Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

Conjugação Hermiteana.

- Ação de um operador linear sobre um bra.

Antes, lembre que definimos na aula passada a ação de um operador linear sobre um ket, ou seja, se $|\psi\rangle$ é um ket e A um operador linear, $A|\psi\rangle$ também é um ket. Aplique um funcional linear ($\langle\phi|$) nos $A|\psi\rangle$ para obter $\langle\phi|A|\psi\rangle$. Note que esse mesmo resultado seria obtido se aplicássemos a quantidade $\langle\phi|A$ em $|\psi\rangle$. O que nos faz concluir que $\langle\phi|A$ também é um funcional linear e $\therefore$ na linguagem de Dirac, trata-se de um bra. Dizemos que $\langle\phi|A \in \mathcal{E}^\star$, assim como $\langle\phi| \in \mathcal{E}^\star$.

Cuidado: $\langle\phi|A \Longleftrightarrow A|\phi\rangle$ *um pode não vir do outro!*

A relação que define $\langle\phi|A$ pode ser escrita por $\boxed{(\langle\phi|A)|\psi\rangle = \langle\phi|(A|\psi\rangle).}$

Que em palavras fica: O operador A associa a cada bra $\langle\phi|$ um novo bra $\langle\phi|A$ que quando aplicado em $|\psi\rangle$ resulta em $\langle\phi|(A|\psi\rangle)$. Será que essa relação é linear? Para ver isso, suponha $\langle\chi|=\lambda_1\langle\phi_1|+\lambda_2\langle\phi_2|$. Sabemos que $(\langle\chi|A)|\psi\rangle=$

$$= \langle\chi|(A|\psi\rangle) = (\lambda_1\langle\phi_1|+\lambda_2\langle\phi_2|)(A|\psi\rangle) = \lambda_1\langle\phi_1|(A|\psi\rangle)+\lambda_2\langle\phi_2|(A|\psi\rangle) =$$

$$= \lambda_1(\langle\phi_1|A)|\psi\rangle+\lambda_2(\langle\phi_2|A)|\psi\rangle = (\lambda_1\langle\phi_1|A+\lambda_2\langle\phi_2|A)|\psi\rangle$$

$$\therefore \quad (\lambda_1\langle\phi_1|+\lambda_2\langle\phi_2|)A = \lambda_1\langle\phi_1|A+\lambda_2\langle\phi_2|A$$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- *Comentários:*

(1) Como $(\langle\phi|A)|\psi\rangle = \langle\phi|(A|\psi\rangle)$, daqui para frente usaremos $\langle\phi|A|\psi\rangle$.

(2) Cuidado com a ordem $\langle\phi|A \neq A\langle\phi|$ onde $\begin{cases} \langle\phi|A \rightarrow \text{ um bra, agindo} \\ \text{sobre um ket, dá um número} \\ \\ A\langle\phi| \rightarrow \text{agindo sobre um ket,} \\ \text{dá um operador. Até aqui} \\ \text{sem sentido para nós.} \end{cases}$

- O operador adjunto $A^\dagger$ de um operador A.

Até aqui temos $\begin{cases} |\psi\rangle \overset{A}{\Longrightarrow} & |\psi'\rangle = A|\psi\rangle \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \langle\psi| \overset{?}{\Longrightarrow} & \langle\psi'| = \langle\psi|? \end{cases}$ Chamaremos o operador que transforma

$\langle\psi|$ em $\langle\psi'|$ de $\boxed{A^\dagger = \text{operador adjunto de } A.}$

Ou seja, $\begin{cases} |\psi\rangle \overset{A}{\Longrightarrow} & |\psi'\rangle = A|\psi\rangle \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \langle\psi| \overset{A^\dagger}{\Longrightarrow} & \langle\psi'| = \langle\psi|A^\dagger \end{cases}$ $\Longrightarrow$ pode-se dizer que é a definição de $A^\dagger$.

