

## Mais sobre os novos operadores

- Vimos que  $|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle$ . Como fica a ortonormalidade  $\langle\varphi_{n'}|\varphi_n\rangle$ ?

$$\langle\varphi_{n'}|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n'!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle\varphi_0|a^{n'}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle \Rightarrow \text{note que se usarmos as regras de}$$

comutação, podemos encostar o  $a$  no ket  $|\varphi_0\rangle$  e isso resultaria em zero. O

mesmo pode-se dizer sobre encostar pela direita  $a^\dagger$  no bra  $\langle\varphi_0|$ , isto é

$\langle\varphi_0|a^\dagger = (a|\varphi_0\rangle)^\dagger = 0$ . Para explorar isso, considere  $a^{n'}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle$ , sabendo que

$[a, a^\dagger] = 1$ . Com isso, temos

$$\begin{aligned} a^{n'}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle &= a^{n'-1}aa^\dagger(a^\dagger)^{n-1}|\varphi_0\rangle = a^{n'-1}(1+a^\dagger a)(a^\dagger)^{n-1}|\varphi_0\rangle = \\ &= a^{n'-1}(1+N) \underbrace{(a^\dagger)^{n-1}|\varphi_0\rangle}_{\propto |\varphi_{n-1}\rangle} = a^{n'-1}(1+(n-1))(a^\dagger)^{n-1}|\varphi_0\rangle \end{aligned}$$

Isso permite escrever  $a^{n'}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle = na^{n'-1}(a^\dagger)^{n-1}|\varphi_0\rangle$ . Separe em três situações:

- $n < n' \Rightarrow \langle\varphi_{n'}|\varphi_n\rangle = \frac{\langle\varphi_0|a^{n'}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle}{\sqrt{n'!n!}} = \frac{n(n-1)\dots 2.1}{\sqrt{n'!n!}} \langle\varphi_0|a^{n'-n}|\varphi_0\rangle = 0$
- $n > n' \Rightarrow \langle\varphi_{n'}|\varphi_n\rangle = \frac{\langle\varphi_0|a^{n'}(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle}{\sqrt{n'!n!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-n'+1)}{\sqrt{n'!n!}} \langle\varphi_0|a^{\dagger n-n'}|\varphi_0\rangle = 0$
- $n = n' \Rightarrow \langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \frac{\langle\varphi_0|a^n(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle}{\sqrt{n!n!}} = \frac{n(n-1)\dots 2.1}{\sqrt{n!n!}} \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$

## Mais sobre os novos operadores

- Na aula passada vimos que  $|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$ .
- Troque  $n$  por  $n+1$  e obtenha  $|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^\dagger |\varphi_n\rangle \Rightarrow a^\dagger |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\varphi_{n+1}\rangle$
- Multiplique  $|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$  por  $a$  e obtenha  $a|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a a^\dagger |\varphi_{n-1}\rangle$  que com auxílio de  $[a, a^\dagger] = 1$ , fica  $a|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + a^\dagger a) |\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + (n-1)) |\varphi_{n-1}\rangle$ ,  
 $\therefore a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n} |\varphi_{n-1}\rangle$ .
- Tome o adjunto hermiteano das expressões nas caixas  $\begin{cases} \langle \varphi_n | a = \sqrt{n+1} \langle \varphi_{n+1} | \\ \langle \varphi_n | a^\dagger = \sqrt{n} \langle \varphi_{n-1} | \end{cases}$
- Estamos prontos para obter resultados de aplicações dos operadores  $X$  e  $P$  (escritos em função de  $a$  e  $a^\dagger$ ) sobre autokets de  $N$  e  $H$ , os  $\{|\varphi_n\rangle\}$ .

A partir de  $\begin{cases} a = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \\ a^\dagger = \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \end{cases}$  escrevemos  $\begin{cases} \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) \\ \hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) \end{cases}$  onde  $\begin{cases} \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \\ \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P \end{cases}$

Isso permite escrever  $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a)$  e  $P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} i(a^\dagger - a)$ .

