

Efeito Zeeman do estado fundamental do átomo de Hidrogênio

Uma aplicação da Teoria de Perturbação Estacionária.

- A Hamiltoniana (perturbação) W_z .

Coloque um campo magnético \mathbf{B}_0 paralelo ao eixo Oz . Esse campo interage com

$$\text{momentos magnéticos} \begin{cases} \mathbf{M}_L = \frac{q}{2m_e} \mathbf{L} \rightarrow \text{Momento magnético orbital;} \\ \mathbf{M}_I = \frac{g_p \mu_n}{\hbar} \mathbf{I} = -\frac{g_p q}{2M_p} \mathbf{I} \rightarrow \text{Momento Magnético do próton;} \\ \mathbf{M}_S = \frac{2\mu_B}{\hbar} \mathbf{S} = \frac{q}{m_e} \mathbf{S} \rightarrow \text{Momento Magnético do elétron.} \end{cases}$$

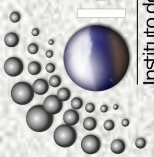
- A perturbação sobre o átomo de hidrogênio (W_z) é dada por:

$$W_z = -\mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{M}_L + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_I) = \omega_0(L_z + 2S_z) + \omega_n I_z,$$

onde ω_0 (frequência angular de Larmor) e ω_n são definidos por (lembre que $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$):

$$\omega_0 = -\frac{q}{2m_e} B_0 \quad \text{e} \quad \omega_n = \frac{q}{2M_p} g_p B_0, \quad \text{com} \quad \left| \frac{\omega_0}{\omega_n} \right| = g_p \frac{M_p}{m_e} \gg 1.$$

- A frequência de Larmor é muito maior que a nuclear.
- De fato, falta coisa em W_z (um termo quadrático em B_0 — o termo diamagnético), mas esses termos não atuam sobre as variáveis de spin eletrônico e nuclear. Ele simplesmente desloca o nível 1s como um todo. Veja complemento D_{VII}.
- **A perturbação “vista” pelo nível 1s:** Escolhemos esse nível por simplicidade (só tem efeitos de estrutura hiper-fina). O nível 2 tem estrutura fina e hiper-fina e seria mais complicado. O que aprenderemos sobre o 1s poderá ser usado para o nível 2.

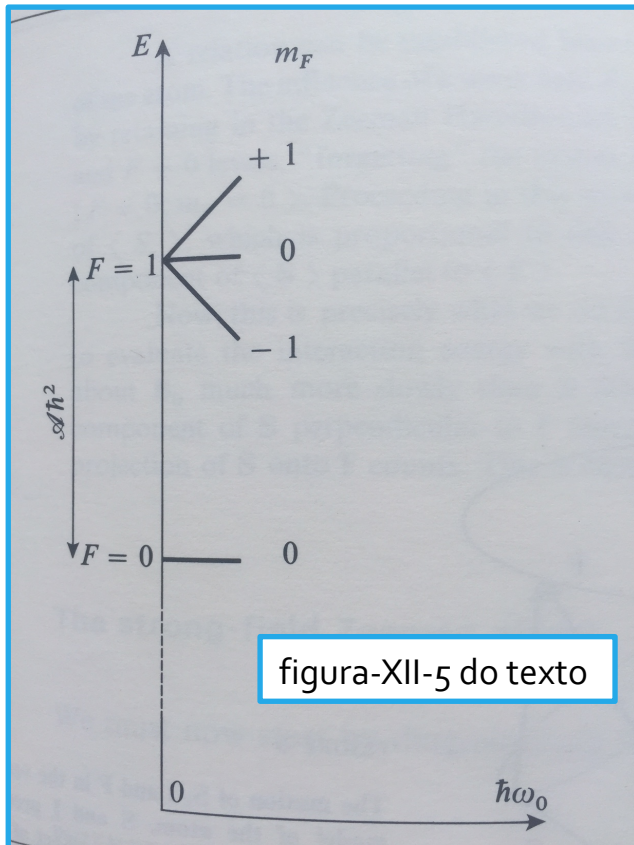


Efeito Zeeman do estado fundamental do átomo de Hidrogênio

Uma aplicação da Teoria de Perturbação Estacionária.

