Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- O potencial de um oscilador harmônico em uma dimensão é dado por $\frac{1}{2}kx^2$.

  Tal potencial gera uma força $F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx \begin{cases} \text{Uma força de restauração.} \\ \text{Sempre atrativa para } x = 0. \end{cases}$

- Qual é a solução na mecânica clássica?

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \begin{cases} x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \text{ a partícula que em } t = 0 \text{ estava em} \\ x(0) = x_m \cos\varphi, \text{ com velocidade } \dot{x}(0) = x_m \omega \sin\varphi, \text{ oscila em} \\ \text{uma trajetória linear, com freqüência angular } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{cases}$$

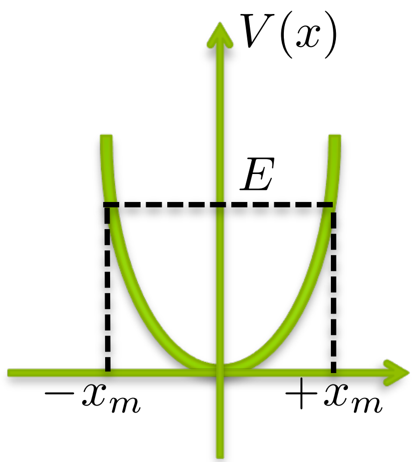
- Na mecânica quântica, além de ser uma boa descrição para qualquer fundo de poço (primeiro termo diferente de zero em uma expansão de Taylor), a ferramenta quântica que desenvolveremos (operadores de criação e destruição) será útil nos itens d), e), e f), abaixo.

- Sua importância
  - a) espectroscopia molecular,
  - b) cristais e outras estruturas no estado sólido,
  - c) estrutura nuclear,
  - d) partículas idênticas e teoria de campo,
  - e) ótica,
  - f) mecânica estatística,
  - g) etc. Além de ser simples e pedagógico.

Alguns aspectos importantes do Oscilador Harmônico Simples

- *Definição dos pontos de retorno clássicos.*

  $x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi)$ tem seus maiores valores absolutos em $\pm x_m$, quando $\cos(\omega t - \varphi) = \pm 1 \rightarrow (\omega t - \varphi) = n\pi$. Note que nesses pontos, as velocidades se anulam, pois $\dot{x}(t) = -x_m \omega \sin(n\pi) = 0$. A partícula, quando se move no sentido contrário à força, vai diminuindo sua velocidade até parar. Em seguida ela retorna, aumentando sua velocidade no mesmo sentido da força até atingir a posição $x = 0$. Após esse ponto o processo de repete. Os pontos de parada, $\pm x_m$, são conhecidos por pontos de retorno clássico. Um gráfico de energia mostra isso mais claramente.



$$E = T + V = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$$

onde $\begin{cases} x(t) = x_m \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{x}(t) = -x_m \omega \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$ e $k = m\omega^2$

Assim $E = \dfrac{1}{2} m(-x_m \omega \sin(\omega t - \varphi))^2 + \dfrac{1}{2} k(x_m \cos(\omega t - \varphi))^2$

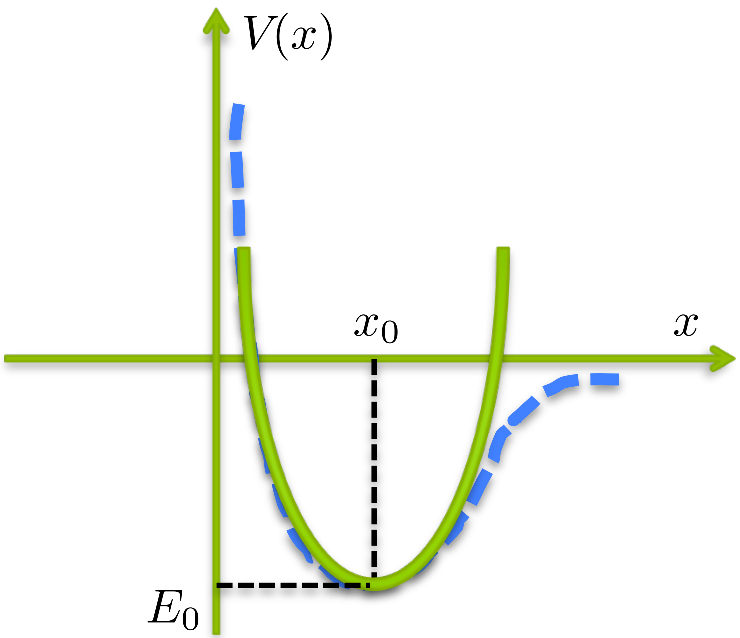
Isso fornece $E = \dfrac{1}{2} k x_m^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x_m^2$ (constante no tempo).