## Mais sobre os novos operadores

- A combinação dos resultados obtidos nas caixas do slide 2 permite escrever

$$X|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle]$$

$$P|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} i [\sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle - \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle]$$

Essas expressões permitem aplicar operadores construídos por combinações de  $X$  e  $P$  nos elementos da base de  $H$ .

- É útil escrever a representação matricial de  $a$  e  $a^\dagger$  na base  $\{|\varphi_n\rangle\}$ . Para

tanto, use

$$\begin{cases} \langle\varphi_{n'}|a|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_{n'}|\sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1} \\ \langle\varphi_{n'}|a^\dagger|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_{n'}|\sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \langle\varphi_0| \\ \langle\varphi_1| \\ \langle\varphi_2| \\ \langle\varphi_3| \\ \vdots \end{array} a \doteq \begin{array}{c} |\varphi_0\rangle \\ |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \\ |\varphi_3\rangle \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} a^\dagger \doteq \begin{array}{c} |\varphi_0\rangle \\ |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \\ |\varphi_3\rangle \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

# Estados estacionários do OHS na representação da coordenada

- Na aula passada, vimos que  $|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\varphi_0\rangle$ . Com auxílio dos resultados do slide 2, podemos escrever  $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$  e com isso, obter:

$$\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x|(a^\dagger)^n|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x|\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{iP}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)^n|\varphi_0\rangle, \text{ que}$$

pode ser escrita por:

$$\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hbar \frac{d}{dx}\right)^n \langle x|\varphi_0\rangle, \text{ para finalmente obter}$$

uma fórmula de recorrência para todos os estados a partir do fundamental:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx}\right)^n \varphi_0(x)$$

Lembre que na aula passada, a partir de  $a|\varphi_0\rangle = 0$ , obtivemos esse estado na representação das coordenadas,  $\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$  (normalizado).

Com alguns ajustes a fórmula de recorrência fica:

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^n\right]^{1/2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left[\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{d}{dx}\right]^n e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

# Estados estacionários do OHS na representação da coordenada

- Será que a fórmula de recorrência carrega a informação que as soluções têm paridade bem definida? Para verificar isso, troque  $x \rightarrow -x$  e obtenha

$$\varphi_n(-x) = \left[ \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{1/2} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left[ \frac{m\omega}{\hbar}(-x) - \frac{d}{d(-x)} \right]^n e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} (-x)^2} = (-1)^n \varphi(x)$$

- A paridade das funções de onda do OHS é  $(-1)^n \begin{cases} n \text{ ímpar, função ímpar} \\ n \text{ par, função par} \end{cases}$
- Note que o polinômio (de Hermite) que multiplica a exponencial é de grau  $n$ .

- **n = 0**

$$\varphi_0(x) = \left[ \frac{1}{2^0 0!} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^0 \right]^{1/2} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left[ \frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{d}{dx} \right]^0 e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

- **n = 1**

$$\varphi_1(x) = \left[ \frac{1}{2^1 1!} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^1 \right]^{1/2} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left[ \frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{d}{dx} \right]^1 e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

O primeiro estado excitado do OHS é:  $\varphi_1(x) = \left( \frac{4}{\pi} \right)^{1/4} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{3/4} x e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$

- **n = 2**

O segundo estado excitado do OHS é dado por (faça em casa)

$$\varphi_2(x) = \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left[ \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right] e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

