

## RESUMO

- $J^2|k, j, m\rangle = j(j + 1)\hbar^2|k, j, m\rangle \Rightarrow \text{com } j \geq 0$
- *Lema 1:*  $J_z|k, j, m\rangle = m\hbar|k, j, m\rangle \Rightarrow \text{com } -j \leq m \leq j$
- *Lema 2:*  $J_- \equiv J_x - iJ_y$  com  $J_-|k, j, m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } m = -j \\ \propto |k, j, m - 1\rangle & \text{se } m > -j \end{cases}$

Para  $m > -j$ , isso significa que  $\begin{cases} J^2 J_-|k, j, m\rangle = j(j + 1)\hbar^2 J_-|k, j, m\rangle \\ J_z J_-|k, j, m\rangle = (m - 1)\hbar J_-|k, j, m\rangle \end{cases}$

ou seja,  $J_-|k, j, m\rangle$  é autoket de  $J^2$  e  $J_z$  com autovalores  $j(j + 1)\hbar^2$  e  $(m - 1)\hbar$ , respectivamente.

- *Lema 3:*  $J_+ \equiv J_x + iJ_y$  com  $J_+|k, j, m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } m = j \\ \propto |k, j, m + 1\rangle & \text{se } m < j \end{cases}$

Para  $m < j$ , isso significa que  $\begin{cases} J^2 J_+|k, j, m\rangle = j(j + 1)\hbar^2 J_+|k, j, m\rangle \\ J_z J_+|k, j, m\rangle = (m + 1)\hbar J_+|k, j, m\rangle \end{cases}$

ou seja,  $J_+|k, j, m\rangle$  é autoket de  $J^2$  e  $J_z$  com autovalores  $j(j + 1)\hbar^2$  e  $(m + 1)\hbar$ , respectivamente.

# Momento Angular na Mecânica Quântica: o espectro de $J^2$ e $J_z$

- Sabendo que  $-j \leq m \leq j$ , é sempre possível achar  $p$ , número inteiro, tal que  $-j \leq m - p < -j + 1$  (basta tomar  $p =$  primeiro inteiro à esquerda de  $m + j$ ).

Some  $j$  e obtenha  $0 \leq j + m - p < 1$  por exemplo, suponha  $-5 \leq m \leq 5$

- se  $m = +4,5 \Rightarrow p = 9$  e  $-5 \leq -4,5 \leq -4$
- se  $m = -4,5 \Rightarrow p = 0$  e  $-5 \leq -4,5 \leq -4$
- se  $m = -1,5 \Rightarrow p = 3$  e  $-5 \leq -4,5 \leq -4$

- Note que  $p$  é o número de vezes que temos que aplicar  $J_-$  para sairmos de  $m$  e chegarmos em  $m - p$  (autovalor entre  $-j$  e  $-j + 1$  de um autoket de  $J_z$ ).
- Considere a série de vetores:  $|k, j, m\rangle; J_- |k, j, m\rangle; \dots (J_-)^n |k, j, m\rangle; \dots (J_-)^p |k, j, m\rangle$ .

Todos são autokets de  $J^2$  e  $J_z$ , conforme mostra a tabela:

Autovetor	Autovalor de $J^2$	Autovalor de $J_z$
$ k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$m\hbar$
$J_-  k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$(m - 1)\hbar$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(J_-)^n  k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$(m - n)\hbar$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(J_-)^p  k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$(m - p)\hbar$

- Uma aplicação a mais do que  $p$  faria um autovalor de  $J_z$  com  $m - p - 1 < -j$  e isso viola lema 1 (que proíbe autovalores menores que  $-j$ ).