- Mesmo com o mais forte dos campos magnéticos que podem ser produzidos em laboratório, o efeito de deslocamento de linhas causado por W_z é muito menor que a distância entre $1s$ e os outros níveis.

∴ O efeito de W_z pode ser tratado como uma perturbação de um efeito maior.
- Na aula de hoje estudaremos o porque do efeito Zeeman se manifestar conforme o diagrama abaixo ($B_0 \neq 0$ quebra a degenerescência).



- Se B_0 é muito grande, W_z pode ser da ordem ou até maior que o efeito de W_{hf} . Lembre que W_f só causa um deslocamento em $1s$.
- Se B_0 é muito fraco, $W_z \ll W_{hf}$ e isso pode afetar a hierarquia da teoria de perturbação.
- Em alguns casos, W_z é perturbação de W_{hf} . Em outros, W_{hf} é perturbação de W_z e às vezes, ambos tem que ser tratados em pé de igualdade (diagonalizados juntos).
- O termo de estrutura hiper-fina para $1s$ é $\mathcal{AS} \cdot \mathbf{I}$. Os outros, vimos que não contribuem.

Efeito Zeeman do estado fundamental do átomo de Hidrogênio

- Na prática, escolheremos se W_z precisará ser diagonalizado em

$$\mathcal{E}_{1s} = \{|n = 1; \ell = 0; m_L = 0; m_S = \pm \frac{1}{2}; m_I = \pm \frac{1}{2}\rangle\}$$

ou em

$$\mathcal{E}_{1s} = \{|n = 1; \ell = 0; m_L = 0; F = 0, 1; m_F\rangle\}$$

- Note que $W_z = \omega_0(L_z + 2S_z) + \omega_n I_z$ tem apenas operadores de momento angular. Como L_z dá zero sobre kets com $\ell = 0$, a parte orbital é facilmente resolvida, uma vez que $\langle n = 1; \ell = 0; m_L = 0 | n = 1; \ell = 0; m_L = 0 \rangle = 1$
- Nosso problema, para o caso de hierarquia não definida, passa a ser o de diagonalizar o operador $\mathcal{AS} \cdot \mathbf{I} + 2\omega_0 S_z + \omega_n I_z$, cujas partes atuam somente sobre graus de liberdade de spin.
- Para simplificar ainda mais, desprezaremos o termo $\omega_n I_z$, considerando que $\omega_n \ll \omega_0$ (o complemento C_{XII} não faz isso).
- Usaremos a nomenclatura $\mathcal{E}_{1s} \doteq \{|m_S = \pm \frac{1}{2}; m_I = \pm \frac{1}{2}\rangle\} \doteq \{|F = 0, 1; m_F\rangle\}$, para descrever o espaço quadri-degenerado (quando sob a ação exclusiva de H_0) associado ao nível 1s.
- Assim, dependendo da intensidade de B_0 , diagonalizaremos em uma dessas bases, o operador $\mathcal{AS} \cdot \mathbf{I} + 2\omega_0 S_z$.

Efeito Zeeman do estado fundamental do átomo de Hidrogênio

- Diferentes domínios da força do campo.
 - $\hbar\omega_0 \ll \mathcal{A}\hbar^2 \rightarrow$ fraco;
 - $\hbar\omega_0 \gg \mathcal{A}\hbar^2 \rightarrow$ forte;
 - $\hbar\omega_0 \approx \mathcal{A}\hbar^2 \rightarrow$ intermediário.
- Podemos diagonalizar $\mathcal{A}\mathbf{S} \cdot \mathbf{I} + 2\omega_0 S_z$ exatamente. No entanto, para estudar teoria de perturbação faremos o seguinte:
 - $2\omega_0 S_z$ será tratado como perturbação perto de $\mathcal{A}\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$;
 - $\mathcal{A}\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$ será tratado como perturbação perto de $2\omega_0 S_z$;
 - Diagonalização exata e seus limites para comparar com os casos acima.
- Efeito Zeeman de campo fraco.