# Estados estacionários do OHS na representação da coordenada

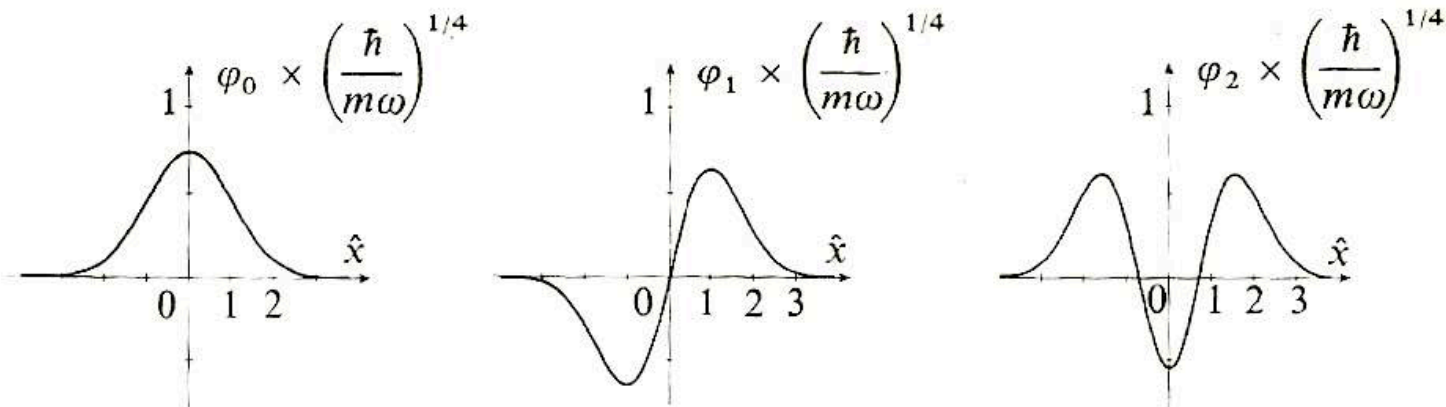


Fig. 4, cap. 5 do texto

## Funções de onda associadas aos três primeiros níveis do OHS

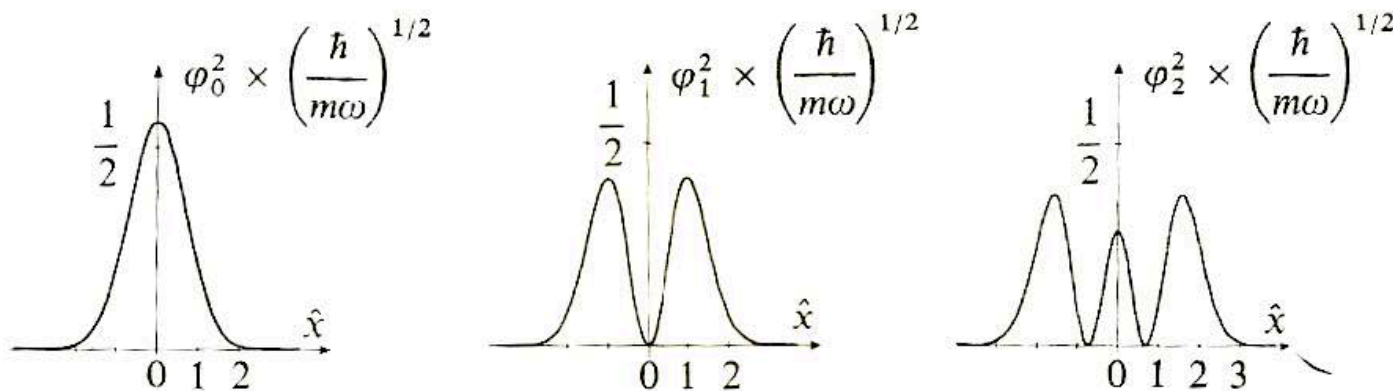
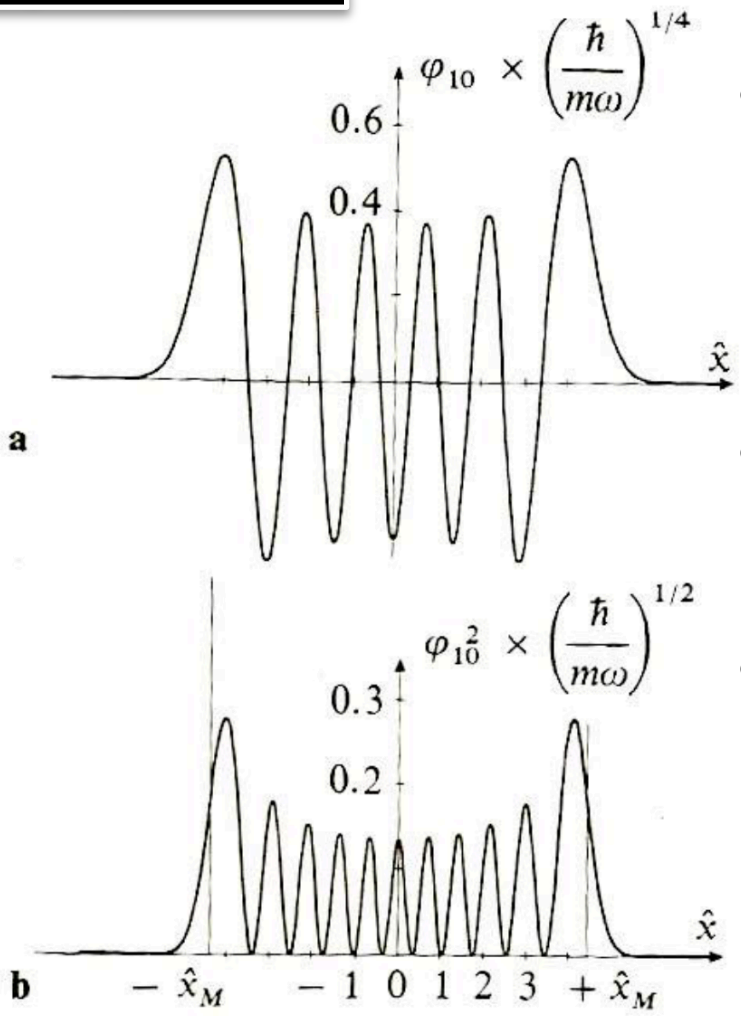


