Momento Angular na Mecânica Quântica

RESUMO

- $J^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \Rightarrow$ com $j \geq 0$
- *Lema 1:* $J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle \Rightarrow$ com $-j \leq m \leq j$
- *Lema 2:* $J_- \equiv J_x - iJ_y$ com $J_-|k,j,m\rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } m = -j \\ \propto |k,j,m-1\rangle \text{ se } m > -j \end{cases}$

Para $m > -j$, isso significa que $\begin{cases} J^2 J_-|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_-|k,j,m\rangle \\ \\ J_z J_-|k,j,m\rangle = (m-1)\hbar J_-|k,j,m\rangle \end{cases}$

ou seja, $J_-|k,j,m\rangle$ é autoket de J^2 e J_z com autovalores $j(j+1)\hbar^2$ e $(m-1)\hbar$, respectivamente.

- *Lema 3:* $J_+ \equiv J_x + iJ_y$ com $J_+|k,j,m\rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } m = j \\ \propto |k,j,m+1\rangle \text{ se } m < j \end{cases}$

Para $m < j$, isso significa que $\begin{cases} J^2 J_+|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_+|k,j,m\rangle \\ \\ J_z J_+|k,j,m\rangle = (m+1)\hbar J_+|k,j,m\rangle \end{cases}$

ou seja, $J_+|k,j,m\rangle$ é autoket de J^2 e J_z com autovalores $j(j+1)\hbar^2$ e $(m+1)\hbar$, respectivamente.

Momento Angular na Mecânica Quântica: o espectro de J^2 e J_z

- Sabendo que $-j \leq m \leq j$, é sempre possível achar p, número inteiro, tal que $-j \leq m - p \leq -j + 1$ (basta tomar $p =$ primeiro inteiro à esquerda de $m + j$).

$$\text{por exemplo, suponha } -5 \leq m \leq 5 \begin{cases} \text{se } m = +4,5 \Rightarrow p = 9 \text{ e } -5 \leq -4,5 \leq -4 \\ \text{se } m = -4,5 \Rightarrow p = 0 \text{ e } -5 \leq -4,5 \leq -4 \\ \text{se } m = -1,5 \Rightarrow p = 3 \text{ e } -5 \leq -4,5 \leq -4 \end{cases}$$

- *Note que p é o número de vezes que temos que aplicar J_- para sairmos de m e chegarmos em $m - p$ (autovalor entre $-j$ e $-j+1$* de um autoket de J_z).

- Considere a série de vetores: $|k,j,m\rangle$; $J_-|k,j,m\rangle$; ...$(J_-)^n|k,j,m\rangle$; ...$(J_-)^p|k,j,m\rangle$. Todos são autokets de J^2 e J_z, conforme mostra a tabela:

Autovetor	Autovalor de J^2	Autovalor de J_z
$\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$m\hbar$
$J_-\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$(m-1)\hbar$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(J_-)^n\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$(m-n)\hbar$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(J_-)^p\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$(m-p)\hbar$

- Uma aplicação a mais do que p faria um autovalor de J_z com $m-p-1<-j$ e isso viola lema 1 (que proíbe autovalores menores que $-j$.)

Momento Angular na Mecânica Quântica: o espectro de J^2 e J_z

- Para evitar isso precisamos fazer $m - p = -j$, com $(J_-)^p|k,j,m\rangle \propto |k,j,-j\rangle$, pois assim, qualquer aplicação adicional do J_- daria o ket nulo e o lema 1 fica preservado.
- De forma semelhante poderíamos ter feito toda essa argumentação para a série associada ao J_+ : $\exists\ q$, número inteiro, tal que $j - 1 \leq m + q \leq +j$. Se $m \notin Z$, basta pegar o número inteiro à esquerda de $j - m$. Como exemplo, considere

$$-5 \leq m \leq 5 \begin{cases} \text{se } m = +4,5 \Rightarrow q = 0 \text{ e } 4 \leq +4,5 \leq 5 \\ \text{se } m = -2,4 \Rightarrow q = 7 \text{ e } 4 \leq +4,6 \leq 5 \\ \text{se } m = -1,9 \Rightarrow q = 6 \text{ e } 4 \leq +4,1 \leq 5 \end{cases}$$

◦ *Note que q é o número de vezes que temos que aplicar J_+ para sairmos de m e chegarmos em $m + q$ (autovalor entre $j - 1$ e $+j$* de um autoket de J_z).