- Fixando E podemos achar os pontos de retorno clássicos.
- Em $x = \pm x_m$ $\begin{cases} V(x) = E \text{ é máximo,} \\ T(\dot{x}) = 0 \text{ é mínimo.} \end{cases}$ Em $x = 0$ $\begin{cases} V(x) = 0 \text{ é mínimo,} \\ T(\dot{x}) = E \text{ é máximo.} \end{cases}$

Alguns aspectos importantes do Oscilador Harmônico Simples

- *Uma aproximação razoável de potenciais com estrutura de mínimo.*

A figura mostra uma possível curva de potencial de uma molécula diatômica. Para $x \to 0$, os núcleos se repelem fortemente e para $x \to \infty$, a molécula dissocia. Ao redor do ponto de equilíbrio, x_0, é possível aproximar a curva real por uma parábola. Os níveis vibracionais, próximos do fundo do poço



desta molécula, podem ser obtidos nesta aproximação. De um modo geral podemos escrever: $V(x) = V(x_0) + \underbrace{\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0}}_{0 \text{ (ponto de mínimo)}}(x - x_0) +$

$$+\frac{1}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \ldots \approx a + b(x-x_0)^2$$

com $a = V(x_0)$ e $b = \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} > 0$ (mínimo).

A equação de Newton fica $m\frac{d^2x}{dt^2} = -2b(x - x_0)$

com $\omega = \sqrt{\frac{2b}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}}$. Esta estratégia é geral e pode ser aplicada para qualquer potencial que tenha um mínimo local. Além disso, na mecânica quântica, ela cria bases úteis para o problema real.

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- *Uma solução trivial do MHS, segundo a mecânica clássica.*

  A solução mais simples de $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$ é $\begin{cases} x(t) = x_0 \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall\ t.$

  Ela representa uma partícula eternamente em repouso. A mecânica quântica não aceita tal solução, pois ela violaria a relação de incerteza (neste caso $\Delta x \Delta p = 0$).

- *Propriedades gerais da Hamiltoniana da Mecânica Quântica.*

  Fazendo a troca $\begin{cases} x \to X \\ p \to P \end{cases}$ a Hamiltoniana fica: $H = \dfrac{P^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 X^2$ com ω igual ao valor clássico, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \to k$ (da lei de Hooke) e $[X, P] = i\hbar$.

- A equação que define os estados estacionários $H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$ pode ser escrita na representação das coordenadas $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} - \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\varphi(x) = E\varphi(x)$.

  - Partícula prisioneira, $\therefore$ espectro discreto. Só energias específicas satisfazem as condições de contorno. $E > 0$ (sempre maior que o fundo do poço).
  - As autofunções têm paridade bem definida $\varphi(-x) = \pm\varphi(x)$. Isso porque a Hamiltoniana é par na troca $x \to -x$ (ver complemento F_{II}).

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- *Autovalores da Hamiltoniana.*

Começamos definindo dois operadores auxiliares $\begin{cases} \hat{X} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \\ \hat{P} \equiv \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \end{cases}$

- Quanto vale o comutador $[\hat{X}, \hat{P}]$?

$$[\hat{X}, \hat{P}] = [\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X, \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P] = \frac{[X, P]}{\hbar} = \frac{i\hbar}{\hbar} = i$$

- Como fica H em função de $\hat{X}$ e $\hat{P}$?

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 = \frac{m\hbar\omega}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \hat{X}^2 = \hbar\omega \frac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2}$$

Isso permite definir $\hat{H} \equiv \dfrac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2}$ e reduzir nosso problema para a equação de autovalor $\hat{H}|\varphi_\nu^i\rangle = \xi_\nu |\varphi_\nu^i\rangle$ (i é necessário, pois não discutimos degenerescência.)

- Operadores de criação ($a^\dagger$), de destruição (a), e contador ($N = a^\dagger a$) de quanta.

