Terceira Aula de Exercícios

Thaís Victa Trevisan – thaistre@ifi.unicamp.br

Adaptação do problema 14 do Capítulo 3 do livro "*Quantum Mechanics*" – Cohen-Tannoudji.

Considere um sistema físico cujo espaço de estados tridimensional é gerado pelo conjunto de *kets* ortonormais $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Nessa base o Hamiltoniano H e dois outros observáveis A e B são escritos, em sua forma matricial, da seguinte maneira:

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde ω_0, a e b são constantes reais e positivas.

O sistema físico, no instante $t = 0$ está no estado

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \; .$$

(a) Se, no instante $t = 0$, a energia do sistema é medida, quais os valores podem ser encontrados e com quais probabilidades?

(b) Suponha que ao medirmos a energia do sistema encontramos o valor $2\hbar\omega_0$. Nesse caso, qual é o estado físico do sistema após a medida?

(c) Se, ao invés de medirmos H, medimos A no instante $t = 0$, quais são os possíveis resultados e com quais probabilidades.

(d) A mesma pergunta do item anterior, mas agora para o operador B.

(e) Calcule o estado do sistema $\left|\psi(t)\right\rangle$ no instante t (OBS.: Nesse item, desconsidere todas as medições dos itens anteriores, isto é, desconsidere qualquer colapso da função de onda antes da evolução temporal.).

(f) Mostre que a probabilidade $\mathscr{P}(a, t)$ de medir o operador A em $t > 0$ e obter o autovalor a é igual a $\mathscr{P}(a, t = 0)$. Por que isso acontece? O mesmo é verdade para o operador B?

Solução:

- **Item (a):**

Quando fazemos uma medida de um observável, os **resultados** que podemos obter são os seus **autovalores**. Note que na base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, o Hamiltoniano do sistema já se encontra diagonal e seus autovalores são $\hbar\omega_0$ (com respectivo autoestado $|u_1\rangle$) e $2\hbar\omega_0$ (duplamente degenerado, com autoestados $|u_2\rangle$ e $|u_3\rangle$). Desse modo, ao medirmos a energia do sistema, os possíveis resultados que podemos obter são $E_1 = \hbar\omega_0$ e $E_2 = E_3 = 2\hbar\omega_0$. Vamos às probabilidades:

(i) Probabilidade de medir $\hbar\omega_0$:

De acordo com o quarto postulado da Mecênica Quântica [1], a probabilidade de medirmos $\hbar\omega_0$ é dada por

$$\mathscr{P}(\hbar\omega_0) = \frac{\langle \psi(0) | P_1 | \psi(0) \rangle}{\langle \psi(0) \,|\, \psi(0) \rangle} \,, \tag{1}$$

onde P_1 corresponde ao projeto no(s) autoestado(s) de H relativo(s) ao autovalor $E_1 = \hbar\omega_0$. Como esse autovalor não é degenerado, temos, simplesmente,

$$P_1 = |\, u_1 \rangle \, \langle \, u_1 | \;\; . \tag{2}$$

Levando (2) em (1), temos

$$P_1 = |\, u_1 \rangle \, \langle \, u_1 | \; \mathscr{P}(\hbar\omega_0) = \frac{\langle \psi(0) \,|\, u_1 \rangle \langle u_1 \,|\, \psi(0) \rangle}{\langle \psi(0) \,|\, \psi(0) \rangle} = \frac{\left| \langle u_1 \,|\, \psi(0) \rangle \right|^2}{\langle \psi(0) \,|\, \psi(0) \rangle} \,.$$

Mas $|\psi(0)\rangle$ já está normalizado, isto é $\langle \psi(0) \,|\, \psi(0) \rangle = 1$, e além disso, sendo a base do espaço de estados é ortonormal, segue que

$$\langle u_i \,|\, u_j \rangle = \delta_{i,j} \,, \quad j = 1, 2, 3 \,, \tag{3}$$

de modo que $\mathscr{P}(\hbar\omega_0)$ fica

$$\boxed{\mathscr{P}(\hbar\omega_0) = \frac{1}{2}} \,. \tag{4}$$

(ii) Probabilidade de medir $2\hbar\omega_0$:

Analogamente, de acordo com o quarto postulado da Mecânica Quântica, a probabilidade $\mathscr{P}(2\hbar\omega_0)$ de medir a energia do sistema e obter $2\hbar\omega_0$ é dada por

$$\mathscr{P}(2\hbar\omega_0) = \frac{\langle \psi(0) | P_2 | \psi(0) \rangle}{\langle \psi(0) \,|\, \psi(0) \rangle} \,. \tag{5}$$

Contudo, o autovalor $\hbar\omega_0$ é duas vezes degenerado, de modo que o projetor P_2 nos autoestados referentes ao autovalor $2\hbar\omega_0$ é

$$P_2 = |\, u_2 \rangle \, \langle \, u_2 | + |\, u_3 \rangle \, \langle \, u_3 | \;\; . \tag{6}$$

Assim sendo, usando novamente a ortonormalidade da base do espaço de estados, encontramos

$$\mathscr{P}(2\hbar\omega_0) = \left| \langle u_2 \,|\, \psi(0) \rangle \right|^2 + \left| \langle u_3 \,|\, \psi(0) \rangle \right|^2 = \boxed{\frac{1}{2}} \,. \tag{7}$$

Note que somando (4) e (7), obtemos 1, como deveria ser, pois a probabilidade de medirmos a energia e obtermos algum resultado, seja ele qual for, é 1.

[1] Vide página 217 do Cohen-Tannoudji (volume 1).

- **Item (b):**

O quinto postulado da Mecânica Quântica[2] nos diz que, após uma medida, a função de onda que caracteriza o sistema colapsa para o(s) **autoestado(s)** do observável relativo ao autovalor medido. Isto é, se denotarmos por $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ a função de onda da partícula após a medida, temos

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = \frac{P_2\,|\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle\psi(0)|P_2|\psi(0)\rangle}}\,, \tag{8}$$

onde o fator $\sqrt{\langle\psi(0)|P_2|\psi(0)\rangle}$ garante a normalização da nova função de onda e P_2 o projetor sobre os autoestados de H relativos ao autovalor $2\hbar\omega_0$, equação (6).

Usando (1) e (6), temos

$$P_2\,|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[|u_2\rangle + |u_3\rangle\right]$$

e

$$\langle\psi(0)|P_2|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle\psi(0)\,|\,u_2\rangle + \langle\psi(0)\,|\,u_3\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\langle u_2\,|\,\psi(0)\rangle^* + \langle u_3\,|\,\psi(0)\rangle^*\right] = \frac{1}{2}\,.$$

Desse modo a função de onda após a medida, equação (8) fica

$$\boxed{|\tilde{\psi}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle + |u_3\rangle\right]}\,. \tag{9}$$

Note que, de fato, $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ está normalizada.

- **Item (c):**

Ao medirmos o observável A, os possíveis resultados que podemos obter são seus autovalores. Como A nao é diagonal na base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, a primeira coisa que devemos fazer é diagonalizá-lo.

Importante: nessas notas apresentarei diretamente a forma diagonal dos observáveis A e B, explicitando seus autovalores e respectivos autoestados. Não explicitarei as contas de como diagonalizá-los, visto que isso já foi feito nas notas da Aula de Exercícios anterior.

Diaginalizando A, encontramos os seguintes autovalores e autoestados:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Autovalores de } A & & \text{Autoestados de } A \\ a_1 = a & \longrightarrow & |a_1\rangle = |u_1\rangle \\ & & \\ a_2 = a & \longrightarrow & |a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle + |u_3\rangle\right] \\ & & \\ a_3 = -a & \longrightarrow & |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle - |u_3\rangle\right] \end{array}}\,. \tag{10}$$

Dessa forma, ao medirmos A, podemos obter os resultados a ou $-a$, com as seguintes probabilidades:

(i) Probabilidade de obter a:

Novamente, usando o quarto postulado da Mecânica Quântica:

$$\mathscr{P}(a) = \frac{\langle\psi(0)|P_a|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)\,|\,\psi(0)\rangle}\,, \tag{11}$$

[2] Cohen-Tannoudji, página 221 (volume1).