- Agora temos:

Autovetor	Autovalor de J^2	Autovalor de J_z
$\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$m\hbar$
$J_+\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$(m+1)\hbar$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(J_+)^q\|k,j,m\rangle$	$j(j+1)\hbar^2$	$(m+q)\hbar$

- Uma aplicação a mais do que q faria um autovalor de J_z com $m+q+1 > +j$ e isso viola lema 1 (que proíbe autovalores maiores que $+j$.)

Momento Angular na Mecânica Quântica: o espectro de J^2 e J_z

- Para evitar isso precisamos fazer $m+q=+j$, com $(J_+)^q|k,j,m\rangle \propto |k,j,+j\rangle$, pois assim, qualquer aplicação adicional do J_+ daria o ket nulo e o lema 1 fica preservado.

- Combinando as duas condições $\begin{cases} m-p=-j \\ m+q=+j \end{cases} \Longrightarrow q+p=2j$

- Como p e q são inteiros j é necessariamente inteiro ou semi-inteiro. Os valores de m ficam restritos à $-j,(-j+1),(-j+2),...(j-2),(j-1),+j,$ conforme a tabela abaixo.

j	Autovalor de J^2	Autovalores de J_z (em $\hbar$)	multiplicidade
0	$0\hbar^2$	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\hbar^2$	$-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}$	2
1	$2\hbar^2$	$-1,0,+1$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$j(j+1)\hbar^2$	$-j,-j+1,-j+2,...j-2,j-1,+j$	$2j+1$

- Resumindo: as soluções de $\begin{cases} J^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \\ J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle \end{cases}$ só existem para

$j \geq 0 \begin{cases} \text{inteiros ou} \\ \text{semi-inteiros} \end{cases} \Rightarrow$ e aplicações múltiplas de $J_\pm$ levam à $|k,j,\pm j\rangle$.

Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Representação padrão. Uma das formas de construir $\mathcal{E} = \{|k, j, m\rangle\}$.
  Como construir uma base ortonormal de vetores em $\mathcal{E}$ que sejam autovetores de J^2 e J_z?

  - Ache A que comute com J^2 e J_z e use $\begin{cases} J^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \\ J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle \\ A|k,j,m\rangle = a_{k,j,m}|k,j,m\rangle \end{cases}$
  - Em princípio, para cada par (j, m) seria preciso resolver a equação
  $$A|k,j,m\rangle = a_{k,j,m}|k,j,m\rangle.$$
  - Se os autovalores $a_{k,j,m}$ forem distintos para um par (j, m), A, J^2 e J_z formam um CCOC e o problema está resolvido. Note que é trabalhoso, pois para cada par (j, m), a equação acima precisa ser resolvida.
  - Para diminuir esse trabalho, fixe (j, m) e construa, resolvendo a equação acima, um subespaço formado por $\mathcal{E}(j,m) = \{|k,j,m\rangle\}$ com $k = 1, 2, ..., g(j,m)$ onde $g(j,m)$ é a degenerescência associada ao par (j, m).
  - Em seguida, use $J_\pm$ para construir os subespaços $\mathcal{E}(j, m \pm 1) \equiv \{J_\pm|k,j,m\rangle\}$.
  - Será que se fizermos isso para todos os $j's$ teremos uma base completa, isto é, uma representação em $\mathcal{E}$?

Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Um bom começo é mostrar que, se $k_1 \neq k_2$, os kets $J_+|k_1,j,m\rangle$ e $J_+|k_2,j,m\rangle$ são ortogonais. Isso também seria esperado dos kets $J_-|k_1,j,m\rangle$ e $J_-|k_2,j,m\rangle$. Para testar ambos, basta calcular $\langle k_1,j,m|J_\mp J_\pm|k_2,j,m\rangle$, fazendo uso da expressão já demostrada (aula 22) $J_\mp J_\pm = J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z$, isto é: $\langle k_1,j,m|J_\mp J_\pm|k_2,j,m\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]\hbar^2 \underbrace{\langle k_1,j,m|k_2,j,m\rangle}$. Use que autokets de A com autovalores distintos são ortogonais $\Rightarrow$ $\delta_{k_1k_2}$ e conclua

$$\langle k_1,j,m|J_\mp J_\pm|k_2,j,m\rangle = [j(j+1)-m(m\pm 1)]\hbar^2\delta_{k_1k_2} \text{ (c.q.d.).}$$