Definição $\begin{cases} a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \\ a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \end{cases}$ cuidado $\hat{H} = \dfrac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2} \neq a^\dagger a$, pois $[\hat{X}, \hat{P}] = i$.

$$a^\dagger a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) = \frac{\hat{P}^2 + \hat{X}^2}{2} + i \frac{(\hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X})}{2} = \hat{H} - \frac{1}{2}.$$

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

- *Autovalores da Hamiltoniana (continuação).*
  - Com isso temos $\hat{H} = a^\dagger a + \frac{1}{2}$ e $H = \hbar\omega\big(a^\dagger a + \frac{1}{2}\big) = \hbar\omega\big(N + \frac{1}{2}\big)$ onde $N \equiv a^\dagger a$. Note que $[N,\hat{H}]=[N,H]=0$ e que se houver degenerescência no espectro de H, nem $\hat{H}$, nem N podem quebrá-la. $\therefore$ se resolvermos $N|\varphi^i_\nu\rangle=\nu|\varphi^i_\nu\rangle$, o problema estará resolvido, pois $H|\varphi^i_\nu\rangle = \hbar\omega\xi_\nu|\varphi^i_\nu\rangle = \hbar\omega\big(\nu + \frac{1}{2}\big)|\varphi^i_\nu\rangle$, sendo que o índice i continua mantido para permitir degenerescência.
  - Como $(a^\dagger)^\dagger = a, N$ é Hermiteano, pois $N^\dagger = \big(a^\dagger a\big)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = N$.
  - $[a,a^\dagger] = \frac{1}{2}[\hat{X}+i\hat{P},\hat{X}-i\hat{P}] = \frac{i}{2}[\hat{P},\hat{X}] - \frac{i}{2}[\hat{X},\hat{P}] = \frac{i}{2}(-i) - \frac{i}{2}(+i) = 1.$
  - Mostre que se tivéssemos iniciado a discussão com $aa^\dagger$, obteríamos $\hat{H}=aa^\dagger-\frac{1}{2}$.
- Será que N comuta com a ou com $a^\dagger$?
  - $[N,a] = [a^\dagger a,a] = a^\dagger[a,a] + [a^\dagger,a]a = -a$
  - $[N,a^\dagger] = [a^\dagger a,a^\dagger] = a^\dagger[a,a^\dagger] + [a^\dagger,a^\dagger]a = a^\dagger.$

Veremos que estas duas propriedades de comutação de N permitirão obter o espectro do OHS sem precisar resolver a equação diferencial.

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Autovalores da Hamiltoniana (continuação). Lemas:

Sobre os autovalores de N.

- Lema 1: os autovalores são positivos ou zero.

Considere $|\varphi_\nu^i\rangle$ tal que $N|\varphi_\nu^i\rangle = \nu|\varphi_\nu^i\rangle$. Quanto vale o o quadrado da norma de $a|\varphi_\nu^i\rangle$?

$$\left\| a|\varphi_\nu^i\rangle \right\|^2 = \langle\varphi_\nu^i|a^\dagger a|\varphi_\nu^i\rangle = \langle\varphi_\nu^i|N|\varphi_\nu^i\rangle = \langle\varphi_\nu^i|\nu|\varphi_\nu^i\rangle = \nu \geq 0$$

O que demonstra o lema: os autovalores de N não podem ser negativos.

Sobre $a|\varphi_\nu^i\rangle$.

- Lema 2: se $\begin{cases} \nu = 0 \to a|\varphi_\nu^i\rangle = 0 \\ \nu > 0 \to N(a|\varphi_\nu^i\rangle) = (\nu - 1)a|\varphi_\nu^i\rangle \end{cases}$

  - Vimos no lema 1 que $\left\| a|\varphi_\nu^i\rangle \right\|^2 = \nu$. A norma é zero só se o ket for o keto nulo, $\therefore\ a|\varphi_\nu^i\rangle = 0$ se $\nu = 0$. Note que se $a|\varphi_\nu^i\rangle = 0 \Rightarrow a^\dagger a|\varphi_\nu^i\rangle = 0 \therefore N|\varphi_\nu^i\rangle = 0|\varphi_\nu^i\rangle$.

    Com isso aprendemos que $|\varphi_0^i\rangle$ é autoket de N com autovalor 0.

