

Descrição não-relativística de uma partícula de spin 1/2

Já sabemos tratar separadamente as coordenadas externas (com seus graus de liberdade orbitais) e as internas (com seus graus de liberdade de spin) do elétron. Agora precisamos juntar os procedimentos e criar um formalismo para o elétron não-relativístico (velocidades pequenas comparadas com a da luz). Um bom começo é definir observáveis e vetores de estado de \mathcal{E} .

Que tal?	$\left\{ \begin{array}{l} \text{CCOC em } \mathcal{E}_r \\ 1) X, Y, Z \\ 2) P_x, P_y, P_z \\ 3) H, L^2, L_z \end{array} \right.$	CCOC em \mathcal{E}_S	CCOC em \mathcal{E}
		\mathbf{S}^2, S_z	$X, Y, Z, \mathbf{S}^2, S_z$
		\mathbf{S}^2, S_z	$P_x, P_y, P_z, \mathbf{S}^2, S_z$
		\mathbf{S}^2, S_z	$H, L^2, L_z, \mathbf{S}^2, S_z$

Uma vez que todos os kets de \mathcal{E} tem o mesmo autovalor de \mathbf{S}^2 , podemos omitir o autovalor deste operador da lista de autovalores que definem um ket da base de \mathcal{E}

Assim, temos	$\left\{ \begin{array}{l} \text{CCOC em } \mathcal{E} \\ 1) X, Y, Z, \mathbf{S}^2, S_z \\ 2) P_x, P_y, P_z, \mathbf{S}^2, S_z \\ 3) H, L^2, L_z, \mathbf{S}^2, S_z \end{array} \right.$	base de expansão de \mathcal{E}
		$\{ x, y, z, \epsilon\rangle\} = \{ \mathbf{r}\rangle \otimes \epsilon\rangle\}$
		$\{ p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle\} = \{ \mathbf{p}\rangle \otimes \epsilon\rangle\}$
		$\{ k, \ell, m, \epsilon\rangle\} = \{ k, \ell, m\rangle \otimes \epsilon\rangle\}$

Onde o 1): $\left\{ \begin{array}{l} X|x, y, z, \epsilon\rangle = x|x, y, z, \epsilon\rangle \\ Y|x, y, z, \epsilon\rangle = y|x, y, z, \epsilon\rangle \\ Z|x, y, z, \epsilon\rangle = z|x, y, z, \epsilon\rangle \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^2|x, y, z, \epsilon\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|x, y, z, \epsilon\rangle \\ S_z|x, y, z, \epsilon\rangle = \epsilon\frac{\hbar}{2}|x, y, z, \epsilon\rangle \end{array} \right.$

Descrição não-relativística de uma partícula de spin 1/2

Os outros exemplos ficam:

$$\circ 2) \begin{cases} P_x |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle = p_x |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle \\ P_y |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle = p_y |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle \\ P_z |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle = p_z |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \mathbf{S}^2 |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle \\ S_z |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle = \epsilon \frac{\hbar}{2} |p_x, p_y, p_z, \epsilon\rangle \end{cases}$$

$$\circ 3) \begin{cases} H |k, \ell, m, \epsilon\rangle = E_k |k, \ell, m, \epsilon\rangle \\ L^2 |k, \ell, m, \epsilon\rangle = \ell(\ell + 1) \hbar^2 |k, \ell, m, \epsilon\rangle \\ L_z |k, \ell, m, \epsilon\rangle = m \hbar |k, \ell, m, \epsilon\rangle \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \mathbf{S}^2 |k, \ell, m, \epsilon\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |k, \ell, m, \epsilon\rangle \\ S_z |k, \ell, m, \epsilon\rangle = \epsilon \frac{\hbar}{2} |k, \ell, m, \epsilon\rangle \end{cases}$$

Normalização de sempre

$$\begin{cases} 1) \langle \mathbf{r}, \epsilon | \mathbf{r}', \epsilon' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\epsilon, \epsilon'} \\ 2) \langle \mathbf{p}, \epsilon | \mathbf{p}', \epsilon' \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\epsilon, \epsilon'} \\ 3) \langle k, \ell, m, \epsilon | k', \ell', m', \epsilon' \rangle = \begin{cases} \delta_{k, k'} \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \delta_{\epsilon, \epsilon'} \\ \delta(k - k') \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \delta_{\epsilon, \epsilon'} \end{cases} \end{cases}$$

