

# Aula de hoje: Potenciais e transformações de Gauge

Em Mecânica Clássica o ponto zero de energia não tem significado físico. A evolução temporal de variáveis dinâmicas, tais como,  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$  ou  $\mathbf{L}(t)$ , não é alterada se usarmos  $V(\mathbf{r})$  ou  $V(\mathbf{r}) + V_0$  (constante no espaço e no tempo). Isso porque  $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$  e  $\therefore V_0$  uma constante aditiva, não é importante.

Como será a situação análoga em Mecânica Quântica?

$$\text{Suponha } \begin{cases} |\alpha, t_0; t\rangle \rightarrow V(\mathbf{R}) \\ |\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle \rightarrow \widetilde{V}(\mathbf{R}) = V(\mathbf{R}) + V_0 \end{cases} \quad \text{ambas com } |\alpha\rangle \text{ em } t = t_0.$$

Nós sabemos evoluir kets no tempo

$$\begin{aligned} |\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle &= \exp \left\{ -i \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{R}) + V_0 \right] \frac{(t - t_0)}{\hbar} \right\} |\alpha\rangle = \\ &= \exp \left[ -\frac{iV_0(t - t_0)}{\hbar} \right] |\alpha, t_0; t\rangle. \end{aligned}$$

A presença de  $V_0$  faz com que os estados  $|\alpha, t_0; t\rangle$  e  $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$  fiquem diferentes! Eles diferem por uma fase global  $\exp \left[ -\frac{iV_0(t - t_0)}{\hbar} \right]$ .

## Potencial constante (independente do tempo e da posição)

Para um estado estacionário, somar um potencial constante  $V_0$  na Hamiltoniana implica em uma mudança na dependência temporal

$$\text{do tipo } \begin{cases} \text{Se } V(\mathbf{R}) \longrightarrow \exp \left[ -\frac{iE(t-t_0)}{\hbar} \right] \\ \text{Se } V(\mathbf{R}) + V_0 \longrightarrow \exp \left[ -\frac{i(E+V_0)(t-t_0)}{\hbar} \right] \end{cases}$$

ou seja, mudar de  $V(\mathbf{R}) \rightarrow V(\mathbf{R}) + V_0$  implica em  $E \rightarrow E + V_0$ .

Efeitos observáveis, como evolução temporal de valores esperados (exemplos:  $\langle \mathbf{R} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{P} \rangle$ , etc.), dependem das chamadas frequências de Bohr (diferenças em energia) e portanto não mudam mediante a adição de um potencial constante na Hamiltoniana.

Esse de fato, é um primeiro exemplo de transformação de Gauge:

$$V(\mathbf{R}) \rightarrow V(\mathbf{R}) + V_0 \begin{cases} |\alpha, t_0; t\rangle \rightarrow \exp \left[ -\frac{iV_0(t-t_0)}{\hbar} \right] |\alpha, t_0; t\rangle \\ E \rightarrow E + V_0 \\ \psi(\mathbf{r}', t) \rightarrow \exp \left[ -\frac{iV_0(t-t_0)}{\hbar} \right] \psi(\mathbf{r}', t) \end{cases}$$

representação  
das coordenadas

## Potencial dependente só do tempo

O que aconteceria, se  $V_0$  fosse espacialmente uniforme, mas dependente do tempo?  $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0)|\alpha\rangle$ , com  $U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt'\right]$ . Mas, se  $H(t) = H + V_0(t)$ , então

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_0(t') dt'\right] |\alpha\rangle$$

$$\text{e } \therefore \text{ teríamos } \underbrace{|\alpha, t_0; t\rangle}_{V(\mathbf{R})} \longrightarrow \underbrace{\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_0(t') dt'\right] |\alpha, t_0; t\rangle}_{V(\mathbf{R}) + V_0(t)}$$

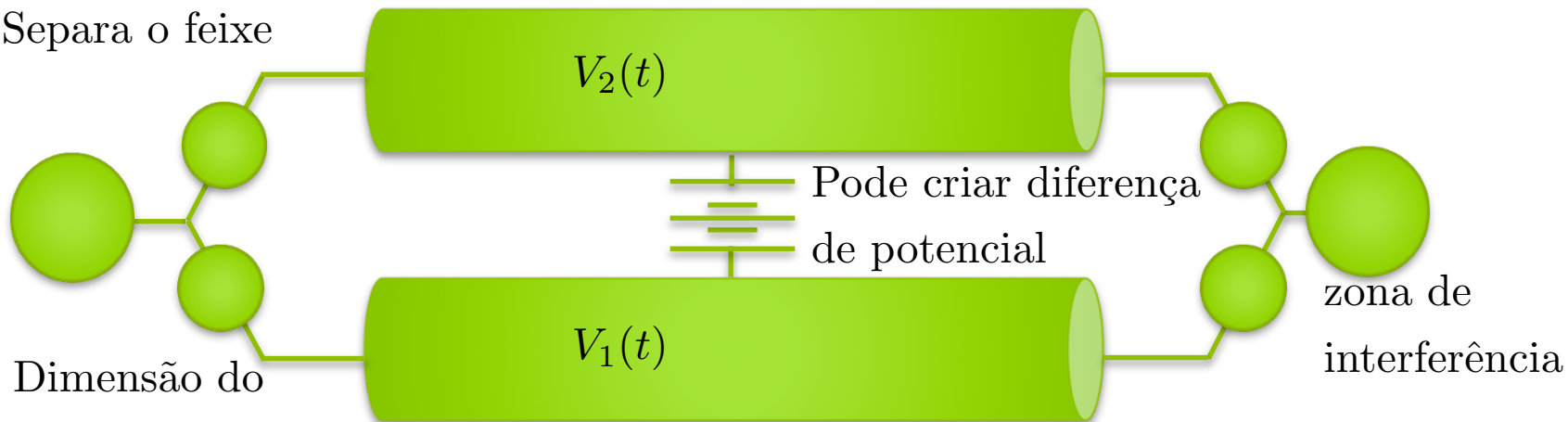
Pergunta importante: Será que a adição de um potencial espacialmente constante, mas variável no tempo, causa algum efeito mensurável no sistema? Para responder isso, imagine um experimento com um feixe de partículas que é separado\* em dois: Parte passa por uma região de potencial  $V_1(t)$  e a outra parte por um potencial  $V_2(t)$  que variam de forma diferente no tempo. Em seguida juntamos os feixes e realizamos uma experiência de interferência. Será que perceberíamos diferenças nos resultados deste novo experimento, conforme variássemos a dependência temporal dos potenciais?