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- Será que esse operador $A^\dagger$ é linear? Para verificar isso, calcularemos
$$(\lambda_1\langle\psi_1| + \lambda_2\langle\psi_2|)A^\dagger$$
Para tanto defina $\lambda_1\langle\psi_1| + \lambda_2\langle\psi_2| = \langle\chi|$ e note que $\langle\chi|A^\dagger \Longleftrightarrow A|\chi\rangle$ (definição). Quanto vale $|\chi\rangle$? Lembre da aula 4, slide 13, onde aprendemos que a passagem $|\chi\rangle \Longleftrightarrow \langle\chi|$ é antilinear, e escreva: $|\chi\rangle = \lambda_1^\star|\psi_1\rangle + \lambda_2^\star|\psi_2\rangle$. Como A é linear, podemos escrever $A|\chi\rangle = \lambda_1^\star A|\psi_1\rangle + \lambda_2^\star A|\psi_2\rangle = \lambda_1^\star|\psi_1'\rangle + \lambda_2^\star|\psi_2'\rangle$, onde $\begin{cases} A|\psi_1\rangle = |\psi_1'\rangle \\ A|\psi_2\rangle = |\psi_2'\rangle \end{cases}$
Esse ket corresponde ao bra $\lambda_1\langle\psi_1'| + \lambda_2\langle\psi_2'| = \lambda_1\langle\psi_1|A^\dagger + \lambda_2\langle\psi_2|A^\dagger$ que mostra que $A^\dagger$ é linear. Note que usamos $\begin{cases} A|\psi_1\rangle = |\psi_1'\rangle \Longleftrightarrow \langle\psi_1|A^\dagger = \langle\psi_1'| \\ A|\psi_2\rangle = |\psi_2'\rangle \Longleftrightarrow \langle\psi_2|A^\dagger = \langle\psi_2'| \end{cases}$
- Uma propriedade importante, consequência de $A|\psi\rangle = |\psi'\rangle \Longleftrightarrow \langle\psi|A^\dagger = \langle\psi'|$,

combinado com $\langle\psi'|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi'\rangle^\star$; é $\boxed{\langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^\star.}$

- Tudo se passa como se $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle = |A\psi\rangle \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \langle\psi'| = \langle A\psi| = \langle\psi|A^\dagger \in \mathcal{E}^\star$.
- Quanto vale $\left(A^\dagger\right)^\dagger$? Considere $B = A^\dagger$ com $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|A^\dagger$
$\therefore \langle\psi'| = \langle\psi|B \leftrightarrow |\psi'\rangle = B^\dagger|\psi\rangle = \left(A^\dagger\right)^\dagger|\psi\rangle \therefore$ $\boxed{\left(A^\dagger\right)^\dagger = A.}$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- Quanto vale $(\lambda A)^\dagger$?

  Para calcular isso, considere

  $$\langle\psi|(\lambda A)^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|\lambda A|\psi\rangle^\star = \lambda^\star\langle\varphi|A|\psi\rangle^\star = \lambda^\star\langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\psi|\lambda^\star A^\dagger|\varphi\rangle.$$

  Como vale para $\forall|\varphi\rangle$ e $\forall|\psi\rangle$, temos que necessariamente $\boxed{(\lambda A)^\dagger = \lambda^\star A^\dagger.}$

- Quanto vale $(A+B)^\dagger$?

  Para calcular isso, considere

  $$\langle\psi|(A+B)^\dagger \rightarrow (A+B)|\psi\rangle = A|\psi\rangle + B|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|A^\dagger + \langle\psi|B^\dagger = \langle\psi|(A^\dagger + B^\dagger).$$

  O que permite concluir que $\boxed{(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger.}$

- Quanto vale $(AB)^\dagger$?

  Para calcular isso, considere

  $|\varphi\rangle = AB|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle) = A|\chi\rangle$ com $|\chi\rangle = B|\psi\rangle$.

  O bra correspondente ao ket $|\varphi\rangle$ é $\langle\varphi| = \langle\psi|(AB)^\dagger = \langle\chi|A^\dagger$.

  Usando que $\langle\chi| = \langle\psi|B^\dagger$, obtemos $\langle\varphi| = \langle\psi|B^\dagger A^\dagger$ e concluímos que

  $$\boxed{(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.}$$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- *Conjugação Hermiteana*

$$\text{Resumo da notação de Dirac}\begin{cases} A^\dagger \text{ é dito conjugado Hermiteano de } A. \\ \langle\psi| \text{ é dito conjugado Hermiteano de } |\psi\rangle. \\ \lambda^\star \text{ é dito conjugado Hermiteano de } \lambda. \end{cases}$$

É importante notar que *a conjugação Hermiteana muda a ordem dos "objetos" do qual ela está aplicada.* Por exemplo:

(1) $\big(A|\psi\rangle\big)^\dagger = \langle\psi|A^\dagger$

(2) $\big(AB\big)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

(3) O que você esperaria de $\big(|u\rangle\langle v|\big)^\dagger$?