- Nestas condições os melhores estados são os auto-estados de $\mathcal{A}\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$,

ou seja
$$\begin{cases} \{|F = 1; m_F = -1, 0, 1\rangle\} \rightarrow \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} \text{ (3-degenerado)} \\ \{|F = 0; m_F = 0\rangle\} \rightarrow -\frac{3\mathcal{A}\hbar^2}{4} \text{ (não-degenerado)} \end{cases}$$

- Partiremos desta base e diagonalizaremos $2\omega_0 S_z$, conforme aprendemos em teoria de perturbação estacionária.

- Isso exigirá calcular elementos do tipo
$$\begin{cases} \langle F = 1; m_F | S_z | F = 1; m'_F \rangle; \\ \langle F = 1; m_F | S_z | F = 0; 0 \rangle. \\ \langle F = 0; 0 | S_z | F = 0; 0 \rangle. \end{cases}$$

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo fraco

F789

Aula 19

- Saberemos facilmente aplicar S_z em cada ket da base $\{|F, m_F\rangle\}$, se escrevermos cada ket dessa base como uma combinação dos kets da base $\{|m_S; m_I\rangle\}$. Lembre que $S_z|m_S; m_I\rangle = m_S\hbar|m_S; m_I\rangle$.

- As relações entre as bases foram feitas no capítulo X, aula 10. Reproduzidas

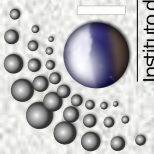
ao lado:

$$\begin{cases} |1, +1\rangle = |++\rangle \\ |1, -1\rangle = |--\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |++\rangle = |1, +1\rangle \\ |--\rangle = |1, -1\rangle \\ |+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 0\rangle) \\ |-+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 0\rangle) \end{cases}$$

- Com elas, podemos escrever
$$\begin{cases} S_z|1, +1\rangle = \frac{\hbar}{2}|++\rangle = \frac{\hbar}{2}|1, +1\rangle \\ S_z|1, -1\rangle = -\frac{\hbar}{2} |--\rangle = -\frac{\hbar}{2}|1, -1\rangle \\ S_z|1, 0\rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{\hbar}{2}|0, 0\rangle \\ S_z|0, 0\rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) = \frac{\hbar}{2}|1, 0\rangle \end{cases}$$

- Note que S_z não é diagonal na representação $\{|F, m_F\rangle\}$, pois ele não comuta com um dos geradores desta base, o operador \mathbf{F}^2 .

- Os elementos não diagonais vem de
$$\begin{cases} \langle 0, 0|S_z|1, 0\rangle = \langle 0, 0|\frac{\hbar}{2}|0, 0\rangle = \frac{\hbar}{2}; \\ \langle 1, 0|S_z|0, 0\rangle = \langle 1, 0|\frac{\hbar}{2}|1, 0\rangle = \frac{\hbar}{2}. \end{cases}$$



Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo fraco

- A matriz que representa S_z na base $\{|F, m_F\rangle\}$, é dada por:

$$S_z \doteq \begin{array}{l} \langle 1, 1 | \\ \langle 1, 0 | \\ \langle 1, -1 | \\ \langle 0, 0 | \end{array} \frac{\hbar}{2} \begin{array}{c} |1, 1\rangle |1, 0\rangle |1, -1\rangle |0, 0\rangle \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- Compare com a representação matricial de F_z , dada por

$$F_z \doteq \begin{array}{l} \langle 1, 1 | \\ \langle 1, 0 | \\ \langle 1, -1 | \\ \langle 0, 0 | \end{array} \hbar \begin{array}{c} |1, 1\rangle |1, 0\rangle |1, -1\rangle |0, 0\rangle \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- Note que para todos os efeitos, S_z é diagonal em $F = 1$ (sozinho - caixa verde) e em $F = 0$ (sozinho - caixa azul)
- Essa propriedade está ligada ao teorema de Wigner-Eckart, conforme discutido no complemento D_X.

No caso, temos $P_1 S_z P_1 = \frac{1}{2} P_1 F_z P_1$, com $P_1 = \sum_{m_1=-1}^{+1} |1, m_1\rangle \langle 1, m_1|$.