Fig. 5, cap. 5 do texto

- Quanto vale a probabilidade de achar a partícula entre  $x$  e  $x + dx$ ?  $d\mathcal{P} = |\langle x|\varphi_n\rangle|^2 dx = |\varphi_n(x)|^2 dx$ .

Fig. 6, cap. 5 do texto



- Quanto  $n$  cresce, a região de  $x$  onde  $\varphi_n(x)$  é diferente de zero e não desprezível cresce (compare com as figuras do slide anterior). Note que é o que ocorre classicamente.
- Note a presença possível da partícula em regiões classicamente proibidas  $|x| > x_m$ .
- Note picos maiores nas curvas de densidade de probabilidade nas regiões de  $x \sim x_m$ . Partícula passa mais tempo nestas regiões, pois a velocidade é pequena quando  $x \sim x_m$ .

## Médias e desvios quadráticos da média

Para avaliar o desvio quadrático da média para os estados estacionários, precisamos calcular  $\langle X \rangle$ ,  $\langle P \rangle$ ,  $\langle X^2 \rangle$ , e  $\langle P^2 \rangle$  para o estado  $|\varphi_n\rangle$ . Para isso, usamos as seguintes

relações: 
$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \rightarrow X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) \\ P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^\dagger) \rightarrow P^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}(a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a) \\ a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle \text{ e } a^\dagger|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle \\ \langle \varphi_{n'} | \varphi_n \rangle = \delta_{n',n} \end{cases}$$

que fornecem 
$$\begin{cases} \langle \varphi_n | X | \varphi_n \rangle = 0 \\ \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \varphi_n | (a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) | \varphi_n \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} (n + \frac{1}{2}) \\ \langle \varphi_n | P | \varphi_n \rangle = 0 \\ \langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2} \langle \varphi_n | (a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a) | \varphi_n \rangle = m\hbar\omega (n + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Lembre que 
$$\begin{cases} (\Delta X)^2 = \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle - \langle \varphi_n | X | \varphi_n \rangle^2 = \langle \varphi_n | X^2 | \varphi_n \rangle \\ (\Delta P)^2 = \langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle - \langle \varphi_n | P | \varphi_n \rangle^2 = \langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle \end{cases}$$