onde P_a corresponde ao projetor nos autoestados de A relativos ao autovalor a, ou seja, como a é duplamente degenerado,

$$P_a = |a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| \; . \tag{12}$$

Então

$$\mathscr{P}(a) = \left|\left\langle a_1 \,|\, \psi(0)\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle a_2 \,|\, \psi(0)\right\rangle\right|^2 \; , \tag{13}$$

onde os *kets* $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ estão dados em (10). Sendo

$$\left\langle a_1 \,|\, \psi(0)\right\rangle = \left\langle u_1 \,|\, \psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$\left\langle a_2 \,|\, \psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle u_2 \,|\, \psi(0)\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle u_3 \,|\, \psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ,$$

segue que

$$\boxed{\mathscr{P}(a) = 1} \; . \tag{14}$$

(ii) Probabilidade de medir $-a$:

Analogamente,

$$\mathscr{P}(-a) = \frac{\left\langle \psi(0) \,|P_{-a}|\, \psi(0)\right\rangle}{\left\langle \psi(0) \,|\, \psi(0)\right\rangle} \; , \tag{15}$$

onde

$$P_{-a} = |a_3\rangle\langle a_3| \; . \tag{16}$$

Mas como

$$\left\langle a_3 \,|\, \psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle u_2 \,|\, \psi(0)\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle u_3 \,|\, \psi(0)\right\rangle = 0 \; ,$$

segue que

$$\mathscr{P}(-a) = \left|\left\langle a_3 \,|\, \psi(0)\right\rangle\right|^2 = \boxed{0} \; . \tag{17}$$

- **Item (c):**

Similarmente ao item anterior, diagonalizando B, encontramos

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Autovalores de } B & & \text{Autoestados de } B \\ b_1 = b & \longrightarrow & |b_1\rangle = |u_3\rangle \\ & & \\ b_2 = b & \longrightarrow & |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|u_1\rangle + |u_2\rangle\right] \\ & & \\ b_3 = -b & \longrightarrow & |b_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|u_1\rangle - |u_2\rangle\right] \end{array}} \; . \tag{18}$$

De modo que ao medirmos B, podemos encontrar os resultados b e $-b$ com as seguintes probabilidades:

(i) Probabilidade de medir b:

$$\mathscr{P}(b) = \frac{\left\langle \psi(0) \,|P_b|\, \psi(0)\right\rangle}{\left\langle \psi(0) \,|\, \psi(0)\right\rangle} \; , \tag{19}$$

onde

$$P_b = |b_1\rangle\langle b_1| + |b_2\rangle\langle b_2| \ . \tag{20}$$

Então, já que

$$\langle b_1 | \psi(0)\rangle = \langle u_3 | \psi(0)\rangle = \frac{1}{2}$$

e

$$\langle b_2 | \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_1 | \psi(0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_2 | \psi(0)\rangle = \frac{(2+\sqrt{2})}{4} \ ,$$

temos

$$\mathscr{P}(b) = \left|\langle b_1 | \psi(0)\rangle\right|^2 + \left|\langle b_2 | \psi(0)\rangle\right|^2 \approx \boxed{0{,}98} \, . \tag{21}$$

(ii) Probabilidade de medir $-b$:

$$\mathscr{P}(-b) = \frac{\langle \psi(0) | P_{-b} | \psi(0)\rangle}{\langle \psi(0) | \psi(0)\rangle} \ , \tag{22}$$

onde

$$P_{-b} = |b_3\rangle\langle b_3| \ . \tag{23}$$

Então, já que

$$\langle b_3 | \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_1 | \psi(0)\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_2 | \psi(0)\rangle = \frac{(2-\sqrt{2})}{4} \ ,$$

temos

$$\mathscr{P}(-b) = \left|\langle b_3 | \psi(0)\rangle\right|^2 \approx \boxed{0{,}02} \, . \tag{24}$$

- **Item (e)**

O sexto postulado da Mecânica Quântica[3] nos diz que a evolução temporal da função de onda do sistema é dada pela equação de Schrödiger

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle \ ,$$

com a condição inicial $\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$. Equivalentemente, podemos encontrar $\left|\psi(t)\right\rangle$ utilizando o **operador evolução temporal**, $U(t)$:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t)\left|\psi(0)\right\rangle \ , \tag{25}$$

sendo, no caso particular em que o Hamiltoniano independe do tempo[4],

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \ . \tag{26}$$

[3] Cohen-Tannoudji, página 222 (Volume 1).