Lembre que $\langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^\star$ e substitua A por $\big(|u\rangle\langle v|\big)$, para obter

$$\langle\psi|\big(|u\rangle\langle v|\big)^\dagger|\varphi\rangle = \big[\langle\varphi|\big(|u\rangle\langle v|\big)|\psi\rangle\big]^\star = \langle u|\varphi\rangle\langle\psi|v\rangle = \langle\psi|v\rangle\langle u|\varphi\rangle = \langle\psi|\big(|v\rangle\langle u|\big)|\varphi\rangle$$

O que permite concluir que vale $\big(|u\rangle\langle v|\big)^\dagger = |v\rangle\langle u|$.

- Regra: *Para se obter o conjugado Hermiteano (ou o adjunto) de qualquer expressão composta de constantes, kets, bras, e operadores, precisamos:*

$$\textit{trocar:}\begin{cases} \lambda \to \lambda^\star;\, A \to A^\dagger \\ |\psi\rangle \to \langle\psi| \\ \langle\psi| \to |\psi\rangle \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \textit{e reverter a ordem dos fatores. Note que a} \\ \textit{posição das constantes é irrelevante.} \end{cases}$$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

Exemplo: Qual é conjugado Hermiteano de $\lambda\langle u|A|v\rangle|\omega\rangle\langle\psi|$?

A aplicação direta da regra fornece: $\left(\lambda\langle u|A|v\rangle|\omega\rangle\langle\psi|\right)^\dagger = |\psi\rangle\langle\omega|\langle v|A^\dagger|u\rangle\lambda^\star$ e isso é igual à $\lambda^\star\langle v|A^\dagger|u\rangle|\psi\rangle\langle\omega|,$ com $\langle v|A^\dagger|u\rangle = \langle u|A|v\rangle^\star$.

- **Operadores Hermiteanos** $\begin{cases} \text{são operadores que respeitam } A^\dagger = A \\ \text{são fundamentais na Mecânica Quântica} \end{cases}$
  - Isso implica em $\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^\star, \ \forall\ |\varphi\rangle$ e $|\psi\rangle$.
  - Vale também escrever $\langle A\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle$.
  - Exemplos:

(1) Será que $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ é Hermiteano? $P_\psi^\dagger = \left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$

(2) Será que o produto de dois operadores Hermiteanos é Hermiteano?

Dados $\begin{cases} A^\dagger = A \\ B^\dagger = B \end{cases}$ $\Rightarrow$ calcule $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$ e conclua:

O produto de dois operadores Hermiteanos é Hermiteano, somente se eles comutarem, isto é $[A,B] = AB - BA = 0$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- **Representações no Espaço de Estados**

$$\text{Definição}\begin{cases}\text{Escolher uma representação é escolher uma base ortonormal de}\\ \mathcal{E}\text{ que pode ser discreta ou contínua (e, em alguns casos, ambas).}\end{cases}$$

Os kets, bras e operadores serão representados nesta base por números. Com

$$\text{a designação:}\begin{cases}\text{(1) componentes de um vetor coluna para kets,}\\ \text{(2) componentes de um vetor linha para bras e}\\ \text{(3) componentes de matrizes quadradas para operadores.}\end{cases}$$

Benvindo ao mundo da álgebra linear e dos cálculos matriciais!

- $$\text{Para tanto, revisemos, na notação de Dirac, os conceitos de}\begin{cases}\text{base discreta,}\\ \text{base contínua,}\\ \text{ortonormalidade,}\\ \text{e completeza.}\end{cases}$$

∘ Bases discretas e contínuas.

$$\text{A base é um conjunto de kets}\begin{cases}\{|u_i\rangle\} \to \begin{cases}\text{índice } i \text{ discreto}\\ \text{e enumerável.}\end{cases}\\ \{|w_\alpha\rangle\} \to \begin{cases}\text{índice } \alpha \text{ contínuo}\\ \text{e incontável.}\end{cases}\end{cases}$$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- *Relação de ortonormalidade.* A base é definida de tal forma que seus kets

$$\text{respeitam} \begin{cases} \langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij} \rightarrow \text{no caso discreto} \\ \\ \langle w_\alpha|w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha') \rightarrow \text{no caso contínuo} \\ \\ \langle u_i|w_\alpha\rangle = \langle w_\alpha|u_i\rangle = 0 \rightarrow \text{na mistura discreto/contínuo} \end{cases}$$