Com isso podemos escrever

$$(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 = (n + \frac{1}{2})^2 \hbar^2.$$



## Médias e desvios quadráticos da média

- Note que isso nos leva à  $(\Delta X)(\Delta P) = (n + \frac{1}{2})\hbar$  sempre superior à  $\frac{\hbar}{2}$ , conforme esperado, segundo a relação de incerteza.
- Note que para o estado fundamental essa relação reflete o extremo inferior da relação de incerteza  $(\Delta X)(\Delta P) = \frac{1}{2}\hbar$ .

- Sabemos que  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  e vimos que  $(\Delta X)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}(n + \frac{1}{2})$ . Podemos escrever  $(\Delta X)^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{E_n}{\hbar\omega} \Rightarrow$  Se usarmos que  $E_n = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2$ , obtemos uma relação entre  $(\Delta X)$  e  $x_m$ , dada por  $(\Delta X)^2 = \frac{1}{2}x_m^2 \therefore (\Delta X) = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$ .

*A incerteza sobre a posição da partícula é cerca de 70% da amplitude clássica.*

- De forma semelhante  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  com  $(\Delta P)^2 = m\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , permite escrever  $(\Delta P)^2 = m\hbar\omega \frac{E_n}{\hbar\omega} \Rightarrow$  Se usarmos agora que  $E_n = \frac{p_m^2}{2m}$ , obtemos uma relação entre  $(\Delta P)$  e  $p_m$ , dada por  $(\Delta P)^2 = \frac{p_m^2}{2} \therefore (\Delta P) = \frac{p_m}{\sqrt{2}}$ .

*A incerteza sobre o momento da partícula é da ordem de 70% do valor máximo do momento clássico  $p_m$ .*

# Médias e desvios quadráticos da média

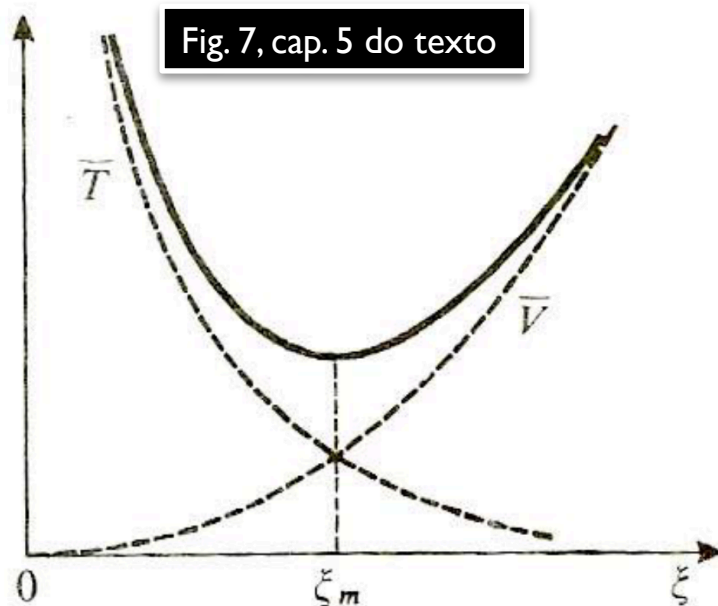
- Quanto vale o valor médio do potencial  $\langle V(X) \rangle$ ?

$$\bar{V} = \langle V(X) \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle X^2 \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta X)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{E_n}{2}.$$

- Quanto vale o valor médio da energia cinética  $\langle \frac{P^2}{2m} \rangle$ ?

$$\bar{T} = \langle \frac{P^2}{2m} \rangle = \frac{1}{2m} (\Delta P)^2 = \frac{1}{2m} m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{E_n}{2}.$$

- Se considerarmos  $(\Delta X) = \xi$  e que para o estado fundamental  $(\Delta X)(\Delta P) \sim \hbar$ , podemos escrever  $(\Delta P) = \frac{\hbar}{\xi}$ . A energia fica  $\bar{E} = \bar{T} + \bar{V} = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 \xi^2$ .