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo fraco

F789

Aula 19

- O teorema diz: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Em um dado auto-subespaço de momento angular total} \\ \text{todas as matrizes que representam vetores (operadores} \\ \text{vetoriais) são proporcionais.} \end{array} \right.$
- Esse sub-espço, $\mathcal{E}(k, J) = \{|k, J, m_j\rangle\}$, é de autokets de \mathbf{J}^2 e J_z com os mesmos J e k .
- A constante de proporcionalidade (teorema de projeção), é dada por (dentro do sub-espço $\mathcal{E}(k, J)$):

$$\mathbf{V} = \frac{\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} \rangle_{k,J}}{\langle \mathbf{J}^2 \rangle_{k,J}} \mathbf{J},$$

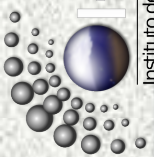
onde a notação $\langle A \rangle_{k,J}$ indica que esse “valor médio” não depende de m_J .

Note que \mathbf{V} é diagonal nesse subespaço.

- No presente caso (campo fraco), temos $\mathbf{J} = \mathbf{F}$ e $\mathbf{V} = \mathbf{S}$, gerando:

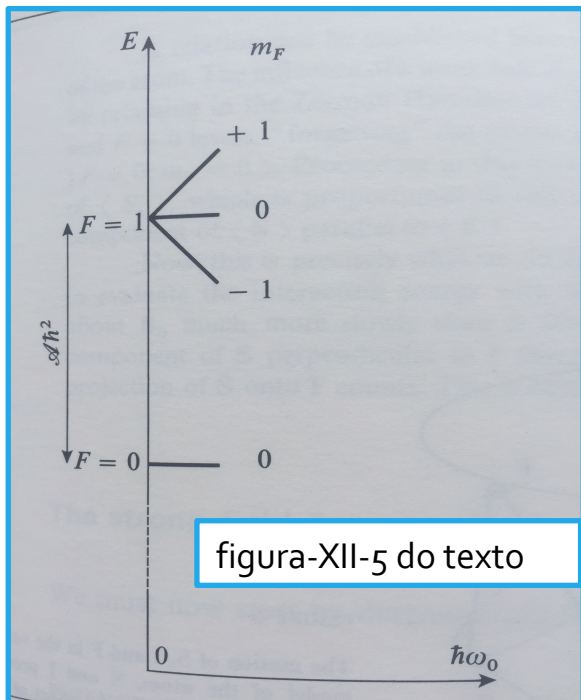
$$\frac{\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \rangle_{F=1}}{\langle \mathbf{F}^2 \rangle_{F=1}} \mathbf{J} = \frac{\frac{1}{2}(F(F+1) + S(S+1) - I(I+1))}{F(F+1)} = \frac{\frac{1}{2}(1(1+1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1))}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

- Sob ponto de vista prático, a matriz que representa a perturbação no espaço degenerado, $F = 1$, já está diagonalizada e, portanto, basta somar aos elementos da diagonal na matriz que representa $H_0 + W_{\text{hf}}$, para obter os termos em energia até primeira ordem.



Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo fraco

- Os auto-estados em ordem zero e auto-valores em primeira ordem do átomo de hidrogênio, quando submetido à um campo magnético fraco.



Auto-estados

$$|F = 1; m_f = 1\rangle$$

$$|F = 1; m_f = 0\rangle$$

$$|F = 1; m_f = -1\rangle$$

$$|F = 0; m_f = 0\rangle$$

Auto-valores

$$\frac{A\hbar^2}{4} + \hbar\omega_0$$

$$\frac{A\hbar^2}{4} + 0$$

$$\frac{A\hbar^2}{4} - \hbar\omega_0$$

$$-\frac{3A\hbar^2}{4} + 0$$

\Rightarrow válido quando $\hbar\omega_0 \ll A\hbar^2$.