\*O pacote de onda de cada partícula é dividido em dois.

# Experimento de correlação. Potencial dependente só do tempo

## O Experimento

Separa o feixe



Dimensão do pacote menor que a gaiola

Gaiola metálica: gerando  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  depois que a partícula está dentro dela e desligando antes dela sair

A interferência será do tipo  $\cos(\phi_1 - \phi_2)$  e/ou  $\sin(\phi_1 - \phi_2)$ , onde

$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt (V_2(t) - V_1(t))$ . Embora nenhuma força atue na

partícula, pois  $\nabla V(t) = 0$ , existe um efeito mensurável. Efeito

puramente quântico, pois quando  $\hbar \rightarrow 0$   $\begin{cases} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ \sin(\phi_1 - \phi_2) \end{cases}$  oscilam

muito, destruindo qualquer efeito interessante.

# Gravidade em Mecânica Quântica

Será que existe algum efeito gravitacional quântico? Veremos que sim, mas antes exploremos as diferenças entre mecânica clássica e quântica.

Considere um corpo em queda livre

$$m_{\text{inercial}} \ddot{\mathbf{r}} = -m_{\text{grav}} \nabla \Phi_{\text{grav}} = -m_{\text{grav}} g \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{como } m_{\text{inercial}} = m_{\text{grav}} \rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = -g \hat{\mathbf{z}}$$

Uma vez que a massa não aparece na equação acima, gravidade em mecânica clássica é considerada uma teoria puramente geométrica.

A situação em Mecânica Quântica não é bem assim:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + m \Phi_{\text{grav}} \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \text{a massa não cancela!}$$

De fato, a massa aparece junto com  $\hbar$ , na forma  $\frac{\hbar}{m}$ . Isso também pode ser visto na formulação de integrais de caminho de Feynman

$$\langle \mathbf{r}_n, t_n | \mathbf{r}_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left[ i \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \frac{L_{\text{clássica}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\hbar} \right] \text{ com}$$

$$\frac{L_{\text{clássica}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\hbar} = \frac{\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz}{\hbar} \rightarrow \text{note } \hbar \text{ e } m \text{ juntos e na forma } \frac{m}{\hbar}.$$

# Gravidade em Mecânica Quântica

No limite não quântico, caímos na trajetória clássica definida pelo princípio de mínima ação

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{L_{\text{clássica}}(t)}{\hbar} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz}{\hbar} \right] = 0 \text{ e } m \text{ se cancela.}$$

Lembra do teorema de Ehrenfest?

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle = -\langle \nabla V(\mathbf{R}) \rangle \quad \text{se} \quad \nabla V(\mathbf{R}) = mg\hat{\mathbf{z}} \quad \text{então}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{R} \rangle = -mg\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{não depende de } \hbar \text{ nem de } m)$$

Para ter efeito quântico não trivial precisamos ter dependência com  $\hbar$  e conseqüentemente com  $m$  também.

- Até 1975, não se sabia de nenhum experimento direto que permitisse usar o termo  $m\Phi_{\text{grav}}$  na equação de Schrödinger.
- Queda livre de partículas elementares  $\rightarrow$  equação de Ehrenfest é suficiente para mostrar que não teremos efeitos quânticos.
- Experimento sobre “peso de prótons” de V. Pound *et al.* também não estabeleceu efeitos gravitacionais quânticos (eles mediram deslocamentos de frequências que não dependem de  $\hbar$  explicitamente).

# Gravidade em Mecânica Quântica

Efeito gravitacional na escala microscópica é difícil de detectar. Porque?