- Isso permite concluir, se $\mathcal{E}(j,m)=\{|k,j,m\rangle\}$ é feito de kets ortogonais, os kets de $\mathcal{E}(j,m+1)=\{J_+|k,j,m\rangle\}$ também são ortogonais entre si, assim como os de $\mathcal{E}(j,m-1)=\{J_-|k,j,m\rangle\}$.
- Esta relação de ortogonalidade permite calcular N em $|k,j,m+1\rangle = NJ_+|k,j,m\rangle$, $\langle k,j,m+1|k,j,m+1\rangle = N^2\langle k,j,m+1|J_-J_+|k,j,m+1\rangle = [j(j+1)-m(m+1)]\hbar^2N^2$

Como $\langle k,j,m+1|k,j,m+1\rangle = 1$, podemos concluir: $N = \dfrac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}}$.

Os vetores $|k,j,m+1\rangle = \dfrac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}} J_+|k,j,m\rangle$ com $(j,m+1)$ fixos, compõem $\mathcal{E}(j,m+1)$ e são ortonormais. Será que eles constituem uma base em $\mathcal{E}(j,m+1)$?

Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Para verificar isso, suponha $\mathcal{E}(j,m{+}1){=}\{J_+|k,j,m\rangle\}$ construído pela aplicação de J_+ em todos os kets de $\mathcal{E}(j,m){=}\{|k,j,m\rangle\}$. Suponha também que exista um $|\alpha,j,m+1\rangle$ ortogonal à todos os $|k,j,m+1\rangle$ de $\mathcal{E}(j,m{+}1){=}\{|k,j,m+1\rangle\}$. Se isso ocorrer, $\{|k,j,m+1\rangle\}$ não forma uma base.
  - Lembre que $\forall\ \beta,$ o ket $|\beta,j,m\rangle$ deve ser escrito como uma combinação em k dos kets de $\mathcal{E}(j,m){=}\{|k,j,m\rangle\}$. Em princípio, você diria que precisa de todos os kets de $\mathcal{E},$ mas notaria que o operador $A,$ antes de diagonalizado era bloco diagonal segundo pares (j,m). Ou seja, um autoket de J^2 e J_z com autovalores, $j(j+1)\hbar$ e $m\hbar$ precisa ser descrito com os vetores do bloco $(j,m),$ pois todas as projeções $\langle k',j',m'|k,j,m\rangle$ são nulas se $j'{\neq}j$ ou $m'{\neq}m$. Provaremos, por absurdo, que se $\mathcal{E}(j{,}m{+}1){=}\{J_+|k{,}j{,}m\rangle\}$ não forma uma base, a propriedade descrita para $\mathcal{E}(j{,}m)$ não será válida.

- Voltemos ao nosso ket $|\alpha{,}j{,}m{+}1\rangle$. Quanto vale $J_-|\alpha{,}j{,}m{+}1\rangle$? $\begin{cases} \neq 0\,(m{+}1 \neq -j) \\ \in \mathcal{E}(j,m) \\ \perp \forall J_-|k,j,m{+}1\rangle \end{cases}$

Vimos que $|k,j,m{+}1\rangle = \dfrac{1}{\hbar\sqrt{j(j{+}1)-m(m{+}1)}} J_+|k,j,m\rangle$ e isso faz

$$J_-|k,j,m+1\rangle \propto J_-J_+|k,j,m\rangle = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|k,j,m\rangle \propto |k,j,m\rangle$$

Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Mas se $J_-|k,j,m+1\rangle \propto |k,j,m\rangle \Rightarrow J_-|\alpha,j,m+1\rangle \propto |\alpha,j,m\rangle$ temos que se $J_-|\alpha,j,m{+}1\rangle \perp \forall J_-|k,j,m{+}1\rangle \Rightarrow |\alpha,j,m\rangle \perp \forall |k,j,m\rangle$ o que nos leva à um absurdo, pois, conforme vimos, $\{|k,j,m\rangle\}$ consegue descrever qualquer ket.
- De forma análoga, podemos mostrar que os vetores $\{|k,j,m-1\rangle\}$ definidos pela relação (mostre a relação) $|k,j,m{-}1\rangle = \dfrac{1}{\hbar\sqrt{j(j{+}1){-}m(m{-}1)}} J_-|k,j,m\rangle$ formam uma base em $\mathcal{E}(j,m-1)$.
- Como cada subespaço $\mathcal{E}(j,m)$ é completo para escrever qualquer ket, $|\alpha,j,m\rangle$, como uma combinação em $k's$ de kets $|k,j,m\rangle$, é de esperar que a dimensão de todos os subespaços $\mathcal{E}(j,m)$ $(\forall\, j$ e $m)$ sejam iguais, ou seja na base convencional

