

# Momento Angular na Mecânica Quântica

- Explorando o fato que  $\mathcal{E}(j, k)$  é globalmente invariante sob ação de  $\vec{J}$ .  
Lembre que  $\forall$  componente  $J_u$  pode ser escrita em função de  $J_z, J_+, J_-$  e que esses três operadores no máximo mudam  $m$  (resultado  $\in \mathcal{E}(j, k)$ )

- A representação matricial de  $J_u$  ou de qualquer  $F(\vec{J})$  deve ser bloco diagonal.

| $\langle k, j, m   F(\vec{J})   k', j', m' \rangle$ | $\mathcal{E}(k, j)$    | $\mathcal{E}(k', j)$   | $\mathcal{E}(k', j')$  |
|---|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\mathcal{E}(k, j)$                                 | $(2j+1) \times (2j+1)$ | 0                      | 0                      |
| $\mathcal{E}(k', j)$                                | 0                      | $(2j+1) \times (2j+1)$ | 0                      |
| $\mathcal{E}(k', j')$                               | 0                      | 0                      | $(2j+1) \times (2j+1)$ |

$k \neq k'$  e  $j \neq j'$

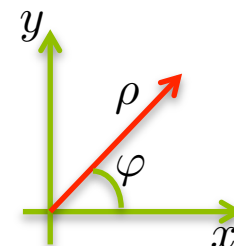
- Podemos calculá-la usando 
$$\begin{cases} J_z |k, j, m\rangle = m\hbar |k, j, m\rangle \\ J_{\pm} |k, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |k, j, m \pm 1\rangle \end{cases}$$

ou ainda 
$$\begin{cases} \langle k, j, m | J_z | k', j', m' \rangle = m' \hbar \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ \langle k, j, m | J_{\pm} | k', j', m' \rangle = \hbar \sqrt{j'(j'+1) - m'(m' \pm 1)} \delta_{kk'} \delta_{jj'} \delta_{m, m' \pm 1} \end{cases}$$

- Note que esses elementos não dependem de  $k$ . Uma vez calculada a representação de  $J_u$  ou de  $F(\vec{J})$ , podemos usá-la para  $\forall$  sistema físico.

# Representação das coordenadas do momento angular

- Na representação das coordenadas  $\{|\vec{r}\rangle\}$ , temos  $L_z = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ . Para explorar possíveis simetrias do sistema, é interessante escrever esse operador (assim como  $L_x, L_y$  e  $L^2$ ) em coordenadas polares e esféricas.



- Para ilustrar,  $L_z$  em **Coordenadas polares**  $(z, \rho, \varphi)$ 

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \left( x(\rho, \varphi) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + x(\rho, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} - y(\rho, \varphi) \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} - y(\rho, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Usando que  $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \rightarrow \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$  e que  $\frac{d}{d\lambda} \arctan \lambda = \frac{1}{1 + \lambda^2}$ ,

podemos escrever  $\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \varphi \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \varphi \end{cases}$  e  $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho} \end{cases}$

- Para obter  $L_z = \frac{\hbar}{i} \left( \rho \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$

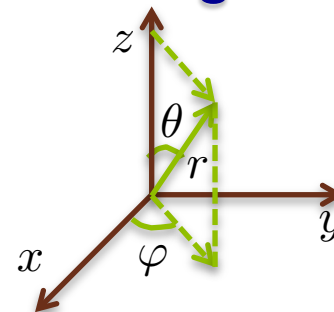
e finalmente sua forma final  $L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

# Representação das coordenadas do momento angular

F689

Aula 24

• Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



A inversão das expressões permite escrever 
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

Usando regras em cadeia do tipo  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  e

lembrando que 
$$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda} \arctan \lambda = \frac{1}{1+\lambda^2} \\ \frac{d}{d\lambda} \arcsin \lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \frac{d}{d\lambda} \arccos \lambda = -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{cases}$$
 é possível obter  $L_x, L_y, L_z$ , e  $L^2$ .