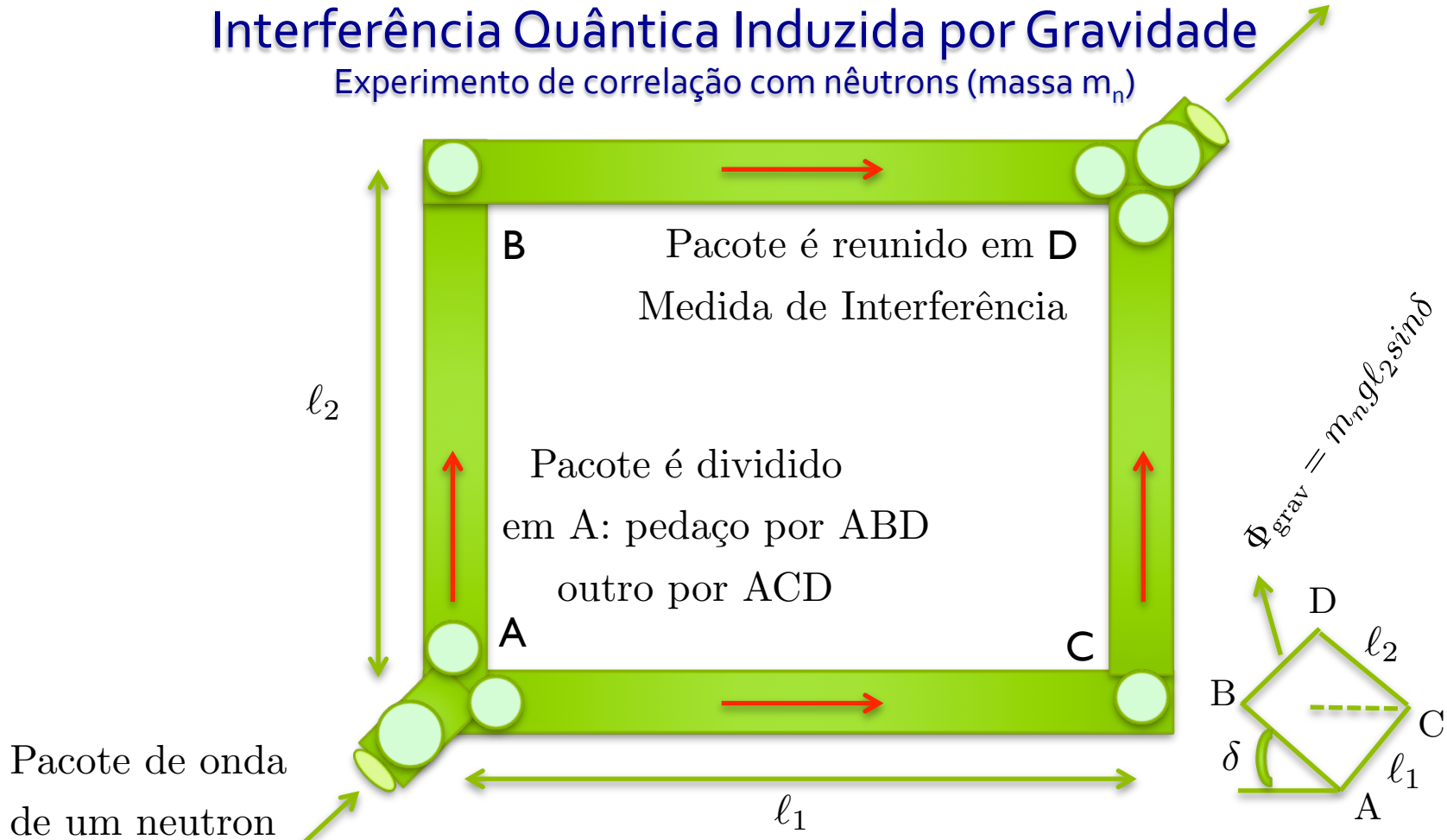
As forças envolvidas são muito pequenas. Para ilustrar, considere o estado ligado do átomo de hidrogênio. Sabemos que o tamanho típico do átomo

é estimado por  $a_0 \equiv$  raio de Bohr  $= \frac{\hbar^2}{e^2 m_e}$ . Como seria “ $a_0$ ” se a força de ligação fosse gravitacional? Para calcular isso, troque o próton por um neutron, o que equivale a trocar  $-\frac{e^2}{r^2}$  por  $-\frac{Gm_e m_n}{r^2}$ . Obteríamos com isso, um raio de Bohr gravitacional “ $a_0$ ”  $= \frac{\hbar^2}{Gm_e^2 m_n}$ . A força gravitacional entre o neutron e elétron é cerca de  $10^{39}$  vezes menor que a força elétrica entre o próton e o elétron, pois  $\frac{e^2}{Gm_e m_n} \approx 2.3 \times 10^{39}$ .

Isto fornece um raio de Bohr gravitacional de  $10^{31} \text{ cm} \approx 10^{13}$  anos-luz.  
(Tamanho algumas vezes maior que o raio estimado do universo -  $10^{28} \text{ cm}$ )

# Interferência Quântica Induzida por Gravidade

Experimento de correlação com nêutrons (massa  $m_n$ )



- dois casos
- 1) ABCD em um plano horizontal: potencial gravitacional igual em ambos os percursos.
  - 2) ABCD rodado de  $\delta$  em torno de AC. Potencial gravitacional no percurso AB é igual ao do CD, mas no percurso BD é diferente do potencial do percurso AC.



# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

Um pouco sobre cargas interagindo com campos eletromagnéticos

1) Começa com a Força de Lorentz

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right].$$

2) Das Equações de Maxwell, percebemos a importância de  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  e

$$\text{temos } \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \\ \therefore \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases}$$

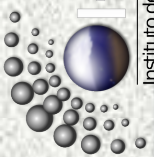
3) Equações de Movimento de Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = e \left( E_x + \dot{y} \frac{B_z}{c} - \dot{z} \frac{B_y}{c} \right) \rightarrow$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\dot{y}}{c} \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] - \frac{\dot{z}}{c} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \right\}$$

4) Lagrangeana: construída de tal forma que  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  forneça a

equação de movimento. Verifique que a expressão serve:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - e\phi(\mathbf{r}, t)$$



# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

F789

Aula 15

5) Momento canônico (direção  $x$ )  $p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x(\mathbf{r}, t)$

Ou seja,  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  (não é simplesmente  $m\mathbf{v}$ )

6) Construa a Hamiltoniana Clássica

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi$$

7) Utilize as ferramentas as desenvolvidas para estudar o análogo quântico.

Para ilustrar, suponha inicialmente que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possam ser derivados de  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  independentes do tempo. Isto é:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \text{ e } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}), \text{ com } \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi \end{cases}$$

Na mecânica quântica,  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  são funções do operador posição  $\mathbf{R}$  da partícula.