$$g(j,-j) = \ldots = g(j,m-1) = g(j,m) = g(j,m+1)\ldots = g(j,+j) = g(j)$$

Ação	Subespaço	$k=1$	$k=2$	$k=\ldots$	$k=g(j)$
$J_- \Downarrow$	$\mathcal{E}(j,m{=}j)$	$\|1,j,j\rangle$	$\|2,j,j\rangle$	$\|k{=}\ldots,j,j\rangle$	$\|g(j),j,j\rangle$
$J_- \Downarrow$	$\mathcal{E}(j,m{=}j{-}1)$	$\|1,j,j{-}1\rangle$	$\|2,j,j{-}1\rangle$	$\|k{=}\ldots,j,j{-}1\rangle$	$\|g(j),j,j{-}1\rangle$
...	...	...	...	...	...
$J_- \Downarrow$	$\mathcal{E}(j,m)$	$\|1,j,m\rangle$	$\|2,j,m\rangle$	$\|k{=}\ldots,j,m\rangle$	$\|g(j),j,m\rangle$
...	...	...	...	...	...
	$\mathcal{E}(j,m{=}{-}j)$	$\|1,j,{-}j\rangle$	$\|2,j,{-}j\rangle$	$\|k{=}\ldots,j,{-}j\rangle$	$\|g(j),j,{-}j\rangle$

com $\langle k,j,m|k',j',m'\rangle = \delta_{k,k'}\delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$ e $\sum_{k,j,m} |k,j,m\rangle\langle k,j,m| = \mathbb{1}$.

Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Na prática, para gerar uma base convencional, ache um operador A que comute com J^2 e J_z. Para facilitar, suponha que precisamos apenas de A para formar um CCOC com J^2 e J_z.
  - Diagonalize A em $\mathcal{E}(j,j)$ ou melhor, resolva $A|k,j,j\rangle = a_{k,j}|k,j,j\rangle$.
  - A partir de $\{|k,j,j\rangle\}$ com $k=1,...,g(j)$, ache os outros $\mathcal{E}(j,\pm m)=\{J_\pm|k,j,m\rangle\}$
  - Repita o procedimento para um novo j.
  - No final teremos o $\mathcal{E}=\sum_j \sum_{m=-j}^{j} \mathcal{E}(j,m)$.

Comentários

- Se $\begin{cases}[A,J_x]=0\\ [A,J_y]=0\end{cases} \Rightarrow [A,J_-]|k,j,j\rangle=0 \rightarrow AJ_-|k,j,j\rangle=J_-A|k,j,j\rangle=a_{k,j}J_-|k,j,j\rangle$

  O autovalor de A para o ket $|k,j,j\rangle$ é o mesmo que para o ket $J_-|k,j,j\rangle$.
- Poderíamos ter feito o mesmo raciocínio para $m=-j$ $(A|k,j,-j\rangle = a_{k,-j}|k,j,-j\rangle)$ tal que, $\Rightarrow [A,J_+]|k,j,-j\rangle=0 \rightarrow AJ_+|k,j,-j\rangle=J_+A|k,j,-j\rangle=a_{k,-j}J_+|k,j,-j\rangle$

  O autovalor de A para o ket $|k,j,-j\rangle$ é o mesmo que para o ket $J_+|k,j,-j\rangle$.

Nessas condições todos os kets da base convencional são autokets de A, J^2 e J_z, e A tem o mesmo espectro para um j fixo, $\forall\ \mathcal{E}(j,m)$.

Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Se $\begin{cases} [A, J_x] \neq 0 \\ [A, J_y] \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ continuamos a ter uma base, mas os vetores de $\mathcal{E}(j, m \pm 1)$ podem não ser autovetores de A.

- Desvantagens da base convencional $\mathcal{E} = \sum_j \sum_{m=-j}^{j} \mathcal{E}(j, m)$

  (1) $g(j)$ depende do sistema físico.

  (2) $\mathcal{E}(j, m)$ não é invariante sob ação de $\vec{J}$, pois J_+ e J_- levam kets de $\mathcal{E}(j, m)$ para kets em $\mathcal{E}(j, m+1)$ e $\mathcal{E}(j, m-1)$.