Se um deles for discreto

Relação de completeza

$$\begin{cases} 1) \mathbb{1} = \sum_{\epsilon} \int d^3 r | \mathbf{r}, \epsilon \rangle \langle \mathbf{r}, \epsilon | \\ 2) \mathbb{1} = \sum_{\epsilon} \int d^3 p | \mathbf{p}, \epsilon \rangle \langle \mathbf{p}, \epsilon | \\ 3) \mathbb{1} = \sum_{\epsilon} \sum_k \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} | k, \ell, m, \epsilon \rangle \langle k, \ell, m, \epsilon | \end{cases}$$

Se ambos forem contínuo

O exemplo 1) permite escrever um vetor estado qualquer, $|\psi\rangle$, na representação $\{|\mathbf{r}, \epsilon\rangle\}$, com auxílio do operador unidade, isto é

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_{\epsilon} \int d^3 r | \mathbf{r}, \epsilon \rangle \langle \mathbf{r}, \epsilon | \psi \rangle$$

Descrição não-relativística de uma partícula de spin 1/2

- Antes, no espaço orbital, na representação das coordenadas, o estado era representado por uma função $\psi(\mathbf{r})$. Agora, no espaço estendido, por duas

funções $\begin{cases} \psi_+(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}, + | \psi \rangle \\ \psi_-(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}, - | \psi \rangle \end{cases}$ e \rightarrow surge uma nova notação, spinor $[\psi](\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$

Note que foi definido na representação das coordenadas

- Como é que fica o bra $\langle \psi |$? Seguindo a mesma estratégia, temos

$$\langle \psi | = \langle \psi | \mathbb{1} = \sum_{\epsilon} \int d^3 r \langle \psi | \mathbf{r}, \epsilon \rangle \langle \mathbf{r}, \epsilon |$$

No espaço estendido, o bra (dá origem ao adjunto do spinor) é representado

por $\begin{cases} \psi_+^*(\mathbf{r}) = \langle \psi | \mathbf{r}, + \rangle \\ \psi_-^*(\mathbf{r}) = \langle \psi | \mathbf{r}, - \rangle \end{cases}$ e \rightarrow o adjunto do spinor $[\psi]^\dagger(\mathbf{r}) = (\psi_+^*(\mathbf{r}) \quad \psi_-^*(\mathbf{r}))$

- Como fica o produto escalar $\langle \psi | \varphi \rangle$? Estratégia de sempre nos leva à

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \varphi \rangle = \sum_{\epsilon} \int d^3 r \langle \psi | \mathbf{r}, \epsilon \rangle \langle \mathbf{r}, \epsilon | \varphi \rangle = \int d^3 r [\langle \psi | \mathbf{r}, + \rangle \langle \mathbf{r}, + | \varphi \rangle + \langle \psi | \mathbf{r}, - \rangle \langle \mathbf{r}, - | \varphi \rangle],$$

que pode ser escrito na forma $\langle \psi | \varphi \rangle = \int d^3 r [\psi]^\dagger(\mathbf{r}) [\varphi](\mathbf{r})$, onde a multiplicação de matrizes precisa preceder a integração espacial.

Normalizando um spinor

- Como fica a normalização de $|\psi\rangle$? Sabendo que (do slide anterior)

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r [\psi]^\dagger(\mathbf{r})[\psi](\mathbf{r}) = \int d^3r [\langle\psi|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle + \langle\psi|\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle],$$

impomos que $\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r [|\psi_+(\mathbf{r})|^2 + |\psi_-(\mathbf{r})|^2] = 1$ ←

- Entre os vetores de \mathcal{E} existem aqueles que são produtos tensoriais entre vetores de $\mathcal{E}_r(|\varphi\rangle)$ e de $\mathcal{E}_S(|\chi\rangle)$, $|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$. Vimos outros exemplos: os 3 dos slide 1.