  - Vimos que $[N, a] = -a$. Aplique isso em $|\varphi_\nu^i\rangle$para obter:

    $[N, a]|\varphi_\nu^i\rangle = -a|\varphi_\nu^i\rangle \Rightarrow Na|\varphi_\nu^i\rangle = aN|\varphi_\nu^i\rangle - a|\varphi_\nu^i\rangle = (\nu - 1)a|\varphi_\nu^i\rangle$, ou seja

    $$N\, \underbrace{a|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} = \underbrace{(\nu - 1)}_{\text{autovalor}}\, \underbrace{a|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} \Rightarrow a|\varphi_\nu^i\rangle \textit{ é um autoket de } N \textit{ com autovalor } \nu - 1.$$

Oscilador Harmônico Simples (OHS)

Autovalores da Hamiltoniana (continuação). Lemas:

Sobre $a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle$.

- Lema 3 $\begin{cases} a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \text{ nunca é zero} \\ a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \text{ é autoket de } N \text{ com autovalor } \nu+1 \end{cases}$

  - Para a primeira parte, calcule $\left\|a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle\right\|^2 = \langle\varphi_\nu^i|aa^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \underset{[a,a^\dagger]=1}{=} \langle\varphi_\nu^i|1+a^\dagger a|\varphi_\nu^i\rangle$

    Isso fornece $\left\|a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle\right\|^2 = \langle\varphi_\nu^i|1+N|\varphi_\nu^i\rangle = (\nu+1)$.Como $\nu \geq 0 \rightarrow \nu+1 > 0$.
    Norma diferente de zero permite concluir que $a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle$ nunca é zero.

  - Vimos que $[N, a^\dagger] = a^\dagger$. Aplique isso em $|\varphi_\nu^i\rangle$para obter:
    $[N, a^\dagger]|\varphi_\nu^i\rangle = a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \Rightarrow Na^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle = a^\dagger N|\varphi_\nu^i\rangle + a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle = (\nu+1)a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle,$ ou seja

$$N\underbrace{a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} = \underbrace{(\nu+1)}_{\text{autovalor}}\underbrace{a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle}_{\text{autoket}} \Rightarrow\ a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle \textit{ é autoket de } N \textit{ com autovalor } \nu+1.$$

A partir das propriedades de $a|\varphi_\nu^i\rangle$ e $a^\dagger|\varphi_\nu^i\rangle$ *estamos prontos para calcular o espectro do OHS.*

O espectro de N é composto de inteiros não negativos

- Já vimos que $N|\varphi^i_\nu\rangle = \nu|\varphi^i_\nu\rangle$ com $\nu \geq 0$.

  Suponha que ν não é inteiro, $\therefore\ \exists\ n,$ inteiro, tal que $n < \nu < n+1$.

  Considere uma série de vetores $\{|\varphi^i_\nu\rangle, a|\varphi^i_\nu\rangle, a^2|\varphi^i_\nu\rangle, ...a^n|\varphi^i_\nu\rangle\}$ escolha p inteiro com $0 \leq p \leq\ n$ e lembre que $a^p|\varphi^i_\nu\rangle$ é autoket de N com autovalor $\nu - p$.

  Aplicando a em $|\varphi^i_\nu\rangle, p$ vezes, construimos a seguinte tabela:

Autovetor	Autovalor
$\lvert\varphi^i_\nu\rangle$	ν
$a\lvert\varphi^i_\nu\rangle$	$\nu - 1$
$a^2\lvert\varphi^i_\nu\rangle$	$\nu - 2$
$\vdots$	$\vdots$
$a^{p-1}\lvert\varphi^i_\nu\rangle$	$\nu - p + 1$
$a^p\lvert\varphi^i_\nu\rangle$	$\nu - p$

Note que $\begin{cases} \text{por construção:} \\ \nu \text{ está entre } n \text{ e } n+1, \\ p \text{ é menor ou igual à } n, \\ \therefore\ \ \nu - p > 0 \text{ e } a^p|\varphi^i_\nu\rangle \neq 0. \\ \text{Vale também para } p = n, \\ \text{pois } \nu - n > 0 \rightarrow a^n|\varphi^i_\nu\rangle \neq 0 \end{cases}$