- O tratamento feito é válido enquanto a diferença $\hbar\omega_0$ entre dois níveis Zeeman adjacentes for muito menor que diferença (com campo zerado) entre os níveis $F = 1$ e $F = 0$ (estrutura hiper-fina).
- A comparação entre o tratamento perturbativo (de fato, as frequências de Bohr que aparecem na evolução temporal de $\langle \mathbf{F} \rangle$ e $\langle \mathbf{S} \rangle$) e o modelo vetorial do átomo (seção 2.c.) fica para a casa.

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo forte

F789

Aula 19

- O efeito Zeeman de campo forte, $W = W_{\text{hf}} + W_z$, com $W_z \gg W_{\text{hf}}$.

Agora a estratégia é começar com $W = W_z$ e tratar W_{hf} como perturbação.

- Auto-estados e auto-valores do termo de Zeeman. Lembre que esse termo é diagonal na base $\{|m_S; m_I\rangle\} \Rightarrow 2\omega_0 S_z |m_S; m_I\rangle = 2m_S \hbar \omega_0 |m_S; m_I\rangle$.

S_z só atua no elétron e $m_S = \pm \frac{1}{2}$, ou seja, os auto-valores são $\pm \hbar \omega_0$.

assim, temos $\begin{cases} 2\omega_0 S_z |+, \pm\rangle = +\hbar \omega_0 |+, \pm\rangle \\ 2\omega_0 S_z |-, \pm\rangle = -\hbar \omega_0 |-, \pm\rangle \end{cases} \rightarrow$ dois sub-espacos, cada qual

duplamente degenerado $\begin{cases} |+, \pm\rangle \rightarrow +\hbar \omega_0 \\ |-, \pm\rangle \rightarrow -\hbar \omega_0 \end{cases}$

- As correções em primeira ordem podem ser obtidas diagonalizando $\mathcal{AS} \cdot \mathbf{I}$ nestes dois sub-espacos. Novamente o assunto é mais simples do que parece, pois $\mathcal{AS} \cdot \mathbf{I}$ é diagonal em cada sub-espaco. Para ver isso, lembre que

$[\mathbf{F}^2, F_z] = 0$ e da seguinte propriedade de F689: Se $\begin{cases} A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle \\ [A, B] = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\langle \varphi_m | [A, B] | \varphi_n \rangle = 0 \rightarrow (a_m - a_n) \langle \varphi_m | B | \varphi_n \rangle = 0$ e $\langle \varphi_m | B | \varphi_n \rangle = 0$, caso $a_m \neq a_n$.

Como, $\mathcal{AS} \cdot \mathbf{I} = \frac{\mathcal{A}}{2} (\mathbf{F}^2 - \mathbf{S}^2 - \mathbf{I}^2)$ também comuta com F_z , temos

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo forte

- Os termos cruzados $\begin{cases} \langle +; - | \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} | +; + \rangle = 0 \\ \langle +; + | \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} | +; - \rangle = 0 \end{cases}$ pois $\underbrace{\begin{cases} F_z | + + \rangle = 1\hbar | + + \rangle \\ F_z | + - \rangle = 0\hbar | + - \rangle \end{cases}}$

autovalores distintos.

- Da mesma forma $\begin{cases} \langle -; - | \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} | -; + \rangle = 0 \\ \langle -; + | \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} | -; - \rangle = 0 \end{cases}$ pois $\underbrace{\begin{cases} F_z | - + \rangle = 0\hbar | - + \rangle \\ F_z | - - \rangle = -1\hbar | - - \rangle \end{cases}}$

autovalores distintos.

- Ou seja, $\mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$ é diagonal em ambos os sub-espacos.
- Como todos os termos fora da diagonal são nulos, precisamos apenas calcular elementos do tipo $\langle m_S; m_I | \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} | m_S; m_I \rangle$.