Note que se $|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$, com $\begin{cases} |\varphi\rangle = \int d^3r \varphi(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle \in \mathcal{E}_r \\ |\chi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle \in \mathcal{E}_S \end{cases}$ temos:

$$[\psi](\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) c_+ \\ \varphi(\mathbf{r}) c_- \end{pmatrix} = \varphi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix},$$

onde usamos $\begin{cases} \psi_+(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r},+|\psi\rangle = \langle\mathbf{r},+|(|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle) = \langle\mathbf{r}|\varphi\rangle\langle+|\chi\rangle = \varphi(\mathbf{r})c_+ \\ \psi_-(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r},-|\psi\rangle = \langle\mathbf{r},-|(|\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle) = \langle\mathbf{r}|\varphi\rangle\langle-|\chi\rangle = \varphi(\mathbf{r})c_- \end{cases}$

- O quadrado da norma: $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle\langle\chi|\chi\rangle = (|c_+|^2 + |c_-|^2) \int d^3r |\varphi(\mathbf{r})|^2$ ←

Operadores atuando em spinores

- Seja $|\psi'\rangle \in \mathcal{E}$, tal que $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$.

Ambos os kets podem ser representados por spinores, $[\psi'](\mathbf{r})$ e $[\psi](\mathbf{r})$. Como representar A ? Veremos que a melhor forma é por meio de uma matriz 2×2 , $[[A]]$.

$$[\psi'](\mathbf{r}) = [[A]][\psi](\mathbf{r})$$

- Vimos em F689 (aula11) que se um operador atua somente em um dos espaços da composição $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_S$, ele poderia ser reescrito como $\mathbb{1}_r \otimes S_z$, para o caso, por exemplo, de S_z que atua em \mathcal{E}_S . Se um operador atuasse somente em \mathcal{E}_r , por exemplo, o operador X , em \mathcal{E}_r , ele seria $X \otimes \mathbb{1}_S$. Esses dois casos poderiam ser

$$\text{escritos como matrizes } 2 \times 2 \left\{ \begin{array}{l} [[S_z]] = \mathbb{1}_r \otimes \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_r \end{pmatrix} \\ \text{na representação das coordenadas} \\ [[X]] = X \otimes \mathbb{1}_S = X \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- Para desenvolver intuição sobre o assunto, peguemos, como exemplo, o operador

$$[[S_+]] = \mathbb{1}_r \otimes \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [[S_+]][\psi](\mathbf{r}) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

na representação das coordenadas

$$\text{ou seja, } [\psi'](\mathbf{r}) = [[S_+]][\psi](\mathbf{r}) = \hbar \begin{pmatrix} \psi_-(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{faz sentido?}$$

Operadores atuando em spinores

- Para entender melhor pegue a última expressão do slide 2, e atue S_+ pela esquerda:

$$S_+|\psi\rangle = S_+ \sum_{\epsilon} \int d^3r |\mathbf{r}, \epsilon\rangle \langle \mathbf{r}, \epsilon | \psi \rangle = \int d^3r S_+ |\mathbf{r}, +\rangle \langle \mathbf{r}, + | \psi \rangle + \int d^3r S_+ |\mathbf{r}, -\rangle \langle \mathbf{r}, - | \psi \rangle$$

ou seja, $S_+|\psi\rangle = |\psi'\rangle = \hbar \int d^3r |\mathbf{r}, +\rangle \langle \mathbf{r}, - | \psi \rangle = \hbar \int d^3r \psi_-(\mathbf{r}) |\mathbf{r}, +\rangle$, onde usamos

que $\begin{cases} S_+|\mathbf{r}, +\rangle = 0 \\ S_+|\mathbf{r}, -\rangle = \hbar|\mathbf{r}, +\rangle \end{cases}$ conforme vimos em F689. Agora, para obter $|\psi'\rangle$

na linguagem de spinor, multiplique $S_+|\psi\rangle = |\psi'\rangle$, pela esquerda

por $\begin{cases} \langle \mathbf{r}', + | \text{ para obter a componente superior} \\ \langle \mathbf{r}', - | \text{ para obter a componente inferior} \end{cases} \Rightarrow$ em seguida, integre,

componha o novo spinor, $[\psi'](\mathbf{r}') = \hbar \begin{pmatrix} \psi_-(\mathbf{r}') \\ 0 \end{pmatrix}$, e troque \mathbf{r}' por \mathbf{r} , para obter:

$$[[S_+]][\psi](\mathbf{r}) = [\psi'](\mathbf{r}) = \hbar \begin{pmatrix} \psi_-(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{o mesmo que o slide anterior.}$$

spinor, na representação das coordenadas

- Note que usamos que $S_+|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}, + | S_+ | \psi \rangle \\ \langle \mathbf{r}, - | S_+ | \psi \rangle \end{pmatrix} = [[S_+]][\psi](\mathbf{r})$.