- Como $n < \nu < n+1,$ subtraia n dos 3 termos para obter $0 < \nu - n < 1$ e conclua $a^n|\varphi^i_\nu\rangle$ é autoket de N com autovalor $\nu - n,$ entre 0 e 1. O que obteríamos se aplicássemos mais uma vez o operador a? Um autoket de N com autovalor negativo! Para evitar isso, basta exigir que ν seja inteiro. Ou seja ν não pode estar entre n e $n+1,$ precisa ser um deles (n ou $n+1$).
- Se $\nu = n,$ teríamos $a^n|\varphi^i_n\rangle \propto |\varphi^i_0\rangle\ \therefore a^{n+1}|\varphi^i_n\rangle = 0 \Rightarrow$ novas aplicações de a não gerariam kets com autovalores negativos $(a^\mu a^{n+1}|\varphi^i_n\rangle = 0, \forall\mu)$.

O espectro de N é composto de inteiros não negativos

- Considerando que o menor autovalor de N é 0, e supondo que você conhece um dos autokets de N, por exemplo, o $|\varphi_n^i\rangle$, como construir um autovetor de N com autovalor k?

  Aprendemos que $a^n|\varphi_n^i\rangle \propto |\varphi_0^i\rangle \neq 0$, autoket de N com autovalor 0. Basta aplicar k vezes o $a^\dagger$. Cada vez que aplicamos o $a^\dagger$, o autovalor do ket correspondente fica acrescido de 1. Assim o ket procurado é proporcional à ${a^\dagger}^k a^n|\varphi_n^i\rangle$.
- Finalmente podemos escrever o espectro do OHS quântico como solução da equação

$$H|\varphi_n^i\rangle = E_n|\varphi_n^i\rangle \text{ com } E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \text{ e } n = 0,1,2...$$

  - Note que a menor energia possível não é zero como no caso clássico. É $\frac{1}{2}\hbar\omega$.
  - Os outros níveis são obtidos acrescentando um múltiplo de $\hbar\omega$ (que pode ser definido como um quanta de energia).
- Interpretação física $\begin{cases} N \rightarrow \text{contador de quantas de energia.} \\ a \rightarrow \text{aniquila ou destrói um quanta de energia.} \\ a^\dagger \rightarrow \text{cria ou constrói um quanta de energia.} \end{cases}$
- Essa interpretação inspirou uma ferramenta para tratar partículas idênticas (férmions e bósons), com quantas trocados por partículas

Degenerescência dos autovalores

- Considere o estado fundamental que satisfaz a equação

$$H|\varphi_0^i\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|\varphi_0^i\rangle, \text{ com } a|\varphi_0^i\rangle = 0.$$

Para achar a degenerescência, precisamos saber quantos vetores linearmente independentes satisfazem $a|\varphi_0^i\rangle = 0$.

- Lembre que $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}P)$. Isso combinado com a equação $a|\varphi_0^i\rangle = 0$ pode dar uma equação diferencial simples na representação das coordenadas. Para explorar a ideia tome $\langle x|\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X+\frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}P)|\varphi_0^i\rangle=0$, que pode ser escrita por $\left(m\omega x + i\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi_0^i(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0^i(x) = 0.$
- A solução geral desta equação é dada por $\varphi_0^i(x) = ce^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$, onde a constante c tem alguma flexibilidade. Quando escrevemos $c = |c|e^{i\arg c}$, observamos que $|c|$ fica definido pela condição de normalização. Assim, a flexibilidade se reduz a escolha da fase global $e^{i\arg c}$. Na mecânica quântica, isso significa que todas as soluções são linearmente dependentes. Com isso concluímos que o estado fundamental é não degenerado.

Degenerescência dos autovalores

- O estado fundamental é não degenerado. E os outros? De fato, todos são não degenerados, conforme mostramos a seguir. Faremos uma demonstração por indução finita.