Sendo assim, como  $[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \rightarrow [P_i, A_j] \neq 0$ . Isso exige cuidado para lidar com  $H$ . Por exemplo, a parte envolvendo o operador

$$\left( \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 = \mathbf{P}^2 - \frac{e}{c} \underbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})}_{\text{simetria}} + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2$$

note simetria em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{P}$  e que  $H$  é Hermiteano

# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

A Hamiltoniana pode ser reescrita (formalismo de Heisenberg) como

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi = \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2m} + e\phi$$

Já sabemos que  $m \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ . Quanto vale  $m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\Pi}}{dt}$ ?

Façamos a conta para a componente  $i = 1$ , isto é:

$$\frac{d\Pi_1}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\Pi_1, H] = \frac{1}{i\hbar} \left[ \Pi_1, \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2m} + e\phi \right]$$

Mostre que 
$$\begin{cases} [\Pi_1, \Pi_1^2] = 0 \\ [\Pi_1, \Pi_2^2] = \frac{i\hbar e}{c} \left( m \frac{dR_2}{dt} B_3 + B_3 m \frac{dR_2}{dt} \right) \\ [\Pi_1, \Pi_3^2] = -\frac{i\hbar e}{c} \left( m \frac{dR_3}{dt} B_2 + B_2 m \frac{dR_3}{dt} \right) \\ [\Pi_1, e\phi] = -i\hbar e \frac{\partial \phi}{\partial R_1} = i\hbar e E_1 \end{cases}$$
 e obtenha

para a componente 1 : 
$$\frac{d\Pi_1}{dt} = eE_1 + \frac{e}{2c} \left\{ \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{B} \right)_1 - \left( \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_1 \right\}$$

Enfim temos: 
$$m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\Pi}}{dt} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{2c} \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) \right]$$

*A versão quântica da força de Lorentz (teorema de Ehrenfest).*

# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

F789

Aula 15

Como fica a equação de Schrödinger com  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ ?

$$\langle \mathbf{r}' | H | \alpha, t_0; t \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle$$

Começemos por

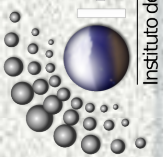
$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \langle \mathbf{r}' | (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{R}))^2 | \alpha, t_0; t \rangle &= \\ &= \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \right) \langle \mathbf{r}' | (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{R})) | \alpha, t_0; t \rangle = \\ &= \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \right) \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{R}') \right) \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle \end{aligned}$$

Note que o gradiente da esquerda “pega” todo mundo (inclusive o  $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$  da direita). Com isso, a equação de Schrödinger é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \right) \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \right) \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle + e\phi(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle &= \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle \end{aligned}$$

Como seria a nova definição de  $\mathbf{j}$ , o fluxo de probabilidade? Lembram

de como definí-lo? Use  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = \psi^* \psi$ , com  $\psi = \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle$



# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

F789

Aula 15

Para calcular  $\mathbf{j}$ , o fluxo de probabilidade, comece por  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}$ , e use a equação de Schrödinger do slide anterior para obter:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left[ - \langle \mathbf{r}' | \frac{\Pi^2}{2m} | \alpha, t_0; t \rangle^* \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle + \langle \mathbf{r}' | \alpha, t_0; t \rangle^* \langle \mathbf{r}' | \frac{\Pi^2}{2m} | \alpha, t_0; t \rangle \right].$$

Note que a parte em  $\phi$  cancelou, pois  $\phi^* = \phi$ . A tarefa se resume em colocar

a expressão acima na forma:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla' \mathbf{j} = 0$ . Depois de algum trabalho, temos:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla' \psi) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2$$

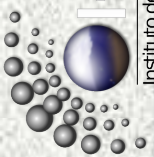
que poderia ter sido obtido, com  $\left\{ \begin{array}{l} \text{troca } \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \\ \frac{\hbar}{i} \nabla' - \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \rightarrow \text{representação } \mathbf{r} \end{array} \right.$

Quando escrevemos a função de onda na forma  $\psi(\mathbf{r}', t) = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$ ,

$S$  real, obtivemos  $\text{Im}(\psi^* \nabla' \psi) = \frac{\rho}{\hbar} \nabla' S$ . Assim, o  $\mathbf{j}$ , pode ser escrito por:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \frac{\rho}{\hbar} \nabla' S - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \rho = \frac{\rho}{m} (\nabla' S - \frac{e}{c} \mathbf{A})$$

Mostre, seguindo o que fizemos para  $\mathbf{A} = 0$ , que  $\int d^3 r' \mathbf{j} = \frac{\langle \Pi \rangle}{m}$ .



# Transformação de Gauge

Estamos prontos para estudar transformação de Gauge. Considere primeiro:

$\phi \rightarrow \phi + \lambda$  e  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ , onde  $\lambda$  é constante - não depende de  $\mathbf{r}$  e  $t$ .

Esta transformação já foi estudada antes (mudança no zero da energia).

Uma transformação mais interessante é: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{r}, t) \end{array} \right.$$

Cujos campos 
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\nabla(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla \lambda) = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \lambda}_{0} = \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right.$$

ficam inalterados e  $\therefore$  a trajetória clássica da partícula carregada sob ação destes campos não se altera (a força de Lorenz não se altera).

Queremos estudar os efeitos quânticos da transformação de Gauge.

Para isso, considere um caso particular 
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow \phi \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{r}) \end{array} \right.$$

$\lambda(\mathbf{r}, t) = \lambda(\mathbf{r})$  não depende de  $t$ .

# Transformação de Gauge

Considere  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ . Tal campo pode ser derivado de  $\begin{cases} A_x = -\frac{By}{2} \\ A_y = \frac{Bx}{2} \\ A_z = 0 \end{cases}$  pois,

$$B = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} = B\hat{\mathbf{z}}$$

ou de  $\begin{cases} A_x = -By \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$  pela mesma razão, ou seja  $B = \nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{z}}$ .