Operadores orbitais

- Para atuar em spinores (representação das coordenadas), conforme sugerido no slide 5, os operadores orbitais (componentes de \mathbf{R} e \mathbf{P}) serão representados por matrizes diagonais (2×2). Por exemplo:

$$P_z \text{ e } Z, \text{ ficariam } \begin{cases} \llbracket P_z \rrbracket = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \llbracket Z \rrbracket = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Isso faz sentido, uma vez que esses operadores atuam somente na parte espacial e não alteram o valor de ϵ . O cálculo por componente do spinor mostra isso.

$$\text{Nos exemplos acima } \begin{cases} \psi'_\epsilon(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}, \epsilon | Z | \psi \rangle = z \psi_\epsilon(\mathbf{r}) \\ \psi'_\epsilon(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}, \epsilon | P_z | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \psi_\epsilon(\mathbf{r}) \end{cases} \text{ fornecem } z \text{ e } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad \forall \epsilon$$

Como são iguais nas componentes superior e inferior do spinor, as expressões

$$z \text{ e } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \text{ podem ser fatoradas. Para } z, \text{ temos } \begin{pmatrix} \psi'_+(\mathbf{r}) \\ \psi'_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \psi_+(\mathbf{r}) \\ z \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

o que é equivalente à multiplicar z pela matriz unidade, conforme indicado

$$\text{acima. O caso } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \text{ é igual, pois } \begin{pmatrix} \psi'_+(\mathbf{r}) \\ \psi'_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Mistura de operadores orbital e de spin

- Alguns operadores que atuam em \mathcal{E} são misturas de operadores que atuam em \mathcal{E}_r com operadores que atuam em \mathcal{E}_S .

Exemplos

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket S_z L_z \rrbracket = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ \llbracket \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} \rrbracket = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x P_X + \sigma_y P_Y + \sigma_z P_Z) = \frac{\hbar^2}{2i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Note que os elementos não nulos da mistura de operadores são indicados pelos operadores de \mathcal{E}_S .

Comentário

- A representação de spinores $\{|\mathbf{r}, \epsilon\rangle\}$ é análoga à $\{|\mathbf{r}\rangle\}$. O elemento de matriz $\langle \psi | A | \varphi \rangle$ é dado por:

$$\langle \psi | A | \varphi \rangle = \int d^3 r [\psi]^\dagger(\mathbf{r}) \llbracket A \rrbracket [\varphi](\mathbf{r})$$

onde, $\llbracket A \rrbracket$ é uma matriz 2×2 . Primeiro fazemos as multiplicações matriciais e depois as integrações.

- Na linguagem de spinor, como seria a Hamiltoniana de uma partícula neutra de spin 1/2 sujeita à um campo magnético constante na direção z ?

Spinor na representação dos momentos

Até aqui definimos spinores na representação $\{|\mathbf{r}, \epsilon\rangle\}$. O que mudaria para obter a representação $\{|\mathbf{p}, \epsilon\rangle\}$? Primeiro lembre algumas propriedades da

$$\text{representação } \{|\mathbf{p}, \epsilon\rangle\} \begin{cases} \text{autovetores do C.C.O.C. } \{P_x, P_y, P_z, \mathbf{S}^2, S_z\} \\ \langle \mathbf{r}, \epsilon | \mathbf{p}, \epsilon' \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle \langle \epsilon | \epsilon' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \delta_{\epsilon, \epsilon'} \\ \mathbb{1} = \sum_{\epsilon} \int d^3p |\mathbf{p}, \epsilon\rangle \langle \mathbf{p}, \epsilon| \end{cases}$$

Em seguida, lembre o caminho que seguimos nos slides 2 e 3, e escreva:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_{\epsilon} \int d^3p |\mathbf{p}, \epsilon\rangle \langle \mathbf{p}, \epsilon | \psi \rangle$$

e obter diretamente $|\psi\rangle$ na linguagem de spinor

$$[[\bar{\psi}]] = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_+(\mathbf{p}) \\ \bar{\psi}_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \text{ com } \begin{cases} \bar{\psi}_+(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, + | \psi \rangle \\ \bar{\psi}_-(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, - | \psi \rangle \end{cases}$$