# Momento Angular na Mecânica Quântica: o espectro de $J^2$ e $J_z$

- Para evitar isso precisamos fazer  $m - p = -j$ , com  $(J_-)^p |k, j, m\rangle \propto |k, j, -j\rangle$ , pois assim, qualquer aplicação adicional do  $J_-$  daria o ket nulo e o lema 1 fica preservado.
- De forma semelhante poderíamos ter feito toda essa argumentação para a série associada ao  $J_+$  :  $\exists q$ , número inteiro, tal que  $j - 1 < m + q \leq +j$ . Basta  $q$  ser um número inteiro à esquerda de  $j - m$ .

Some  $-j$  e obtenha  $-1 < q - (j - m) \leq 0$

Como exemplo, considere  $-5 \leq m \leq 5$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } m = +4,5 \Rightarrow q = 0 \text{ e } 4 \leq +4, 5 \leq 5 \\ \text{se } m = -2,4 \Rightarrow q = 7 \text{ e } 4 \leq +4, 6 \leq 5 \\ \text{se } m = -1,9 \Rightarrow q = 6 \text{ e } 4 \leq +4, 1 \leq 5 \end{array} \right.$

- Note que  $q$  é o número de vezes que temos que aplicar  $J_+$  para sairmos de  $m$  e chegarmos em  $m + q$  (autovalor entre  $j - 1$  e  $+j$  de um autoket de  $J_z$ ).

Autovetor	Autovalor de $J^2$	Autovalor de $J_z$
$ k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$m\hbar$
$J_+  k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$(m + 1)\hbar$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(J_+)^q  k, j, m\rangle$	$j(j + 1)\hbar^2$	$(m + q)\hbar$

- Agora temos:

- Uma aplicação a mais do que  $q$  faria um autovalor de  $J_z$  com  $m + q + 1 > +j$  e isso viola lema 1 (que proíbe autovalores maiores que  $+j$ .)

# Momento Angular na Mecânica Quântica: o espectro de $J^2$ e $J_z$

F689

Aula 23

- Para evitar isso precisamos fazer  $m + q = +j$ , com  $(J_+)^q |k, j, m\rangle \propto |k, j, +j\rangle$ , pois assim, qualquer aplicação adicional do  $J_+$  daria o ket nulo e o lema 1 fica preservado.
- Combinando as duas condições  $\begin{cases} m - p = -j \\ m + q = +j \end{cases} \implies q + p = 2j$
- Como  $p$  e  $q$  são inteiros  $j$  é necessariamente inteiro ou semi-inteiro. Os valores de  $m$  ficam restritos à  $-j, (-j + 1), (-j + 2), \dots, (j - 2), (j - 1), +j$ , conforme a tabela abaixo.

$j$	Autovalor de $J^2$	Autovalores de $J_z$ (em $\hbar$ )	multiplicidade
0	$0\hbar^2$	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\hbar^2$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	2
1	$2\hbar^2$	$-1, 0, +1$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j$	$j(j + 1)\hbar^2$	$-j, -j + 1, -j + 2, \dots, j - 2, j - 1, +j$	$2j + 1$

- Resumindo: as soluções de  $\begin{cases} J^2 |k, j, m\rangle = j(j + 1)\hbar^2 |k, j, m\rangle \\ J_z |k, j, m\rangle = m\hbar |k, j, m\rangle \end{cases}$  só existem para

$$j \geq 0 \begin{cases} \text{inteiros ou} \\ \text{semi-inteiros} \end{cases} \implies \text{e aplicações múltiplas de } J_{\pm} \text{ levam à } |k, j, \pm j\rangle.$$

## Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Representação padrão. Uma das formas de construir  $\mathcal{E} = \{|k, j, m\rangle\}$ .

Como construir uma base ortonormal de vetores em  $\mathcal{E}$  que sejam autovetores de  $J^2$  e  $J_z$ ?