Para isso lembre que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{I} = S_z I_z + \frac{1}{2}(S_+ I_- + S_- I_+)$ e que os dois últimos termos $(S_+ I_- + S_- I_+)$ não contribuem para termos da diagonal, uma vez que eles mudam os valores de m_I e m_S . Podemos, desta forma, escrever:

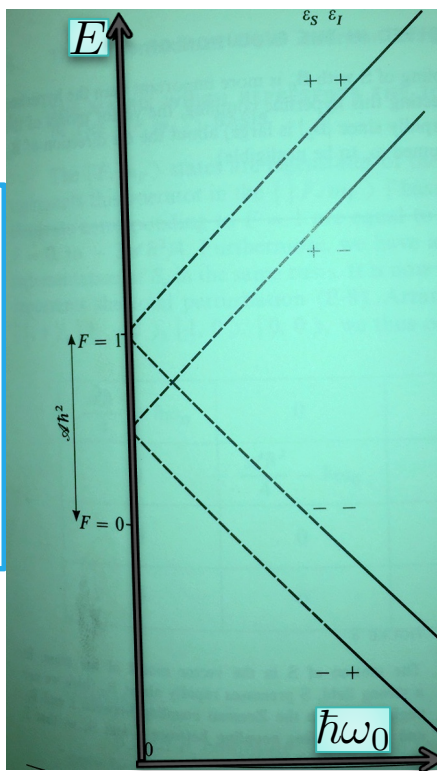
$$\langle m_S; m_I | \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} | m_S; m_I \rangle = \langle m_S; m_I | \mathcal{A} S_z I_z | m_S; m_I \rangle = \mathcal{A} \hbar^2 m_S m_I.$$

- Em seguida, construiremos uma tabela similar ao caso do campo fraco.

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo forte

- Os auto-estados em ordem zero e auto-valores em primeira ordem do átomo de hidrogênio, quando submetido à um campo magnético forte.

figura-XII-7 do texto



Auto-estados

Auto-valores

$$|+; +\rangle$$

$$+ \hbar\omega_0 + \frac{A\hbar^2}{4}$$

$$|+; -\rangle$$

$$+ \hbar\omega_0 - \frac{A\hbar^2}{4}$$

$$|-; +\rangle$$

$$- \hbar\omega_0 - \frac{A\hbar^2}{4}$$

$$|-; -\rangle$$

$$- \hbar\omega_0 + \frac{A\hbar^2}{4}$$

⇒ válido quando $\hbar\omega_0 \gg A\hbar^2$.

- Interpretação sobre a separação $\frac{A\hbar^2}{2}$ devido ao campo forte entre os dois estados $\{|+; \pm\rangle\}$ (ou entre $\{|-; \pm\rangle\}$): Vimos que a Hamiltoniana total poderia ser escrita por $2\omega_0 S_z + \mathcal{A}I_z S_z = 2(\omega_0 + \frac{\mathcal{A}}{2}I_z)S_z$. O campo magnético B_0 parece estar fortalecido (caso $m_I = +1/2$) ou enfraquecido ($m_I = -1/2$) por um campo magnético interno devido à W_{hf} .

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo intermediário

• Já temos todos os elementos para escrever a matriz que representa a perturbação total, $W_{hf} = 2\omega_0 S_z + \mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$, na base $\{|F, m_F\rangle\}$.

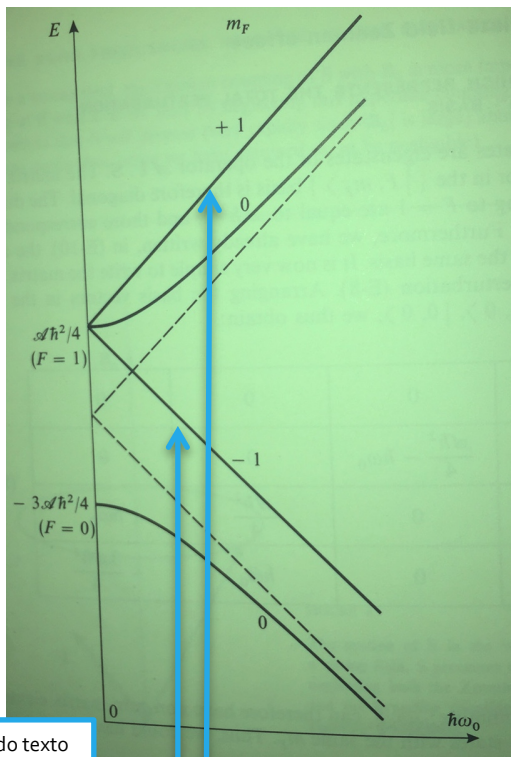


figura-XII-9 do texto

Note as retas cheias correspondentes ao primeiro bloco.