A seguir fornecemos apenas os resultados.

# Representação das coordenadas do momento angular

- Serviço doloroso (mas sem grandes dificuldades) leva à:

$$(1) L_x = i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right);$$

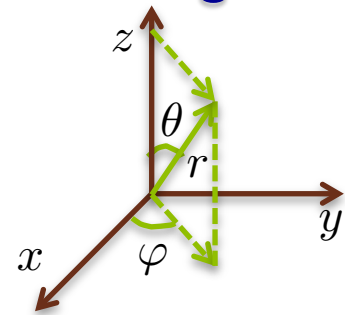
$$(2) L_y = i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right);$$

$$(3) L_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$(4) L^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right);$$

$$(5) L_+ = \hbar e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right);$$

$$(6) L_- = \hbar e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right);$$



- Já que temos todos os operadores na representação das coordenadas, nosso problema se resume a resolver:

$$L^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) \hbar^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$L_z Y_\ell^m(\theta, \varphi) = m \hbar Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

onde  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  são as chamadas Harmônicas Esféricas.

# Representação das coordenadas do momento angular

- Na representação das coordenadas, temos duas equações diferenciais: a de  $L_z$  é em primeira ordem em  $\varphi$  (tem solução simples) e permite que na de  $L^2$ , a dependência em  $\varphi$  seja facilmente retirada. Assim o desafio seria resolver uma equação em segunda ordem em  $\theta$  (cuja solução dá origem aos polinômios de Legendre). Ao invés de resolver a equação envolvendo segundas derivadas em  $\theta$ , usaremos os operadores  $L_{\pm}$  para obter soluções resolvendo equações de primeira ordem.

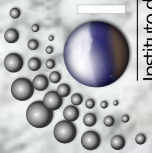
- *Antes, alguns comentários:*

- As integrais em volume envolvendo coordenadas cartesianas e esféricas estão relacionadas da seguinte maneira:

$$dv = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

onde, as cartesianas  $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$  enquanto que as esféricas  $\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

- Uma vez obtidas as Harmônicas esféricas, podemos escrever uma função de base do espaço  $R^3$  como  $\psi_{klm}(r, \theta, \varphi) = f_{klm}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ .



# Representação das coordenadas do momento angular

- Nestas condições a normalização de  $\psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi)$ , dada por

$$\int \int \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi |\psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi)|^2 = 1,$$

pode ser separada em duas condições

$$\begin{cases} \int_0^\infty r^2 dr |f_{k\ell m}(r)|^2 = 1 \\ \int \int \sin \theta d\theta d\varphi |Y_\ell^m(\theta, \varphi)|^2 = 1 \end{cases}$$

- Vimos que em casos especiais, a parte radial  $f_{k\ell m}(r)$ , pode não depender de  $m$  (indexaremos por  $f_{k\ell}(r)$ ) e até mesmo pode não depender de  $\ell$  e  $m$  (neste caso indexaremos apenas com  $k$ , e a parte radial será chamada de  $f_k(r)$ ).
- Obtenção das Harmônicas Esféricas  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ .

Conforme indicamos, a parte em  $\varphi$  é relativamente simples. Comece pela equação de autovalor de  $L_z$ , na representação das coordenadas, isto é:

$$\langle \hat{r} | L_z | \ell, m \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underbrace{\langle \hat{r} | \ell, m \rangle}_{Y_\ell^m(\theta, \varphi)} = m\hbar \underbrace{\langle \hat{r} | \ell, m \rangle}_{Y_\ell^m(\theta, \varphi)} \text{ com } |\hat{r}\rangle = |\theta, \varphi\rangle$$
$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_\ell^m(\theta, \varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

As variáveis  $\theta$  e  $\varphi$  aparecem desacopladas, sugerindo a separação e a forma da solução para  $\varphi \Rightarrow Y_\ell^m(\theta, \varphi) = F_\ell^m(\theta) e^{im\varphi}$



