é um espaço unidimensional de funções de uma partícula.

No slide 11 desta aula, calculamos o estado fundamental na representação

das coordenadas. Será que conseguiríamos calcular todos os outros estados?

- Um bom começo seria com auxílio do operador a^\dagger construir todos os outros kets a partir de $|\varphi_0\rangle$.

Sabemos que $a|\varphi_0\rangle=0$ e podemos supor que $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle=1$. Para obter um ket colinear à $|\varphi_1\rangle$ basta aplicar uma vez o a^\dagger .

$$|\varphi_1\rangle = c_1 a^\dagger |\varphi_0\rangle$$

Normalize supondo que c_1 é real (convenção). Isso é o mesmo que pedir

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = |c_1|^2 \langle\varphi_0|aa^\dagger|\varphi_0\rangle = |c_1|^2 \langle\varphi_0|1 + a^\dagger a|\varphi_0\rangle = |c_1|^2 \langle\varphi_0|1 + N|\varphi_0\rangle = |c_1|^2 = 1$$

$\therefore c_1 = 1$ e $|\varphi_1\rangle = a^\dagger |\varphi_0\rangle$ fornece $|\varphi_1\rangle$ já normalizado.

- Repita o procedimento para $|\varphi_2\rangle$.

$$|\varphi_2\rangle = c_2 a^\dagger |\varphi_1\rangle$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = |c_2|^2 \langle\varphi_1|aa^\dagger|\varphi_1\rangle = |c_2|^2 \langle\varphi_1|1 + a^\dagger a|\varphi_1\rangle = |c_2|^2 \langle\varphi_1|1 + N|\varphi_1\rangle = 2|c_2|^2 = 1$$

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger)^2 |\varphi_0\rangle$ fornece $|\varphi_2\rangle$ já normalizado.

Autoestados da Hamiltoniana

- Repita o procedimento para o caso geral $|\varphi_n\rangle$.

$$|\varphi_n\rangle = c_n a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle &= |c_n|^2 \langle \varphi_{n-1} | a a^\dagger | \varphi_{n-1} \rangle = |c_n|^2 \langle \varphi_{n-1} | 1 + a^\dagger a | \varphi_{n-1} \rangle = |c_n|^2 \langle \varphi_{n-1} | 1 + N | \varphi_{n-1} \rangle = \\ &= n |c_n|^2 = 1 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ e } |\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} (a^\dagger)^2 |\varphi_{n-2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\varphi_0\rangle \text{ fornece } |\varphi_n\rangle$$

já normalizado.

As relações $|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$ e $|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\varphi_0\rangle$ serão muito úteis.

- Ortonormalização e relação de completeza.

H é Hermiteano e é uma observável. Sabemos, portanto, que seus autokets respeitam as relações:

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n'} \rangle = \delta_{nn'} \text{ e } \mathbb{1} = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$$

Na próxima aula exploraremos a relação de a^\dagger , a , e N com outros operadores, calcularemos $\varphi_n(x) = \langle x | \varphi_n \rangle$, médias, desvios quadráticos, e evoluções temporais de problemas envolvendo o OHS.