[4] Lembremo-nos que a exponencial de um operador (uma matriz) é calculado da seguinte maneira:

$$e^{\alpha A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n A^n}{n!} \ .$$

Então
$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-iHt/\hbar}\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iHt/\hbar}\left|u_1\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-iHt/\hbar}\left|u_2\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-iHt/\hbar}\left|u_3\right\rangle \ .$$
Mas como $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ e $|u_3\rangle$ são autoestados de H com autovalores $h_1 = \hbar\omega_0$, $h_2 = 2\hbar\omega_0$ e $h_2 = 2\hbar\omega_0$, respectivamente, segue que

$$e^{-iHt/\hbar}\left|u_j\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-it}{\hbar}\right)^n \frac{H^n}{n!}\left|u_j\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-it}{\hbar}\right)^n \frac{h_j^n}{n!}\left|u_j\right\rangle = e^{-ih_jt/\hbar}\left|u_j\right\rangle$$

e, consequentemente,

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-ih_1t/\hbar}\left|u_1\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-ih_2t/\hbar}\left|u_2\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-ih_3t/\hbar}\left|u_3\right\rangle \ ,$$

$$\therefore \boxed{\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0t}\left|u_1\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0t/\hbar}\left[\left|u_2\right\rangle + \left|u_3\right\rangle\right]} \ . \tag{27}$$

- **Item (f):**

$$\mathscr{P}(a,t) = \frac{\left\langle\psi(t)\left|P_a\right|\psi(t)\right\rangle}{\left\langle\psi(t)\mid\psi(t)\right\rangle} = \left|\,a_1\left|\psi(t)\right\rangle\right|^2 + \left|\,a_2\left|\psi(t)\right\rangle\right|^2 \ ,$$

onde $\left|\psi(t)\right\rangle$ é dada por (27), $|a_1\rangle$ e $|a_1\rangle$ estão explicitados em (10) e usamos o fato de que $\left|\psi(t)\right\rangle$ já está normalizada. Agora

$$\left\langle a_1\mid\psi(t)\right\rangle = \left\langle u_1\mid\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0t} \Rightarrow \left|\left\langle a_1\mid\psi(t)\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

e
$$\left\langle a_2\mid\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle u_2\mid\psi(t)\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle u_3\mid\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega_0t} \Rightarrow \left|\left\langle a_2\mid\psi(t)\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2} \ .$$
Portanto
$$\boxed{\mathscr{P}(a,t) = \mathscr{P}(a,0) = 1} \ , \tag{28}$$
como queríamos mostrar.

A justificaiva $\mathscr{P}(a,t)$ ser igual a $\mathscr{P}(a,0)$ está no fato de que os oberváveis A e H **comutam**. Vejamos: vamos calcular

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{P}(a,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\psi(t)\left|P_a\right|\psi(t)\right\rangle \ ,$$

já que $\left\langle\psi(t)\mid\psi(t)\right\rangle = 1$. Usando o teorema de Ehenfest[5], encontramos, como o projetor P_a independe explicitamente do tempo[6],
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{P}(a,t) = \frac{1}{i\hbar}\left\langle[P_a,H]\right\rangle \ .$$
Além disso,
$$[P_a,H] = 0 \ , \tag{29}$$

[5] Cohen-Tannoudji, página 249 (volume 1).

[6] Isso porque $P_a = |a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2|$ e os autoestados de H independem do tempo, uma vez que o próprio observável H não é uma função do tempo.

pois A e H formam um C.C.O.C e $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ e $|a_3\rangle$ são uma base comum a esses dois operadores, daí:

$$[P_a, H]\left|\varphi\right\rangle = |a_1\rangle\left\langle a_1|H|\varphi\right\rangle + |a_2\rangle\left\langle a_2|H|\varphi\right\rangle - H\,|a_1\rangle\left\langle a_1|\varphi\right\rangle - H\,|a_2\rangle\left\langle a_2|\varphi\right\rangle = 0\,,$$

pois $H|a_1\rangle = \hbar\omega_0\,|a_1\rangle$ e $H|a_2\rangle = 2\hbar\omega_0\,|a_2\rangle$. Isso posto, segue que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{P}(a,t) = 0 \Rightarrow \mathscr{P}(a,t) = \mathscr{P}(a,0) = \text{constante}}\,.$$

O mesmo **não é verdade** para o observável B, já que o mesmo não comuta com H.