- Ache  $A$  que comute com  $J^2$  e  $J_z$  e use
 
$$\begin{cases} J^2|k, j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|k, j, m\rangle \\ J_z|k, j, m\rangle = m\hbar|k, j, m\rangle \\ A|k, j, m\rangle = a_{k,j,m}|k, j, m\rangle \end{cases}$$
- Em princípio, para cada par  $(j, m)$  seria preciso resolver a equação
 
$$A|k, j, m\rangle = a_{k,j,m}|k, j, m\rangle.$$
- Se os autovalores  $a_{k,j,m}$  forem distintos para um par  $(j, m)$ ,  $A$ ,  $J^2$  e  $J_z$  formam um CCOC e o problema está resolvido. Note que é trabalhoso, pois para cada par  $(j, m)$ , a equação acima precisa ser resolvida.
- Para diminuir esse trabalho, fixe  $(j, m)$  e construa, resolvendo a equação acima, um subespaço formado por  $\mathcal{E}(j, m) = \{|k, j, m\rangle\}$  com  $k = 1, 2, \dots, g(j, m)$  onde  $g(j, m)$  é a degenerescência associada ao par  $(j, m)$ .
- Em seguida, use  $J_{\pm}$  para construir os subespaços  $\mathcal{E}(j, m \pm 1) \equiv \{J_{\pm}|k, j, m\rangle\}$ .
- Será que se fizermos isso para todos os  $j$ 's teremos uma base completa, isto é, uma representação em  $\mathcal{E}$ ?

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Um bom começo é mostrar que, se  $k_1 \neq k_2$ , os kets  $J_+|k_1, j, m\rangle$  e  $J_+|k_2, j, m\rangle$  são ortogonais. Isso também seria esperado dos kets  $J_-|k_1, j, m\rangle$  e  $J_-|k_2, j, m\rangle$ . Para testar ambos, basta calcular  $\langle k_1, j, m|J_{\mp}J_{\pm}|k_2, j, m\rangle$ , fazendo uso da expressão já demonstrada (aula 22)  $J_{\mp}J_{\pm} = J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z$ , isto é:

$$\langle k_1, j, m|J_{\mp}J_{\pm}|k_2, j, m\rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]\hbar^2 \underbrace{\langle k_1, j, m|k_2, j, m\rangle}_{\delta_{k_1 k_2}}. \text{ Use que}$$

autokets de  $A$  com autovalores distintos são ortogonais  $\Rightarrow \delta_{k_1 k_2}$  e conclua

$$\langle k_1, j, m|J_{\mp}J_{\pm}|k_2, j, m\rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]\hbar^2 \delta_{k_1 k_2} \text{ (c.q.d.)}$$

- Isso permite concluir, se  $\mathcal{E}(j, m) = \{|k, j, m\rangle\}$  é feito de kets ortogonais, os kets de  $\mathcal{E}(j, m+1) = \{J_+|k, j, m\rangle\}$  também são ortogonais entre si, assim como os de  $\mathcal{E}(j, m-1) = \{J_-|k, j, m\rangle\}$ .
- Esta relação de ortogonalidade permite calcular  $N$  em  $|k, j, m+1\rangle = NJ_+|k, j, m\rangle$ ,  $\langle k, j, m+1|k, j, m+1\rangle = N^2 \langle k, j, m+1|J_-J_+|k, j, m+1\rangle = [j(j+1) - m(m+1)]\hbar^2 N^2$

$$\text{Como } \langle k, j, m+1|k, j, m+1\rangle = 1, \text{ podemos concluir: } N = \frac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}}.$$

Os vetores  $|k, j, m+1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}} J_+|k, j, m\rangle$  com  $(j, m+1)$  fixos,

compõem  $\mathcal{E}(j, m+1)$  e são ortonormais. Será que eles constituem uma base em  $\mathcal{E}(j, m+1)$ ?