  - Suponha que o n-ésimo estado é não degenerado. Ele satisfaz a equação:

$$N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$$

O que podemos esperar da degenerescência do estado $|\varphi^i_{n+1}\rangle$? Sabemos que $a|\varphi^i_{n+1}\rangle$ é necessariamente diferente de zero e autoestado de N com autovalor n. Isso obriga que $a|\varphi^i_{n+1}\rangle$ seja colinear com $|\varphi_n\rangle$, isto é $a|\varphi^i_{n+1}\rangle = c^i|\varphi_n\rangle$. Aplique $a^\dagger$ nesta equação e obtenha $a^\dagger a|\varphi^i_{n+1}\rangle = c^i a^\dagger|\varphi_n\rangle \Rightarrow N|\varphi^i_{n+1}\rangle = c^i a^\dagger|\varphi_n\rangle$ $\therefore$ $|\varphi^i_{n+1}\rangle = \dfrac{c^i}{n+1}a^\dagger|\varphi_n\rangle$ a diferença entre os diversos $|\varphi^i_{n+1}\rangle$, $\forall\ i$, está em uma constante multiplicativa, c^i. Ou seja, são todos colineares! $\therefore$, podemos dizer que se n é não degenerado, $(n+1)$ também é um autovalor não degenerado. Como provamos que $n=0$ é não degenerado, a prova por indução finita está completa.

- Com isso concluímos que o espectro do OHS é por inteiro não degenerado e daqui para frente dispensaremos o índice i $\begin{cases} N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle \\ H|\varphi_n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|\varphi_n\rangle \end{cases}$

$\boxed{N \text{ ou } H \text{ é CCOC}}$

Autoestados da Hamiltoniana

- A representação $|\varphi_n\rangle$

  Como N e H são observáveis, seus autovetores formam uma base em $\mathcal{E}_x$. Lembre que o $\mathcal{E}_x$ é um espaço unidimensional de funções de uma partícula. No slide 11 desta aula, calculamos o estado fundamental na representação das coordenadas. Será que conseguiríamos calcular todos os outros estados?

- Um bom começo seria com auxílio do operador $a^\dagger$ construir todos os outros kets a partir de $|\varphi_0\rangle$.

  Sabemos que $a|\varphi_0\rangle = 0$ e podemos supor que $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$. Para obter um ket colinear à $|\varphi_1\rangle$ basta aplicar uma vez o $a^\dagger$.

$$|\varphi_1\rangle = c_1 a^\dagger |\varphi_0\rangle$$

  Normalize supondo que c_1 é real (convenção). Isso é o mesmo que pedir

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = |c_1|^2\langle\varphi_0|aa^\dagger|\varphi_0\rangle = |c_1|^2\langle\varphi_0|1 + a^\dagger a|\varphi_0\rangle = |c_1|^2\langle\varphi_0|1 + N|\varphi_0\rangle = |c_1|^2 = 1$$

  $\therefore c_1 = 1$ e $|\varphi_1\rangle = a^\dagger|\varphi_0\rangle$ fornece $|\varphi_1\rangle$ já normalizado.

- Repita o procedimento para $|\varphi_2\rangle$.

$$|\varphi_2\rangle = c_2 a^\dagger |\varphi_1\rangle$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = |c_2|^2\langle\varphi_1|aa^\dagger|\varphi_1\rangle = |c_2|^2\langle\varphi_1|1 + a^\dagger a|\varphi_1\rangle = |c_2|^2\langle\varphi_1|1 + N|\varphi_1\rangle = 2|c_2|^2 = 1$$

  $c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $|\varphi_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger|\varphi_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2|\varphi_0\rangle$ fornece $|\varphi_2\rangle$ já normalizado.

Autoestados da Hamiltoniana

- Repita o procedimento para o caso geral $|\varphi_n\rangle$.

$$|\varphi_n\rangle = c_n a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = |c_n|^2\langle\varphi_{n-1}|aa^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle = |c_n|^2\langle\varphi_{n-1}|1+a^\dagger a|\varphi_{n-1}\rangle = |c_n|^2\langle\varphi_{n-1}|1+N|\varphi_{n-1}\rangle =$$
$$= n|c_n|^2 = 1$$

$c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e $|\varphi_n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n}}a^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}(a^\dagger)^2|\varphi_{n-2}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle$ fornece $|\varphi_n\rangle$ já normalizado.

As relações $\boxed{|\varphi_n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n}}a^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle}$ e $\boxed{|\varphi_n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle}$ serão muito úteis.

- Ortonormalização e relação de completeza.

H é Hermiteano e é uma observável. Sabemos, portanto, que seus autokets respeitam as relações:

$$\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = \delta_{nn'} \text{ e } \mathbb{1} = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

Na próxima aula exploraremos a relação de $a^\dagger, a,$ e N com outros operadores, calcularemos $\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle$, médias, desvios quadráticos, e evoluções temporais de problemas envolvendo o OHS.