Note que as componentes são transformadas de Fourier das anteriores

$$\bar{\psi}_{\epsilon}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \epsilon | \psi \rangle = \langle \mathbf{p}, \epsilon | \sum_{\epsilon'} \int d^3r |\mathbf{r}, \epsilon'\rangle \langle \mathbf{r}, \epsilon' | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi_{\epsilon}(\mathbf{r})$$

Alguns cálculos de probabilidades de medidas físicas

- Para calcular essas probabilidades, precisamos juntar o que aprendemos no capítulo 3 (revisado na aula 1 desta disciplina) e o que vimos até agora sobre spinors. Nossas interpretações probabilísticas começam com a devida normalização (slide 4):

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int d^3 r [\psi]^\dagger(\mathbf{r}) [\psi](\mathbf{r}) = \int d^3 r [|\psi_+(\mathbf{r})|^2 + |\psi_-(\mathbf{r})|^2] = 1$$

$$\text{com } [\psi](\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}, + | \psi \rangle \\ \langle \mathbf{r}, - | \psi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

- Começemos por medir simultaneamente posição e spin ao longo do eixo z (lembre que não é possível medir simultaneamente componentes de spin em direções diferentes, pois elas não comutam).

Quantos estados, auto-estados de X, Y, Z , e S_z podem estar associados aos resultados da medida x, y, z e ϵ ? A resposta imediata é: um só, pois X, Y, Z , e S_z formam um C.C.O.C. Uma mais elaborada considera que \mathbf{R} tem espectro contínuo e nunca obtemos precisão infinita nas medidas, o que indica que precisamos ser mais cuidadosos.

A probabilidade de encontramos a partícula em \mathbf{r} , dentro do volume $d^3 r$, com spin para cima, é: $d^3 \mathcal{P}(\mathbf{r}, +) = |\langle \mathbf{r}, + | \psi \rangle|^2 d^3 r = |\psi_+(\mathbf{r})|^2 d^3 r$

- Com spin para baixo seria: $d^3 \mathcal{P}(\mathbf{r}, -) = |\langle \mathbf{r}, - | \psi \rangle|^2 d^3 r = |\psi_-(\mathbf{r})|^2 d^3 r$

Alguns cálculos de probabilidades de medidas físicas

- E se a componente de spin medida fosse ao longo do eixo x e não de z . Como ficariam as probabilidades? Para calcular isso na base original, basta lembrar que X, Y, Z e S_x também forma um C.C.O.C. e que $|\pm\rangle_x = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}}$.
 $|\pm\rangle_x$ podem ser obtidos diagonalizando S_x na base $\{|\pm\rangle\}$ (fizemos isso em F689).

Com isso, constrói-se os kets desejados $|\mathbf{r}\rangle \otimes |\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathbf{r}, +\rangle \pm |\mathbf{r}, -\rangle]$

A probabilidade de encontramos a partícula em \mathbf{r} , dentro do volume d^3r , com spin, ao longo de x para “cima”, é: $d^3\mathcal{P}_x(\mathbf{r}, +) = |(\langle\mathbf{r}| \otimes \langle +|)|\psi\rangle|^2$, isto é

$$d^3\mathcal{P}_x(\mathbf{r}, +) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle\mathbf{r}, +|\psi\rangle + \langle\mathbf{r}, -|\psi\rangle] \right|^2 d^3r = \frac{1}{2}|\psi_+(\mathbf{r}) + \psi_-(\mathbf{r})|^2 d^3r$$

- Que tal medir \mathbf{p} e S_z ?

$$d^3\mathcal{P}(\mathbf{p}, \pm) = |\langle\mathbf{p}, \pm|\psi\rangle|^2 d^3p = |\bar{\psi}_\pm(\mathbf{p})|^2 d^3p$$

- E se as medidas forem incompletas (só posição ou só spin)?

Por exemplo: a probabilidade de medir posição achar o elétron em um volume d^3r ao redor de \mathbf{r} . Que tal $d^3\mathcal{P}(\mathbf{r}) = [|\psi_+(\mathbf{r})|^2 + |\psi_-(\mathbf{r})|^2] d^3r$?

Outro exemplo: a probabilidade de medir spin up (S_z) independentemente de onde a partícula está. Que tal $d^3\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \int |\psi_+(\mathbf{r})|^2 d^3r$?