- Note que a relação de incerteza atua como uma espécie de vínculo (se  $(\Delta X)$  cresce,  $(\Delta P)$  decresce e vice-versa).

- Podemos calcular a menor energia,

$$\text{impondo } \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} = 0 \rightarrow -\frac{2\hbar^2}{2m\xi^3} + \frac{2m\omega^2}{2}\xi = 0,$$

$$\text{fornece } \xi_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \rightarrow E_m = \hbar\omega.$$

## Evolução temporal dos valores médios

- Para sistemas conservativos, um bom começo é expandir o estado inicial na base de estados estacionários, isto é, sabendo que:  $\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ , escreva  $\mathbb{1}|\psi(0)\rangle$ ,

$$\text{de tal forma que } |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)|\varphi_n\rangle \text{ com } c(0) = \langle\varphi_n|\psi(0)\rangle.$$

- A evolução temporal do estado do sistema fica

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)|\varphi_n\rangle \implies |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)|\varphi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}|\varphi_n\rangle.$$

- Para o OHS, onde  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , temos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0)e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}|\varphi_n\rangle$$

- Com isso podemos escrever o valor médio de uma observável,  $A$  por

$$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m^*(0)c_n(0)A_{mn}e^{i(m-n)\omega t} \text{ com } A_{mn} = \langle\varphi_m|A|\varphi_n\rangle.$$

*As frequências de Bohr que participam são múltiplos de  $\omega$ . O controle de relevância das frequências envolvidas é do elemento de matriz  $A_{mn}$ .*

## Evolução temporal dos valores médios

- Como ficariam os valores médios de  $X$  e  $P$ ?

$$\langle \psi(t) | X | \psi(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m^*(0) c_n(0) X_{mn} e^{i(m-n)\omega t} \quad \text{com } X_{mn} = \langle \varphi_m | X | \varphi_n \rangle.$$

$$\langle \psi(t) | P | \psi(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_m^*(0) c_n(0) P_{mn} e^{i(m-n)\omega t} \quad \text{com } P_{mn} = \langle \varphi_m | P | \varphi_n \rangle.$$

Sabemos que  $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$  e  $P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}i(a^\dagger - a)$  e isso permite concluir que  $X_{mn}$  e  $P_{mn}$  só não são zeros quando  $m = n \pm 1$  e  $\therefore$  só  $e^{\pm i\omega t}$  participam (funções do tipo  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$ , como na física clássica).

- Para reforçar, considere o teorema de Ehrenfest para  $X$  e  $P$ .

$$\frac{d}{dt} \langle X \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [X, H] \rangle = \frac{\langle P \rangle}{m} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \langle P \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [P, H] \rangle = -m\omega^2 \langle X \rangle$$