- *Relação de Completeza.* A base ser completa significa que para $\forall$ ket $|\psi\rangle$,

$$\text{é sempre possível escrever:} \begin{cases} |\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle \rightarrow \text{no caso discreto} \\ |\psi\rangle = \int d\alpha\ c(\alpha)|w_\alpha\rangle \rightarrow \text{no caso contínuo} \\ |\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle + \int d\alpha\ c(\alpha)|w_\alpha\rangle \rightarrow \text{na mistura} \end{cases}$$

$$\text{onde} \begin{cases} c_i = \langle u_i|\psi\rangle \\ \\ c(\alpha) = \langle w_\alpha|\psi\rangle \end{cases} \rightarrow$$ Substituindo isso nas equações acima, obtemos a chamada

$$\begin{matrix}\textit{Relação de} \\ \text{Completeza}\end{matrix} \begin{cases} |\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle|u_i\rangle = (\underbrace{\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|}_{})|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle \\ \\ \text{define-se aqui o operador unidade:} \quad \mathbb{1} \\ \\ |\psi\rangle = \int d\alpha\ c(\alpha)|w_\alpha\rangle = (\overbrace{\int d\alpha\ |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha|}^{})|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle \end{cases}$$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

Mostre que no caso de uma base mista (discreta e contínua), teríamos

$$|\psi\rangle = \underbrace{(\sum_i |v_i\rangle\langle v_i| + \int d\alpha\ |q_\alpha\rangle\langle q_\alpha|)}|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle$$

$\mathbb{1} \rightarrow$ operador unidade ou operador identidade em $\mathcal{E}$.

- Isso permite escrever $\begin{cases} P_{\{|u_i\rangle\}} = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1} \\ P_{\{|w_\alpha\rangle\}} = \int d\alpha\ |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| = \mathbb{1} \\ P_{\{|v_i\rangle,|q_\alpha\rangle\}} = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i| + \int d\alpha\ |q_\alpha\rangle\langle q_\alpha| = \mathbb{1} \end{cases}$
- Se $\{|u_i\rangle\}$ ou $\{|w_\alpha\rangle\}$ formam uma base, $\displaystyle\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$ e $\displaystyle\int d\alpha\ |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| = \mathbb{1}$.

E o caminho inverso? $\begin{cases} |\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle \\ |\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int d\alpha\ |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha|\psi\rangle = \int d\alpha\ c(\alpha)|w_\alpha\rangle \end{cases}$

- Logo mais veremos que $\begin{cases} \int d\alpha\ |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| = \mathbb{1} \rightarrow \int d\alpha\ w_\alpha(x)w_\alpha^\star(x') = \delta(x-x') \\ \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1} \rightarrow \sum_i u_i(x)u_i^\star(x') = \delta(x-x') \end{cases}$

Formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica

- Interpretação geométrica $\begin{cases} P_{\{|u_i\rangle\}} = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| \text{ é um projetor.} \\ \\ |u_i\rangle\langle u_i| \text{ projeta } |\psi\rangle \text{ na direção } |u_i\rangle. \end{cases}$

Comentários

(a) Se a soma em i for parcial, o espaço projetado $\mathcal{E}'$ é um subespaço de $\mathcal{E}$.

(b) Se a soma for completa $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$.

(c) Relação com $\Re^3$: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

No espaço $\Re^3$ temos $\begin{cases} P_1 \text{ projeta em } \vec{e}_1 \\ P_2 \text{ projeta em } \vec{e}_2 \\ P_3 \text{ projeta em } \vec{e}_3 \end{cases}$ e é razoável que $P_1 + P_2 + P_3 = \mathbb{1}$,

ou ainda, se $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, temos $\begin{cases} P_1\vec{v} = v_1\vec{e}_1 \\ P_2\vec{v} = v_2\vec{e}_2 \\ P_3\vec{v} = v_3\vec{e}_3 \end{cases}$

Resumo

$\{\lvert u_i\rangle\}$	$\{\lvert w_\alpha\rangle\}$
$\langle u_i \lvert u_j\rangle = \delta_{ij}$	$\langle w_\alpha \lvert w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$
$\sum_i \lvert u_i\rangle\langle u_i\rvert = \mathbb{1}$	$\int d\alpha \, \lvert w_\alpha\rangle\langle w_\alpha\rvert = \mathbb{1}$

Resumo da notação de Dirac (até aqui)

Definimos:

- kets: $|\psi\rangle \to$ vetor estado.
- bras: $\langle\varphi| \to$ funcional linear.
- bracket: $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^\star \to$ produto escalar.
- Operador: $A \to A|\psi\rangle = |\psi'\rangle$.
- Elemento de matriz: $\langle\varphi|A|\psi\rangle \to \langle\varphi|(A|\psi\rangle)$.
- Operador sobre um bra: $\langle\varphi|A$ também é um bra, definido por $(\langle\varphi|A)|\psi\rangle = \langle\varphi|(A|\psi\rangle) = \langle\varphi|A|\psi\rangle$.
- O bra associado ao ket $A|\psi\rangle$ é definido por $\langle\psi|A^\dagger$. O operador $A^\dagger$ é dito o adjunto de $A \Longrightarrow A|\psi\rangle = |A\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi|A^\dagger = \langle A\psi|$.
- Vale a relação $\langle\varphi|A^\dagger|\psi\rangle = \langle A\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle^\star = \langle\psi|A|\varphi\rangle^\star$.
- Se $A^\dagger = A \to A$ é Hermiteano. Neste caso $\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A|\varphi\rangle^\star$.

Temos o suficiente para introduzir o conceito de representação de um estado físico qualquer em um espaço de estados conhecidos (uma base conhecida).

Representações no espaço de estados

- **A representação de kets.**

Considere uma base conhecida $\{|u_i\rangle\}$. Vimos que um ket de sua escolha arbitrária poderia ser escrito com a ajuda do operador unidade por:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle \Rightarrow \begin{cases} \text{O conjunto de números} \\ \text{complexos } c_i \text{ descreve o ket.} \end{cases}$$

Representaremos o ket nessa base por uma matriz coluna, dada por:

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_i|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ se base contínua } |\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \vdots \\ c(\alpha) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \langle w_\alpha|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Note que os números mudariam de acordo com a escolha da base. Nas próximas aulas aprenderemos como mudar de uma base para outra.

Representações no espaço de estados

- **A representação de bras.**

Considere uma base conhecida $\{|u_i\rangle\}$. Vimos que um bra de sua escolha arbitrária poderia ser escrito com a ajuda do operador unidade por:

$$\langle\psi| = \langle\psi|\mathbb{1} = \sum_i \langle\psi|u_i\rangle\langle u_i| = \sum_i c_i^\star \langle u_i| \Rightarrow \begin{cases} \text{O conjunto de números} \\ \text{complexos } c_i^\star \text{ descreve o bra.} \end{cases}$$

Representaremos o bra nessa base por uma matriz linha, dada por:

$$\langle\psi| \doteq \begin{pmatrix} c_1^\star & c_2^\star & \ldots & c_i^\star & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\psi|u_1\rangle & \langle\psi|u_2\rangle & \ldots & \langle\psi|u_i\rangle & \ldots \end{pmatrix}.$$

Se base for contínua

$$\langle\psi| \doteq \begin{pmatrix} \ldots & c^\star(\alpha) & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \langle\psi|w_\alpha\rangle & \ldots \end{pmatrix}$$

Note que os números que representam os bras são os complexos conjugados dos números que representam os kets. A representação do bra nada mais é que a transposta da matriz que representa o ket, seguida da conjugação complexa de todos os elementos.

Como obter o bracket $\langle\varphi|\psi\rangle$ nesta representação?

Representações no espaço de estados

- **O bracket** $\langle\varphi|\psi\rangle$

  Considere novamente uma base conhecida $\{|u_i\rangle\}$. Para obter o valor do bracket nesta base basta fazer uso do operador unidade na relação:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle = \sum_i b_i^\star c_i \text{ com } \begin{cases} b_i = \langle u_i|\varphi\rangle \\ c_i = \langle u_i|\psi\rangle \end{cases}$$

  Note que esse mesmo resultado seria obtido pela multiplicação de matrizes

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b_1^\star & b_2^\star & \dots & b_i^\star & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{contínua}}{=} \begin{pmatrix} \dots & b^\star(\alpha) & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ c(\alpha) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- **Representação dos operadores.** Sabendo que $A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$, definimos:

$$A \doteq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{12} & \dots & A_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Representação do produto de operadores: AB

Sabendo que $A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$, e $B_{ij} = \langle u_i|B|u_j\rangle$, represente cada operador por

$$A \doteq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{12} & \dots & A_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

$$B \doteq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1j} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{i1} & B_{12} & \dots & B_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

O produto $AB = \mathbb{1}A\mathbb{1}B\mathbb{1} = \sum_{i,\ell,j} |u_i\rangle A_{i\ell}B_{\ell j}\langle u_j|$ fica representado por

$$AB \doteq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{12} & \dots & A_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1j} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{i1} & B_{12} & \dots & B_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$