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Para verificar isso, suponha  $\mathcal{E}(j, m+1) = \{J_+ |k, j, m\rangle\}$  construído pela aplicação de  $J_+$  em todos os kets de  $\mathcal{E}(j, m) = \{|k, j, m\rangle\}$ . Suponha também que exista um  $|\alpha, j, m+1\rangle$  ortogonal à todos os  $|k, j, m+1\rangle$  de  $\mathcal{E}(j, m+1) = \{|k, j, m+1\rangle\}$ . Se isso ocorrer,  $\{|k, j, m+1\rangle\}$  não forma uma base.
- Lembre que  $\forall \beta$ , o ket  $|\beta, j, m\rangle$  deve ser escrito como uma combinação em  $k$  dos kets de  $\mathcal{E}(j, m) = \{|k, j, m\rangle\}$ . Em princípio, você diria que precisa de todos os kets de  $\mathcal{E}$ , mas notaria que o operador  $A$ , antes de diagonalizado era bloco diagonal segundo pares  $(j, m)$ . Ou seja, um autoket de  $J^2$  e  $J_z$  com autovalores,  $j(j+1)\hbar$  e  $m\hbar$  precisa ser descrito com os vetores do bloco  $(j, m)$ , pois todas as projeções  $\langle k', j', m' | k, j, m \rangle$  são nulas se  $j' \neq j$  ou  $m' \neq m$ . Provaremos, por absurdo, que se  $\mathcal{E}(j, m+1) = \{J_+ |k, j, m\rangle\}$  não forma uma base, a propriedade descrita para  $\mathcal{E}(j, m)$  não será válida.

- Voltemos ao nosso ket  $|\alpha, j, m+1\rangle$ . Quanto vale  $J_- |\alpha, j, m+1\rangle$ ? 
$$\begin{cases} \neq 0 & (m+1 \neq -j) \\ \in \mathcal{E}(j, m) \\ \perp \forall J_- |k, j, m+1\rangle \end{cases}$$

Vimos que  $|k, j, m+1\rangle = \frac{1}{\hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}} J_+ |k, j, m\rangle$  e isso faz

$$J_- |k, j, m+1\rangle \propto J_- J_+ |k, j, m\rangle = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |k, j, m\rangle \propto |k, j, m\rangle$$

## Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Mas se  $J_-|k, j, m+1\rangle \propto |k, j, m\rangle \Rightarrow J_-|\alpha, j, m+1\rangle \propto |\alpha, j, m\rangle$  temos que se  $J_-|\alpha, j, m+1\rangle \perp \forall J_-|k, j, m+1\rangle \Rightarrow |\alpha, j, m\rangle \perp \forall |k, j, m\rangle$  o que nos leva à um absurdo, pois, conforme vimos,  $\{|k, j, m\rangle\}$  consegue descrever qualquer ket.
- De forma análoga, podemos mostrar que os vetores  $\{|k, j, m-1\rangle\}$  definidos pela relação (mostre a relação)  $|k, j, m-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}} J_-|k, j, m\rangle$

formam uma base em  $\mathcal{E}(j, m-1)$ .

- Como cada subespaço  $\mathcal{E}(j, m)$  é completo para escrever qualquer ket,  $|\alpha, j, m\rangle$ , como uma combinação em  $k$ 's de kets  $|k, j, m\rangle$ , é de esperar que a dimensão de todos os subespaços  $\mathcal{E}(j, m)$  ( $j$  e  $\forall m$ ) sejam iguais, ou seja na base convencional

$$g(j, -j) = \dots = g(j, m-1) = g(j, m) = g(j, m+1) \dots = g(j, +j) = g(j)$$

Ação	Subespaço	$k=1$	$k=2$	$k=\dots$	$k=g(j)$
$J_- \downarrow$	$\mathcal{E}(j, m=j)$	$ 1, j, j\rangle$	$ 2, j, j\rangle$	$ k=\dots, j, j\rangle$	$ g(j), j, j\rangle$
$J_- \downarrow$	$\mathcal{E}(j, m=j-1)$	$ 1, j, j-1\rangle$	$ 2, j, j-1\rangle$	$ k=\dots, j, j-1\rangle$	$ g(j), j, j-1\rangle$
...	...	...	...	...	...
$J_- \downarrow$	$\mathcal{E}(j, m)$	$ 1, j, m\rangle$	$ 2, j, m\rangle$	$ k=\dots, j, m\rangle$	$ g(j), j, m\rangle$
...	...	...	...	...	...
	$\mathcal{E}(j, m=-j)$	$ 1, j, -j\rangle$	$ 2, j, -j\rangle$	$ k=\dots, j, -j\rangle$	$ g(j), j, -j\rangle$

com  $\langle k, j, m | k', j', m' \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}$  e  $\sum_{k,j,m} |k, j, m\rangle \langle k, j, m| = \mathbb{1}$ .



# Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Na prática, para gerar uma base convencional, ache um operador  $A$  que comute com  $J^2$  e  $J_z$ . Para facilitar, suponha que precisamos apenas de  $A$  para formar um CCOC com  $J^2$  e  $J_z$ .
- Diagonalize  $A$  em  $\mathcal{E}(j, j)$  ou melhor, resolva  $A|k, j, j\rangle = a_{k,j}|k, j, j\rangle$ .
- A partir de  $\{|k, j, j\rangle\}$  com  $k = 1, \dots, g(j)$ , ache os outros  $\mathcal{E}(j, \pm m) = \{J_{\pm}|k, j, m\rangle\}$
- Repita o procedimento para um novo  $j$ .
- No final teremos o  $\mathcal{E} = \sum_j \sum_{m=-j}^j \mathcal{E}(j, m)$ .

## Comentários

- Se  $\begin{cases} [A, J_x] = 0 \\ [A, J_y] = 0 \end{cases} \Rightarrow [A, J_-]|k, j, j\rangle = 0 \rightarrow AJ_-|k, j, j\rangle = J_-A|k, j, j\rangle = a_{k,j}J_-|k, j, j\rangle$

*O autovalor de  $A$  para o ket  $|k, j, j\rangle$  é o mesmo que para o ket  $J_-|k, j, j\rangle$ .*

- Poderíamos ter feito o mesmo raciocínio para  $m = -j$  ( $A|k, j, -j\rangle = a_{k,-j}|k, j, -j\rangle$ ) tal que,  $\Rightarrow [A, J_+]|k, j, -j\rangle = 0 \rightarrow AJ_+|k, j, -j\rangle = J_+A|k, j, -j\rangle = a_{k,-j}J_+|k, j, -j\rangle$
- O autovalor de  $A$  para o ket  $|k, j, -j\rangle$  é o mesmo que para o ket  $J_+|k, j, -j\rangle$ .*

*Nessas condições todos os kets da base convencional são autokets de  $A, J^2$  e  $J_z$ , e  $A$  tem o mesmo espectro para um  $j$  fixo,  $\forall \mathcal{E}(j, m)$ .*

# Momento Angular na Mecânica Quântica: Bases

- Se  $\begin{cases} [A, J_x] \neq 0 \\ [A, J_y] \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$  continuamos a ter uma base, mas os vetores de  $\mathcal{E}(j, m \pm 1)$

podem não ser autovetores de  $A$ .

- Desvantagens da base convencional  $\mathcal{E} = \sum_j \sum_{m=-j}^j \mathcal{E}(j, m)$

(1)  $g(j)$  depende do sistema físico.

(2)  $\mathcal{E}(j, m)$  não é invariante sob ação de  $\vec{J}$ , pois  $J_+$  e  $J_-$  levam kets de  $\mathcal{E}(j, m)$  para kets em  $\mathcal{E}(j, m + 1)$  e  $\mathcal{E}(j, m - 1)$ .

- Isso inspira a criação de um novo subespaço definido por  $\mathcal{E}(j, k)$ .**

- Explicitamente, ele é definido pelos kets  $|k, j, -j\rangle, |k, j, -j + 1\rangle, \dots, |k, j, m\rangle, \dots, |k, j, j\rangle$ .

- A dimensão deste subespaço é  $g(j, k) = 2j + 1 \Rightarrow$  para todos os sistemas físicos.