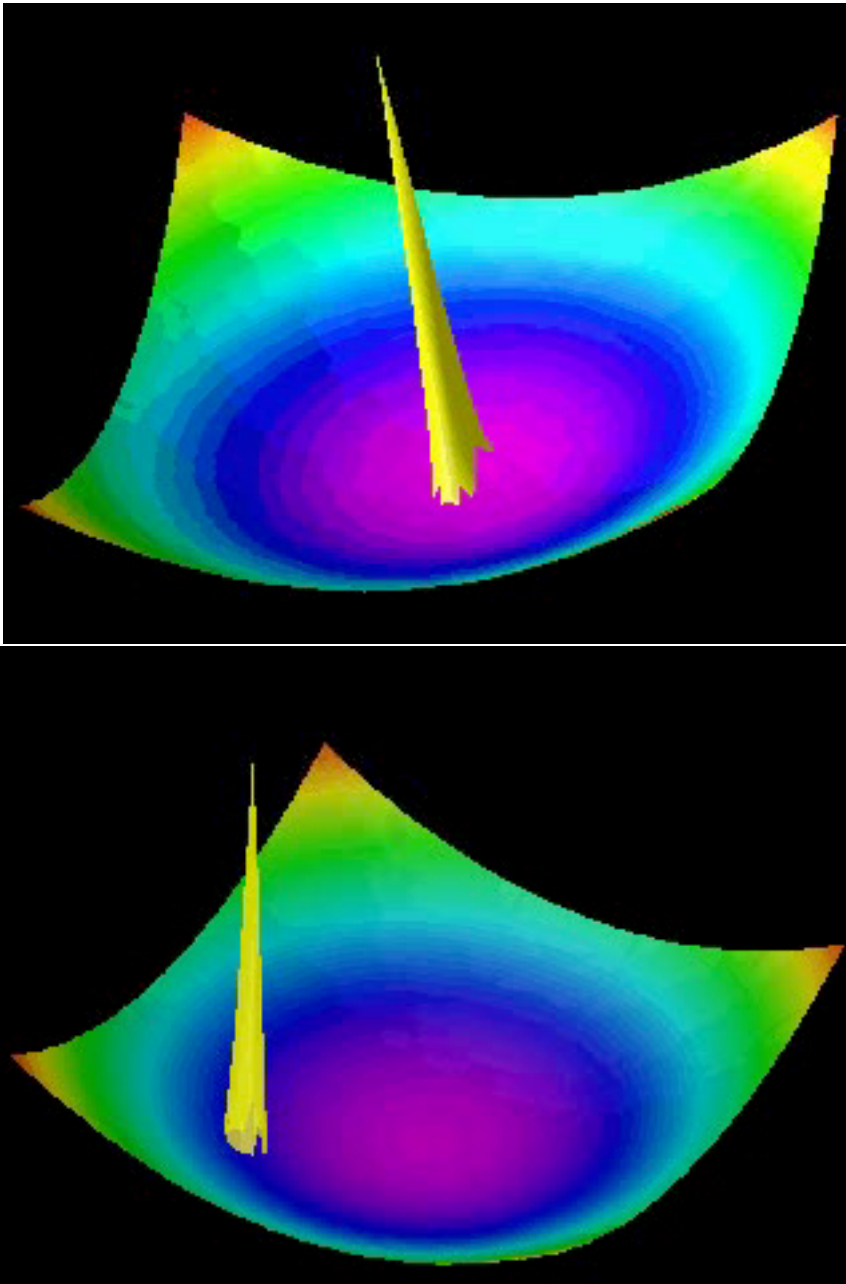
que combinadas fornecem  $\frac{d^2}{dt^2} \langle X \rangle = -\omega^2 \langle X \rangle$   $\left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \frac{\langle P \rangle(t)}{m} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \end{array} \right.$

- Note que  $A = \langle X \rangle(0)$  e  $B = \frac{\langle P \rangle(0)}{\omega m}$  e isso permite escrever

$$\langle X \rangle(t) = \langle X \rangle(0) \cos \omega t + \frac{\langle P \rangle(0)}{m\omega} \sin \omega t \quad \therefore \text{ Se } \underbrace{|\psi\rangle = |\varphi_n\rangle}_{\text{ } \Rightarrow \langle X \rangle(t) = 0}$$

$$\langle P \rangle(t) = -m\omega \langle X \rangle(0) \sin \omega t + \langle P \rangle(0) \cos \omega t \quad \hookrightarrow \quad \langle P \rangle(t) = 0$$

# Cuidados especiais com nossas interpretações



- Se  $|\psi\rangle = |\varphi_n\rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle X \rangle(t) = 0 \\ \langle P \rangle(t) = 0 \end{cases}$
- O comportamento oscilatório clássico só é visto quando  $|\psi(0)\rangle$  é uma combinação de estados estacionários. As duas animações ao lado representam combinações de estacionários (se fosse só um estado, não haveria movimento).