Note que os dois  $\mathbf{A}'$ s se relacionam por  $\mathbf{A}_{\text{nov}} = \mathbf{A}_{\text{velho}} + \underbrace{\nabla\left(-\frac{Bxy}{2}\right)}_{\lambda(\mathbf{r})}$

# Transformação de Gauge

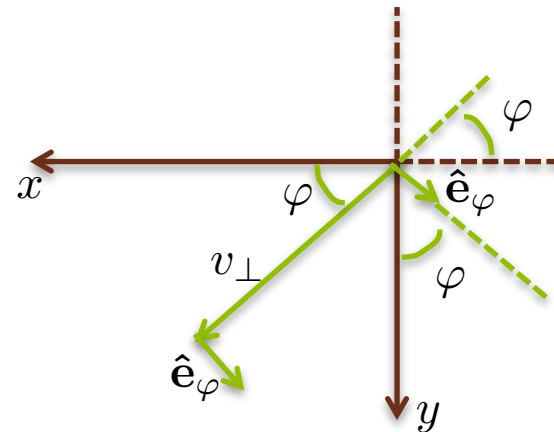
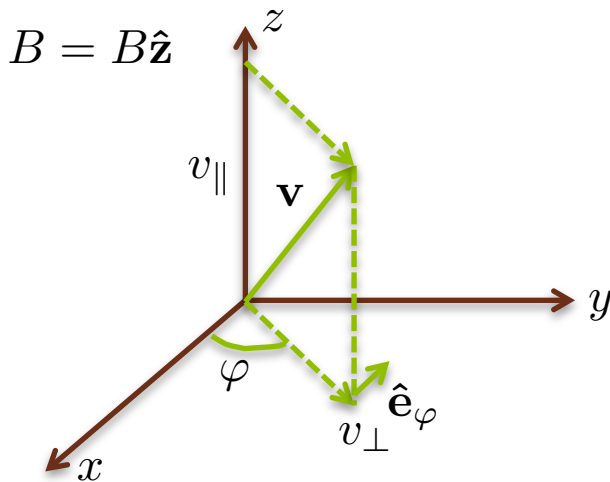
Para  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , considere a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = e\left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) = \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \frac{eB}{c}(v_y\hat{\mathbf{x}} - v_x\hat{\mathbf{y}}) =$$

$$= \frac{eB}{c}v_{\perp}(\underbrace{\sin\varphi\hat{\mathbf{x}} - \cos\varphi\hat{\mathbf{y}}}_{-\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}}) = -\frac{eB}{c}v_{\perp}(\hat{\mathbf{e}}_{\varphi})$$

∄ força na direção  $\hat{\mathbf{z}}$  e a força sempre aponta  $\perp$  à  $\mathbf{v}$  e no plano  $xy$ .

∴ a partícula realiza uma espiral (movimento circular no plano  $xy$ ).





# Transformação de Gauge

Considere agora a equação de Hamilton  $\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

$$\text{onde } H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e \underbrace{\phi}_0 = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \begin{cases} = 0 \text{ se usarmos } \mathbf{A} = (-By, 0, 0) \\ \neq 0 \text{ se usarmos } \mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Isto mostra que em geral o momento canônico não é invariante de Gauge. É importante, entretanto que  $\mathbf{\Pi}$  seja invariante de Gauge, pois ele é responsável pela trajetória que depende apenas das condições iniciais e da força de Lorentz (que não depende de  $\lambda$ ).

Como  $\mathbf{\Pi}$  e  $\mathbf{p}$  estão relacionados por  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}$  e  $\frac{e}{c} \mathbf{A}$  devem mudar de forma a não alterar  $\mathbf{\Pi}$ .

mostre isso usando a transformação de Gauge para redefinir a Lagrangeana e conseqüentemente  $\mathbf{p}$ .

# Transformação de Gauge

É razoável esperar que os valores esperados de quantidades clássicas invariantes mediante transformações de Gauge também sejam invariantes. Assim, esperamos que  $\langle \mathbf{R} \rangle$  e  $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$  não mudem mediante transformação de Gauge, mas  $\langle \mathbf{P} \rangle$  mude. Em outras palavras:

Se  $\begin{cases} |\alpha\rangle \text{ um estado na presença de } \mathbf{A} \\ |\tilde{\alpha}\rangle \text{ um estado na presença de } \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda \end{cases}$

então, esperamos que:  $\begin{cases} \langle \alpha | \mathbf{R} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \mathbf{R} | \tilde{\alpha} \rangle \\ \langle \alpha | \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \mathbf{P} - \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} | \tilde{\alpha} \rangle \end{cases}$

com  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$ .

Vamos construir um operador  $G$  tal que  $|\tilde{\alpha}\rangle = G|\alpha\rangle$  e que quando inserido em  $\langle \tilde{\alpha} | \mathbf{R} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^\dagger \mathbf{R} G | \alpha \rangle = \langle \alpha | \mathbf{R} | \alpha \rangle$  e  $\therefore G^\dagger \mathbf{R} G = \mathbf{R}$ .