# Representação das coordenadas do momento angular

- Note que ao exigir que  $Y_\ell^m(\theta, 0) = Y_\ell^m(\theta, 2\pi)$ , temos  $e^{im2\pi} = 1$ , que só ocorre se  $m$  for inteiro.
- Se  $m$  é inteiro,  $\ell$  também é inteiro. Ou seja, ao exigir que a função de onda seja unicamente definida ao darmos uma volta completa no espaço  $R^3$ , aprende-se que a possibilidade  $\ell$  semi-inteiro para momento angular orbital precisa ser descartada.
- Em seguida, acharemos  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  e usaremos  $L_+$  (slide 4) para obter  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ .

$$L_+ Y_\ell^m(\theta, \varphi) = 0 \implies \hbar e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) F_\ell^m(\theta) e^{im\varphi} = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} - \ell \cot \theta \right) F_\ell^m(\theta) = 0 \implies \frac{dF_\ell^m}{d\theta}(\theta) - \ell \cot \theta F_\ell^m(\theta) = 0 \implies \frac{dF_\ell^m}{F_\ell^m} = \ell \cot \theta d\theta$$

$$\therefore \frac{dF_\ell^m}{F_\ell^m} = \ell \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \ell \frac{d \sin \theta}{\sin \theta} \text{ integrando dos dois lados, temos:}$$

$$\ln F_\ell^m = \ell \ln \sin \theta + \underbrace{\text{cte}} \implies \ln F_\ell^m = \ln (c_\ell (\sin \theta)^\ell) \implies F_\ell^m = c_\ell (\sin \theta)^\ell$$

chame  $\ln c_\ell$ , para facilitar e por poder depender de  $\ell$

Assim, temos finalmente  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = c_\ell (\sin \theta)^\ell e^{im\varphi}$ , onde  $c_\ell$  é a constante de normalização.

# Representação das coordenadas do momento angular

F689

Aula 24

- Podemos agora obter  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  com auxílio do operador  $L_-$ .

Para isso, basta lembrar que deduzimos que

$$L_\pm Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} Y_\ell^{m \pm 1}(\theta, \varphi),$$

que com auxílio do slide 4 permite escrever:

$$e^{\pm i\varphi} \hbar \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} Y_\ell^{m \pm 1}(\theta, \varphi)$$

Assim, para obter  $Y_\ell^{\ell-1}(\theta, \varphi)$  a partir de  $Y_\ell^\ell(\theta, \varphi)$  basta usar

$$Y_\ell^{m \pm 1}(\theta, \varphi) = \frac{e^{\pm i\varphi} \hbar \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}} \text{ com sinal inferior e } m = \ell.$$

- Essa fórmula de recorrência pode ser usada para obter, sucessivamente, todas as Harmônicas Esféricas para um dado  $\ell$  e  $m$ . Basta aplicá-la variando  $m$  de  $\ell$  até  $-\ell + 1$ , e fazendo uso da deduzida expressão para  $Y_\ell^\ell(\theta, \varphi)$ .

- Ortonormalização:  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell'}^{m' *}(\theta, \varphi) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$

- Relação de completeza.

As harmônicas esféricas formam uma base capaz de escrever qualquer função

$$\text{de } \theta \text{ e } \varphi \Rightarrow f(\theta, \varphi) = \sum_0^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell c_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \varphi). \text{ Quanto vale } c_{\ell m}?$$



- Usando a relação de ortonormalidade das Harmônicas esféricas, obtemos

$$c_{\ell m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi)$$

A relação de completeza pode ser expressa por  $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\ell, m\rangle \langle \ell, m| = \mathbb{1}$ ,

que na representação das coordenadas fica  $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle \hat{r} | \ell, m \rangle \langle \ell, m | \hat{r}' \rangle = \langle \hat{r} | \hat{r}' \rangle$ ,

ou ainda 
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_\ell^{m*}(\theta', \varphi') = \langle \hat{r} | \hat{r}' \rangle = \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin \theta}$$

onde usamos a delta de Dirac em coordenadas esféricas, isto é:

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') = \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{r^2 \sin \theta}$$

Isso permite escrever  $f(\theta, \varphi) = \int \int d\varphi' \sin \theta' d\theta' \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin \theta} f(\theta', \varphi')$

$$f(\theta, \varphi) = \int \int d\varphi' \sin \theta' d\theta' \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_\ell^{m*}(\theta', \varphi') \right] f(\theta', \varphi')$$

que pode

ser escrito por  $f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  com  $c_{\ell m}$  definido acima.

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Simetrias

- Paridade. O que acontece quando trocamos  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  ?

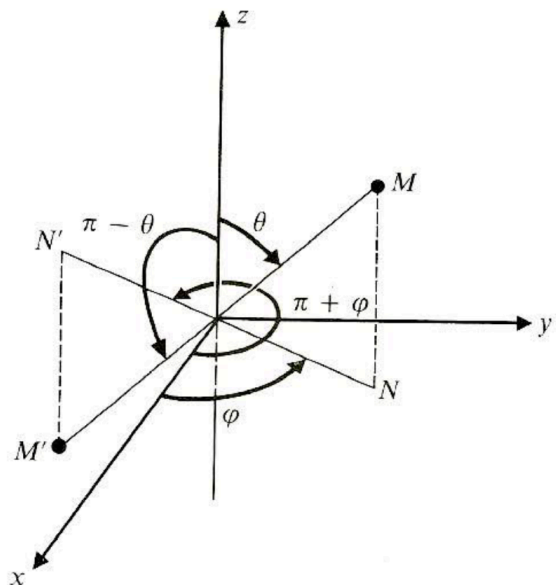


Fig. 2, cap. 6 do texto

$\Rightarrow$  a inversão leva M para M'

$$\begin{array}{l} \text{Coordenadas cartesianas} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \\ z \rightarrow -z \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Coordenadas esféricas} \\ \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow r \\ \theta \rightarrow \pi - \theta \\ \varphi \rightarrow \varphi + \pi \end{array} \right. \end{array}$$

Complemento  $A_{VI}$  demonstra que  $Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$

*As harmônicas esféricas de  $\ell$  par (ímpar) são pares (ímpares).*

- Conjugação complexa  $Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi)$  (ver complemento  $A_{VI}$ ).

# Momento Angular na Mecânica Quântica: base padrão

F689

Aula 24

- Base padrão.

Suponha  $\psi_{k\ell m}(\vec{r})$ , tal que

$$\begin{cases} L^2 \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \ell(\ell + 1) \hbar^2 \psi_{k\ell m}(\vec{r}) \\ L_z \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = m \hbar \psi_{k\ell m}(\vec{r}) \\ L_{\pm} \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m \pm 1)} \psi_{k\ell m \pm 1}(\vec{r}) \end{cases}$$

A dependência em  $\theta$  e  $\varphi$  é conhecida  $\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell m}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$  e isso fornece

$$L_{\pm} \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m \pm 1)} R_{k\ell m \pm 1}(r) Y_{\ell}^{m \pm 1}(\theta, \varphi) = R_{k\ell m}(r) L_{\pm} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = R_{k\ell m}(r) \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell}^{m \pm 1}(\theta, \varphi) \therefore R_{k\ell m \pm 1}(r) = R_{k\ell m}(r).$$

Onde se conclui que  $R_{k\ell m}(r)$  não depende de  $m \Rightarrow$  use  $R_{k\ell}(r)$ .