- **Isso inspira a criação de um novo subespaço definido por $\mathcal{E}(j, k)$.**

- Explicitamente, ele é definido pelos kets $|k, j, -j\rangle$, $|k, j, -j+1\rangle, \ldots |k, j, m\rangle, \ldots, |k, j, j\rangle$.

- A dimensão desde subespaço é $g(j, k) = 2j + 1 \Rightarrow$ para todos os sistemas físicos.

- $\mathcal{E}(j, k)$ é globalmente invariante sob ação de $\vec{J}$, pois J_+ e J_- levam kets de $\mathcal{E}(j, k)$ para kets do mesmo $\mathcal{E}(j, k)$.

Relações de comutação características de momento angular

- Alguns exemplos de $(J_u)^{(j)}$ (representações matriciais das componentes, J_u, de do momento angular para um dado j).

(1) $j=0 \Rightarrow$ simples, pois $\langle k,0,0|J_z|k,0,0\rangle = 0$ e $\langle k,0,0|J_\pm|k,0,0\rangle = 0$.

(2) $j=\frac{1}{2} \Rightarrow$ neste caso, usamos $\begin{cases} \langle k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_z|k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2}\hbar \\ \langle k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}|J_z|k,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = 0 \\ \langle k,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_z|k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = 0 \\ \langle k,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_z|k,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{2}\hbar \end{cases}$ para escrever

$$J_z^{(\frac{1}{2})} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad J_+^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},+\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},+\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$J_-^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},+\frac{1}{2}|J_-|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},+\frac{1}{2}|J_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_-|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}.$$ Para $J_+^{(\frac{1}{2})}$ e $J_-^{(\frac{1}{2})}$, use

$J_\pm|k,j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}|k,j,m\pm1\rangle$ sistematicamente para obter

$$J_+^{(\frac{1}{2})} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; J_-^{(\frac{1}{2})} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; J_x^{(\frac{1}{2})} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; J_y^{(\frac{1}{2})} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Relações de comutação características de momento angular

Para obter a representação matricial de J^2, use que $J^2|j{,}m\rangle = j(j+1)|j{,}m\rangle$,

e calcule $$(J^2)^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2},+\frac{1}{2}|J^2|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle & \langle \frac{1}{2},+\frac{1}{2}|J^2|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J^2|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\rangle & \langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}|J^2|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $j=1 \Rightarrow$ neste caso, usaremos $$\begin{cases} \langle 1,+1|J_z|1,+1\rangle = +\hbar \\ \langle 1,+1|J_z|1,\ 0\rangle = 0 \\ \langle 1,+1|J_z|1,-1\rangle = 0 \\ \langle 1,\ 0|J_z|1,+1\rangle = 0 \\ \langle 1,\ 0|J_z|1,\ 0\rangle = 0 \\ \langle 1,\ 0|J_z|1,-1\rangle = 0 \\ \langle 1,-1|J_z|1,+1\rangle = 0 \\ \langle 1,-1|J_z|1,\ 0\rangle = 0 \\ \langle 1,-1|J_z|1,-1\rangle = -\hbar \end{cases} \Rightarrow J_z^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Novamente, usando $J_\pm|k,j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}|k,j,m\pm1\rangle$, calcule

$$J_+^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ J_-^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};\ J_x^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{pmatrix};\ J^{2\,(1)} = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relações de comutação características de momento angular

Exercício extra

- Mostre que para os 3 casos, $j=0, \frac{1}{2},$ e 1, apresentados, a medida de $J_u \equiv \vec{J}\cdot\vec{u}$ em qualquer direção $\vec{u}=(\theta,\varphi)$ arbitrária, respeita a realidade experimental expressa no primeiro slide da aula 21. Para tanto, diagonalize J_u, sabendo que $\vec{u}=(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \Rightarrow$ e $\vec{J}\cdot\vec{u}=\sin\theta\cos\varphi J_x + \sin\theta\sin\varphi J_y + \cos\theta J_z$.

  Para facilitar, seguem as matrizes (verifique) que precisam ser diagonalizadas:

  - $J_u^{(\frac{1}{2})} = \vec{J}\cdot\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{+i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

  - $J_u^{(1)} = \vec{J}\cdot\vec{u} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta & 0 \\ e^{+i\varphi}\sin\theta & 0 & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ 0 & e^{+i\varphi}\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}$