Ou, de forma semelhante, para o momento cinemático:

$$\langle \tilde{\alpha} | \mathbf{P} - \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^\dagger \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla\lambda \right) G | \alpha \rangle = \langle \alpha | \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) | \alpha \rangle$$

$$\text{e } \therefore G^\dagger \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla\lambda \right) G = \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)$$

# Transformação de Gauge

Tiramos do chapéu que  $G = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)$  é a solução. Inspirada na condição  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1 \rightarrow G^\dagger G = 1$

Podemos verificar se funciona para o caso

$$G^\dagger \mathbf{R} G = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \mathbf{R} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) = \mathbf{R} \text{ pois, } [\mathbf{R}, \lambda(\mathbf{R})] = 0 \quad (\text{c.q.f.})$$

De forma semelhante, podemos verificar:

$$\begin{aligned} G^\dagger \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) G &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \mathbf{P} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \underbrace{-\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda}_{[\mathbf{A}, \lambda] = 0 \text{ e } [g(\lambda), \lambda] = 0} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{A}, \lambda] = 0 \text{ e } [g(\lambda), \lambda] = 0$$

falta  $\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \mathbf{P} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)$  que pode ser calculado com auxílio da expressão

$$[\mathbf{P}, G(\mathbf{R})] = -i\hbar \nabla G(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P} G(\mathbf{R}) - G(\mathbf{R}) \mathbf{P} = -i\hbar \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \frac{ie}{\hbar c} \nabla \lambda$$

$$\text{ou seja } \mathbf{P} G(\mathbf{R}) - G(\mathbf{R}) \mathbf{P} = G \frac{e}{c} \nabla \lambda \rightarrow G^\dagger (\mathbf{P} G(\mathbf{R}) - G(\mathbf{R}) \mathbf{P}) = G^\dagger G \frac{e}{c} \nabla \lambda$$

$$G^\dagger \mathbf{P} G = \mathbf{P} + \frac{e}{c} \nabla \lambda \rightarrow G^\dagger \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) G = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (\text{c.q.f.})$$

# Transformação de Gauge

Olhemos a equação de Schrödinger para  $|\alpha, t_0; t\rangle$  com o potencial vetor  $\mathbf{A}$ . Se

$[\frac{1}{2m}(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi]|\alpha, t_0; t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0; t\rangle$  é satisfeita, a expectativa é que

$|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$  satisfaça a equação:  $[\frac{1}{2m}(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)^2 + e\phi]|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$ .

Verifiquemos se a seguinte relação é verdadeira  $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)|\alpha, t_0; t\rangle$ ?

Para tanto, insira esta expressão na equação acima de Schrödinger para  $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$ ,

e multiplique a equação toda pela esquerda por  $\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)$ .

Note que  $\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)[(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)^2]\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) =$

$\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) \times$

$\times \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)$  e aplique

$\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right)(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{R})\right) = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$  duas vezes. A

equação que sobra é a equação de Schrödinger para  $|\alpha, t_0; t\rangle$  com  $\mathbf{A}$  e isso

demonstra a relação entre  $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$  e  $|\alpha, t_0; t\rangle$ .

# Transformação de Gauge

Na representação das coordenadas a relação entre  $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$  e  $|\alpha, t_0; t\rangle$  fica  $\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}', t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{r}')\right)\psi_\alpha(\mathbf{r}', t)$ , onde  $\lambda(\mathbf{r}')$  é uma função real do vetor posição  $\mathbf{r}'$ . Em termos de  $\rho$  e  $S$ , a função de onda pode ser escrita por

$$\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}', t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{r}')\right)\sqrt{\rho}\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) = \sqrt{\rho}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S + \frac{e}{c}\lambda(\mathbf{r}')\right)\right)$$

Ou seja, basta 
$$\begin{cases} \rho \rightarrow \rho \\ S \rightarrow S + \frac{e}{c}\lambda \end{cases}$$

Como fica o fluxo de probabilidade  $\mathbf{j} = \frac{\rho}{m}(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A})$ ?

Mediante a transformação de Gauge  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\lambda$ , temos

$$\mathbf{j} = \frac{\rho}{m}(\nabla(S + \frac{e}{c}\lambda) - \frac{e}{c}(\mathbf{A} + \nabla\lambda)) = \frac{\rho}{m}(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A})$$

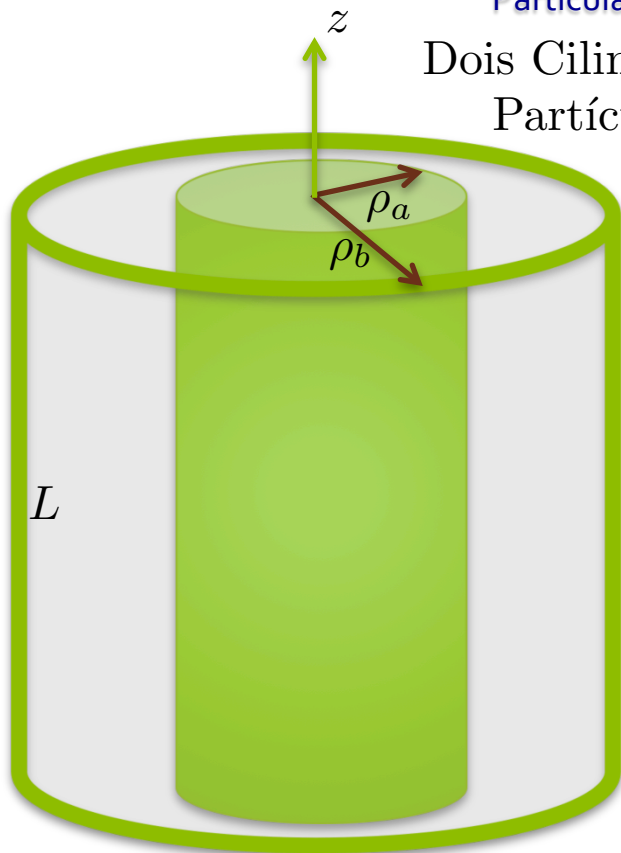
*∴ o fluxo de probabilidade é invariante mediante transformação de Gauge.*

# Variável dinâmica fundamental: **A** ou **B**?

Partícula prisioneira em cabo coaxial

Dois Cilindros metálicos, um dentro do outro.

Partícula confinada entre  $\rho_a$  e  $\rho_b$



O espectro de energia é encontrado

resolvendo a equação  $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$

em coordenadas cilíndricas e condições de contorno abaixo.