- Assim, a base padrão permite escrever  $\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ , com

$$\int d^3 r \psi_{k\ell m}^*(\vec{r}) \psi_{k'\ell' m'}(\vec{r}) = \int_0^{\infty} r^2 R_{k\ell}^*(r) R_{k'\ell'}(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi)}_{\delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}}$$

Como  $\int d^3 r \psi_{k\ell m}^*(\vec{r}) \psi_{k'\ell' m'}(\vec{r}) = \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \therefore \int_0^{\infty} r^2 R_{k\ell}^*(r) R_{k'\ell'}(r) = \delta_{kk'}$ .

- Será que  $R_{k\ell}(r)$  depende de  $\ell$ ? Suponha  $R_k(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$  e olhe  $r \rightarrow 0$ .

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Medidas

- Base padrão (continuação)

Se  $\lim_{r \rightarrow 0} R_k(r) = \text{cte}$ , a presença de  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  faz com que essa constante dependa do caminho, exceto para  $\ell = 0$  (neste caso  $Y_0^0(\theta, \varphi)$  é constante e, portanto, não depende de  $\theta$  e  $\varphi$ ). Ou seja,  $R_k(r)$  não é diferenciável em  $\vec{r} = 0$ . Para resolver isso,

impomos que  $\begin{cases} R_{k\ell}(r) = 0 \text{ para } \ell \neq 0 \\ R_{k\ell}(r) = \text{cte para } \ell = 0 \end{cases} \Rightarrow$  isso, por si só, indica a dependência em  $\ell$ .

- Quem cuida de possíveis valores diferentes de zero de  $\psi(\vec{r})$  na origem é o  $R_{k\ell=0}(r)$ .
- Cálculo de previsões físicas com respeito à medidas de  $L^2$  e  $L_z$ .

Considere uma partícula, cujo estado é descrito pela função de onda:

$$\langle \vec{r} | \psi \rangle = \psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi)$$

Aprendemos que uma medida de  $\begin{cases} L^2 \text{ fornece } \ell(\ell + 1)\hbar^2, \text{ com } \ell \text{ inteiro positivo} \\ \text{ou zero, isto é, } \ell(\ell + 1)\hbar^2 = 0, 2\hbar^2, 6\hbar^2, \dots \\ L_z \text{ fornece } m\hbar, \text{ com } m \text{ inteiro e } -\ell \leq m \leq \ell, \\ \text{isto é, } m\hbar = 0, \pm\hbar, \dots, \pm\ell\hbar. \end{cases}$

- *Como calcular a probabilidade de se obter um desses resultados  $(\ell, m$  ou ambos) a partir de  $\psi(r, \theta, \varphi)$ ?*

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Medidas

- Lembrando que podemos expandir qualquer  $\psi(\vec{r})$  em termos de  $\psi_{k\ell m}(\vec{r})$  com

$$\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \begin{cases} L^2\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \ell(\ell + 1)\hbar^2\psi_{k\ell m}(\vec{r}) \\ L_z\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = m\hbar\psi_{k\ell m}(\vec{r}) \\ L_{\pm}\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \hbar\sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m \pm 1)}\psi_{k\ell m \pm 1}(\vec{r}) \end{cases}$$

vale:  $\psi(\vec{r}) = \sum_k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{k\ell m} R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ , com  $c_{k\ell m} = \int d^3r \psi_{k\ell m}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})$

ou melhor  $c_{k\ell m} = \int_0^{\infty} r^2 dr R_{k\ell}^*(r) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) \psi(r, \theta, \varphi)$

- Quanto vale a probabilidade de medirmos um certo par  $(\ell, m)$ ?  
Basta calcular a amplitude de probabilidade de se obter a trinca  $(k, \ell, m)$  e tratar  $k$  como sendo a degenerescência do par, isto é

$$\mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m) = \sum_k \left| \underbrace{\langle \psi_{k\ell m} | \psi \rangle}_{\text{amplitude de probabilidade}} \right|^2 = \sum_k \left| c_{k\ell m} \right|^2$$

soma sobre a degenerescência      amplitude de probabilidade

- E se medíssemos somente  $L^2$ ? Qual a chance de obter  $\ell(\ell + 1)\hbar^2$ . Que tal