- $\mathcal{E}(j, k)$  é globalmente invariante sob ação de  $\vec{J}$ , pois  $J_+$  e  $J_-$  levam kets de  $\mathcal{E}(j, k)$  para kets do mesmo  $\mathcal{E}(j, k)$ .

# Relações de comutação características de momento angular

- Alguns exemplos de  $(J_u)^{(j)}$  (representações matriciais das componentes,  $J_u$ , de do momento angular para um dado  $j$ ).

(1)  $j = 0 \Rightarrow$  simples, pois  $\langle k, 0, 0 | J_z | k, 0, 0 \rangle = 0$  e  $\langle k, 0, 0 | J_{\pm} | k, 0, 0 \rangle = 0$ .

(2)  $j = \frac{1}{2} \Rightarrow$  neste caso, usamos

$$\begin{cases} \langle k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_z | k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \\ \langle k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | J_z | k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = 0 \\ \langle k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_z | k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = 0 \\ \langle k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_z | k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{2} \hbar \end{cases} \quad \text{para escrever}$$

$$J_z^{(\frac{1}{2})} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad J_+^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$J_-^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}. \text{ Para } J_+^{(\frac{1}{2})} \text{ e } J_-^{(\frac{1}{2})}, \text{ use}$$

$J_{\pm} |k, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |k, j, m \pm 1\rangle$  sistematicamente para obter

$$J_+^{(\frac{1}{2})} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_-^{(\frac{1}{2})} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_x^{(\frac{1}{2})} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_y^{(\frac{1}{2})} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

## Relações de comutação características de momento angular

Para obter a representação matricial de  $J^2$ , use que  $J^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$ ,

e calcule  $(J^2)^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | J^2 | \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | J^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J^2 | \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | J^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3)  $j=1 \Rightarrow$  neste caso, usaremos  $\left\{ \begin{array}{l} \langle 1, +1 | J_z | 1, +1 \rangle = +\hbar \\ \langle 1, +1 | J_z | 1, 0 \rangle = 0 \\ \langle 1, +1 | J_z | 1, -1 \rangle = 0 \\ \langle 1, 0 | J_z | 1, +1 \rangle = 0 \\ \langle 1, 0 | J_z | 1, 0 \rangle = 0 \\ \langle 1, 0 | J_z | 1, -1 \rangle = 0 \\ \langle 1, -1 | J_z | 1, +1 \rangle = 0 \\ \langle 1, -1 | J_z | 1, 0 \rangle = 0 \\ \langle 1, -1 | J_z | 1, -1 \rangle = -\hbar \end{array} \right. \Rightarrow J_z^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Novamente, usando  $J_{\pm}|k, j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|k, j, m\pm 1\rangle$ , calcule

$$J_+^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_-^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad J_x^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{pmatrix}; \quad J^2^{(1)} = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercício extra

- Mostre que para os 3 casos,  $j=0, \frac{1}{2}$ , e 1, apresentados, a medida de  $J_u \equiv \vec{J} \cdot \vec{u}$  em qualquer direção  $\vec{u} = (\theta, \varphi)$  arbitrária, respeita a realidade experimental expressa no primeiro slide da aula 21. Para tanto, diagonalize  $J_u$ , sabendo que  $\vec{u} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \Rightarrow e \vec{J} \cdot \vec{u} = \sin \theta \cos \varphi J_x + \sin \theta \sin \varphi J_y + \cos \theta J_z$ .

Para facilitar, seguem as matrizes (verifique) que precisam ser diagonalizadas:

$$\circ J_u^{(\frac{1}{2})} = \vec{J} \cdot \vec{u} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{+i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\circ J_u^{(1)} = \vec{J} \cdot \vec{u} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta & 0 \\ e^{+i\varphi} \sin \theta & 0 & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ 0 & e^{+i\varphi} \sin \theta & -\sqrt{2} \cos \theta \end{pmatrix}$$