Condições de contorno para  $\psi(z, \rho, \varphi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(0, \rho, \varphi) = 0 \\ \psi(L, \rho, \varphi) = 0 \\ \psi(z, \rho_a, \varphi) = 0 \\ \psi(z, \rho_b, \varphi) = 0 \end{array} \right.$$

# O Espectro de Energia

A equação de Schrödinger  $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$  em coordenadas cilíndricas fica:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi \rightarrow \text{com } \psi(z, \rho, \varphi) = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

$$\text{temos } \begin{cases} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_0^2 Z \rightarrow Z(z) = \exp(\pm ik_0 z) & \begin{cases} Z(0) = Z(L) = 0 \\ Z(z) = \sin k_0 z; \\ k_0 = \frac{\ell\pi}{L}, \ell \text{ inteiro} \end{cases} \\ \frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -\nu^2 Q \rightarrow Q(\varphi) = \exp(\pm i\nu\varphi) & \begin{cases} Q(0) = Q(2\pi) \\ \nu \text{ inteiro} \end{cases} \end{cases}$$

Para  $\rho$  temos:  $\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}R + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2\right)R = 0$

se tomarmos  $\begin{cases} x = k\rho \\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2} \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$  com

soluções conhecidas  $R = AJ_\nu(k\rho) + BN_\nu(k\rho)$ . Aplique  $R(k\rho_a) = R(k\rho_b) = 0$ , e

$$\text{obtenha } \begin{cases} AJ_\nu(k\rho_a) + BN_\nu(k\rho_a) = 0 \\ AJ_\nu(k\rho_b) + BN_\nu(k\rho_b) = 0 \end{cases} \quad \underbrace{J_\nu(k\rho_a)N_\nu(k\rho_b) - J_\nu(k\rho_b)N_\nu(k\rho_a)}_{m \equiv m\text{-ésima raiz}} = 0$$

Isso quantiza  $k$  e a energia  $E_{\ell m \nu} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( k_{m\nu}^2 + \left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2 \right)$

# Campo magnético constante no interior do cabo

A partícula não vê o  $\mathbf{B}$ . Só vê o  $\mathbf{A}$ !

Suponha agora um campo magnético  $B = B_0 \hat{\mathbf{z}}$  no interior do cilindro  $\rho < \rho_a$ .

Quanto vale o potencial vetor para  $\rho < \rho_a$  e  $\rho > \rho_a$ ?

Caso  $\rho > \rho_a$

$$\int_{\text{superfície circular de raio } \rho > \rho_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = B_0 \pi \rho_a^2 = \int_{\text{superfície circular de raio } \rho > \rho_a} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\text{linha fechada sobre o anel de raio } \rho > \rho_a} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{mas, } d\mathbf{l} = \rho d\varphi \text{ e } \therefore \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \rho A_\phi d\varphi \rightarrow B_0 \pi \rho_a^2 = \rho A_\phi \oint_{\text{linha fechada sobre o anel}} d\varphi = 2\pi \rho A_\phi$$

$$\therefore A_\phi = \frac{B_0 \rho_a^2}{2\rho} \rightarrow \text{Mostre que } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0.$$

Caso  $\rho < \rho_a$

$$\int_{\text{superfície circular de raio } \rho > \rho_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = B_0 \pi \rho^2 = \int_{\text{superfície circular de raio } \rho < \rho_a} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\text{linha fechada sobre o anel de raio } \rho < \rho_a} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{de novo, } d\mathbf{l} = \rho d\varphi \text{ e } \therefore \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \rho A_\phi d\varphi \rightarrow B_0 \pi \rho^2 = \rho A_\phi \oint_{\text{linha fechada sobre o anel}} d\varphi = 2\pi \rho A_\phi$$

$$\therefore A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2} \rightarrow \text{Mostre que } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B_0 \hat{\mathbf{z}}.$$



# Novo Espectro de Energia

A partícula não vê o **B**. Só vê o **A**!

A solução do problema, com campo magnético constante no interior do cilindro

$$\rho < \rho_a, \text{ será obtida com } \begin{cases} A_\rho = A_z = 0 \text{ e } A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2} \text{ p/ } \rho < \rho_a \rightarrow \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ A_\rho = A_z = 0 \text{ e } A_\phi = \frac{B_0 \rho_a^2}{2\rho} \text{ p/ } \rho > \rho_a \rightarrow \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Note que, embora a partícula não sinta o campo **B** na região  $\rho > \rho_a$ , ela sente **A**, pois  $\mathbf{A} \neq 0$  nesta região.

Para encontrar os autovalores para este novo problema, precisamos trocar

$\nabla$  por  $\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}$ . Lembrando que  $\nabla$  em coordenadas cilíndricas é:

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \text{ temos que trocar } \frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar c} \frac{B_0 \rho_a^2}{2\rho}$$

Tal troca resulta em uma mudança no espectro de energia! (surpreendente, pois o campo é zero onde a partícula pode estar.) A equação de Schrödinger em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \text{ e usando a troca sugerida com}$$

$$a = \frac{e}{\hbar c} \frac{B_0 \rho_a^2}{2}, \text{ temos } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{a^2}{\rho^2} \psi - \frac{2ai}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi$$

# O potencial vetor $A$ é a variável dinâmica fundamental

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{a^2}{\rho^2} \psi - \frac{2ai}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \text{ e } \psi = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

nos leva à:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_0^2 Z \rightarrow Z(z) = \exp(\pm ik_0 z) \\ \frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -\nu^2 Q \rightarrow Q(\varphi) = \exp(\pm i\nu\varphi) \end{cases} \begin{cases} Z(0) = Z(L) = 0 \\ Z(z) = \sin k_0 z; \\ k_0 = \frac{\ell\pi}{L}, \ell \text{ inteiro} \\ Q(0) = Q(2\pi) \\ \nu \text{ inteiro positivo} \end{cases}$$