$$\mathcal{P}_{L^2}(\ell) = \sum_k \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| \underbrace{\langle \psi_{k\ell m} | \psi \rangle}_{\text{amplitude de probabilidade}} \right|^2 = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m) = \sum_k \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| c_{k\ell m} \right|^2$$

soma sobre a degenerescência      amplitude de probabilidade

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Medidas

- E se medíssemos somente  $L_z$ ? Qual a chance de obter  $m\hbar$ ? Que tal

$$\mathcal{P}_{L_z}(m) = \sum_k \sum_{\ell \geq |m|} \mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m) = \sum_k \sum_{\ell \geq |m|} |c_{k\ell m}|^2$$

- Será que precisamos expandir em  $k$ ? Lembre da expressão inicial

$$\psi(\vec{r}) = \sum_k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{k\ell m} R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \text{ com } c_{k\ell m} = \int d^3r \psi_{k\ell m}^*(\vec{r}) \psi(\vec{r})$$

e rescreva

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \underbrace{\left[ \sum_k c_{k\ell m} R_{k\ell}(r) \right]}_{a_{\ell m}(r)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \text{ com } \underbrace{a_{\ell m}(r)}_{\text{obtido sem auxílio de } R_{k\ell}(r)} = \int d\Omega Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) \psi(\vec{r}),$$

ou  $a_{\ell m}(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) \psi(r, \theta, \varphi)$ . Como  $a_{\ell m}(r) = \sum_k c_{k\ell m} R_{k\ell}(r)$ ,

temos  $c_{k\ell m} = \int_0^{\infty} r^2 R_{k\ell}^*(r) a_{\ell m}(r) dr$  e  $|a_{\ell m}(r)|^2 = \sum_{kk'} c_{k\ell m} c_{k'\ell m}^* R_{k\ell} R_{k'\ell}^*$ .

- Note que  $\int_0^{\infty} r^2 |a_{\ell m}(r)|^2 dr = \sum_{kk'} c_{k\ell m} c_{k'\ell m}^* \underbrace{\int_0^{\infty} r^2 R_{k\ell} R_{k'\ell}^* dr}_{\delta_{kk'}} = \sum_k |c_{k\ell m}|^2 = \mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m)$



# Momento Angular na Mecânica Quântica: Medidas

- De forma semelhante, podemos escrever

$$\mathcal{P}_{L^2}(\ell) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} r^2 |a_{\ell m}(r)|^2 dr$$

$$\mathcal{P}_{L_z}(m) = \sum_k \sum_{\ell \geq |m|} \mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m) = \sum_{\ell \geq |m|} \int_0^{\infty} r^2 |a_{\ell m}(r)|^2 dr$$

- Ou seja, obtivemos  $\mathcal{P}_{L^2, L_z}(\ell, m)$ ,  $\mathcal{P}_{L^2}(\ell)$ , e  $\mathcal{P}_{L_z}(m)$  de um sistema no estado  $\psi(\vec{r})$  em função de  $a_{\ell m}(r) = \int d\Omega Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) \psi(\vec{r})$ , (uma integral do produto de uma Harmônica Esférica pelo estado do sistema). Não foi necessário usar as  $R_{k\ell}(r)$  para obter essas quantidades.
- E se tivéssemos interessados em apenas medir  $L_z$ . Será que poderíamos, além de evitar o uso das  $R_{k\ell}(r)$ , evitar também o uso explícito das Harmônicas Esféricas?

Para tanto, bastaria expandir  $\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_m b_m(r, \theta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$  e usar que

$$b_m(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} \psi(r, \theta, \varphi) \text{ (verifique por substituição direta e uso de}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-im'\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \delta_{mm'}). \text{ Obtenha } \mathcal{P}_{L_z}(m) = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} |b_m(r, \theta)|^2 r^2 \sin \theta d\theta dr.$$