- o No que diz respeito ao termo $\mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$, o cálculo é direto, uma vez que esse termo pode ser escrito por $\frac{\mathcal{A}}{2} (\mathbf{F}^2 - \mathbf{S}^2 - \mathbf{I}^2)$. Nesta base a matriz que representa esse termo é dada por:

$$\mathcal{A} \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} \doteq \begin{matrix} \langle 1, 1 | \\ \langle 1, -1 | \\ \langle 1, 0 | \\ \langle 0, 0 | \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3\mathcal{A}\hbar^2}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} |1, 1\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |0, 0\rangle \end{matrix}$$

- o Por outro lado, obtemos em aula:

$$2\omega_0 S_z \doteq \begin{matrix} \langle 1, 1 | \\ \langle 1, -1 | \\ \langle 1, 0 | \\ \langle 0, 0 | \end{matrix} \begin{pmatrix} +\hbar\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\hbar\omega_0 \\ 0 & 0 & +\hbar\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |1, 1\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |0, 0\rangle \end{matrix}$$

- Ao somar, a matriz fica bloco diagonal. O segundo bloco ($m_F = 0$) não é diagonal.

Efeito Zeeman do estado fundamental de H: campo intermediário

- Assim a matriz fica:

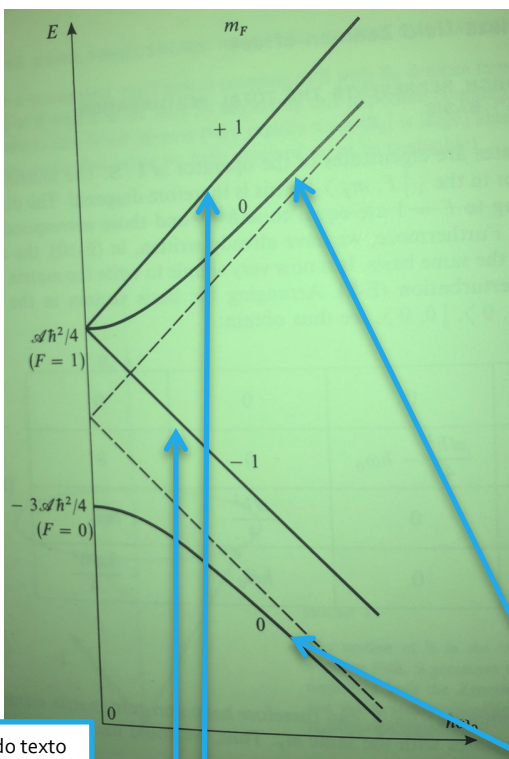


figura-XII-9 do texto

Note as retas cheias correspondentes ao primeiro bloco.

$$W_{\text{hf}} \doteq \begin{matrix} \langle 1, 1 | \\ \langle 1, -1 | \\ \langle 1, 0 | \\ \langle 0, 0 | \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} + \hbar\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} - \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} & +\hbar\omega_0 \\ 0 & 0 & +\hbar\omega_0 & -\frac{3\mathcal{A}\hbar^2}{4} \end{pmatrix}$$

- Os termos diagonais tem auto-energias e auto-estados

$$\text{dados por } \begin{cases} E_1 = \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} + \hbar\omega_0 \rightarrow |1, +1\rangle = |++\rangle \\ E_2 = \frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} - \hbar\omega_0 \rightarrow |1, -1\rangle = |--\rangle \end{cases}$$

- Diagonalizando o bloco menor (faça em casa), obtemos

$$\lambda = -\frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{A}\hbar^2}{2}\right)^2 + \hbar^2\omega_0^2}$$

Esses resultados correspondem às curvas da figura ao lado.

- Note que $\omega_0 \gg 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{\mathcal{A}\hbar^2}{4} \pm \hbar\omega_0$ (conhecido).