Para  $\rho$  agora temos:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} R - \frac{a^2}{\rho^2} R - \frac{2ai}{\rho^2} (\pm i\nu) R + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2 \right) R = 0$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} (\nu \pm a)^2 R + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2 \right) R = 0 \text{ se } \begin{cases} x = k\rho \\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{(\nu \pm a)^2}{x^2} \right) R = 0 \text{ com } R = AJ_{\nu'}(k\rho) + BN_{\nu'}(k\rho).$$

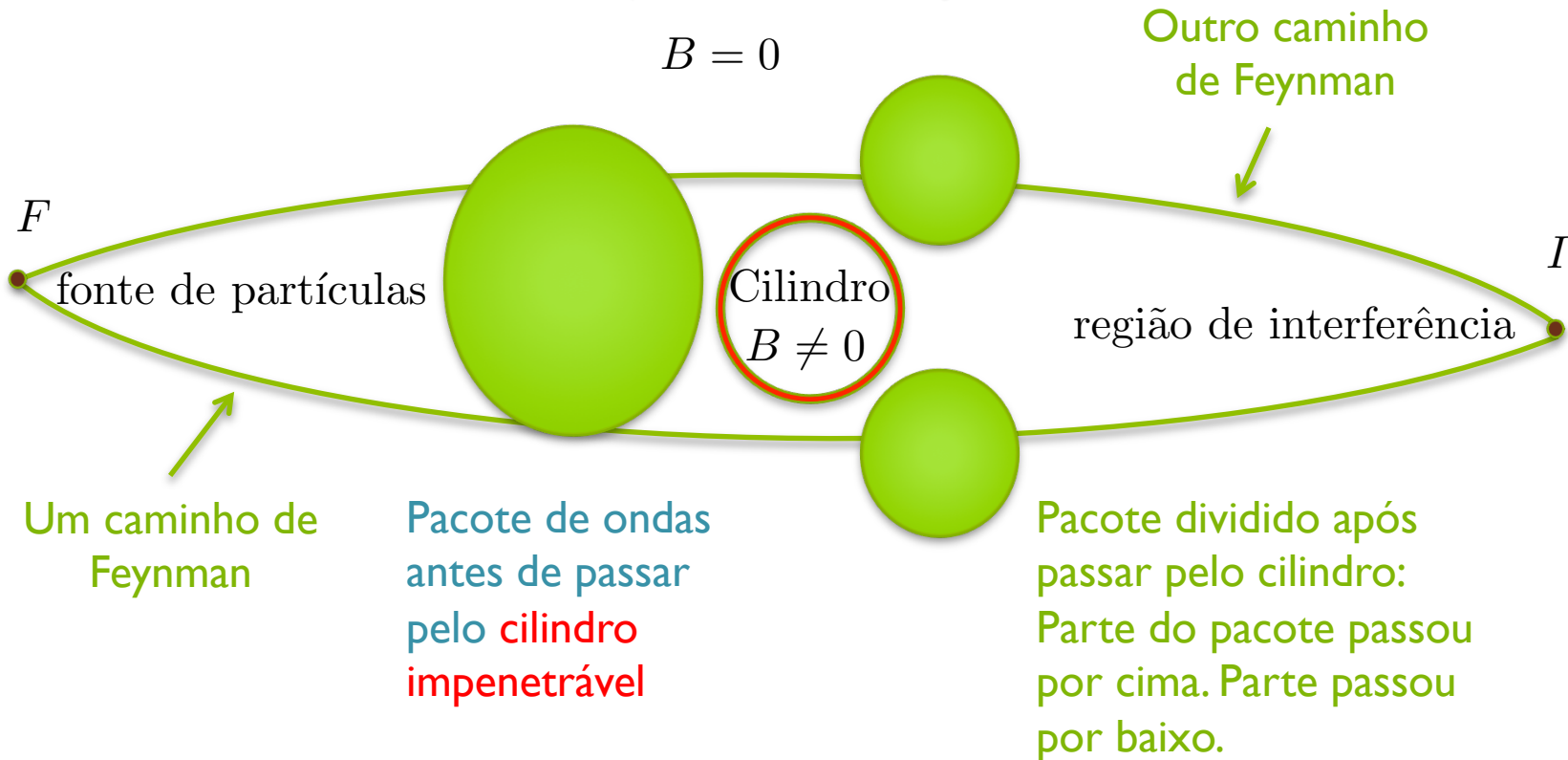
Note que  $\nu' = |\nu \pm a|$  não é inteiro. Aplique  $R(k\rho_a) = R(k\rho_b) = 0$ ,

$$\rightarrow \begin{cases} AJ_{\nu'}(k\rho_a) + BN_{\nu'}(k\rho_a) = 0 \\ AJ_{\nu'}(k\rho_b) + BN_{\nu'}(k\rho_b) = 0 \end{cases} \quad \underbrace{J_{\nu'}(k\rho_a)N_{\nu'}(k\rho_b) - J_{\nu'}(k\rho_b)N_{\nu'}(k\rho_a)} = 0$$

$$m \equiv m\text{-ésima raiz} \rightarrow E_{\ell m \nu'} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( k_{m\nu'}^2 + \left( \frac{\ell\pi}{L} \right)^2 \right).$$

# O efeito de Aharanov-Bohm

Experimento de correlação



Queremos estudar como a probabilidade de encontrar a partícula na região de interferência  $I$  depende do fluxo magnético. O estudo será feito com integrais de Feynman. A partícula não pode penetrar no cilindro, assim, de novo, ela percebe o potencial vetor, mas não vai onde  $\mathbf{B} \neq 0$ .  $\mathbf{B} = 0$  fora do cilindro.

# O efeito de Aharanov-Bohm

F789  
Aula 15

