Operadores Densidade e Ensembles Misturados e Puros

Até aqui quando realizávamos uma experiência, todas as partículas estavam no estado $|\alpha\rangle$. Que tal agora a seguinte situação: 40% das partículas em um estado e 60% em outro?

Para explorar este assunto, considere os átomos de prata provenientes de um forno. Se não fizéssemos uma medida do tipo SG, cada átomo estaria em um estado e de forma geral cada estado é do tipo: $|\alpha\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle$. Será $|\alpha\rangle$ a representação correta da situação?

Não! Este estado representa apenas um dos possíveis, e de fato representa o spin polarizado em uma direção $\mathbf{n}$. Para ver isso, considere o autoestado de $\sigma.\mathbf{n}$ dado por: $e^{\frac{-i\alpha}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$. Isso define C_+ e C_- por $\begin{cases} C_+ = e^{\frac{-i\alpha}{2}}\cos\frac{\beta}{2} \\ C_- = e^{\frac{i\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2} \end{cases}$

Ou seja, o ket genérico representa um átomo com uma certa orientação (em um experimento SG naquela direção, todos que estivessem neste estado passariam sem alteração do estado). A situação também não pode ser representada por uma simples combinação de estados. Isto daria um outro estado que apenas corresponderia à uma nova direção $\mathbf{n}'$.

Ensembles Misturados e Puros

Para tentar descrever um coletivo de átomos com spins orientados de forma aleatória, introduzimos o conceito de população fracional ou peso de probabilidade ω_i

Um "ensemble" de átomos de prata com orientações de spin aleatórias. Alguns exemplos:

$$\begin{cases} 1)\ \omega_+ = 0,5 \quad \omega_- = 0,5 \\ \quad \text{com } 50\% \text{ em } |+\rangle \quad \text{e} \quad 50\% \text{ em } |-\rangle \\ \\ 2)\ \omega_1 = 0,3 \quad \omega_2 = 0,7 \\ \quad \text{com } 30\% \text{ em } |S_x,+\rangle \text{ e } 70\% \text{ em } |S_y,-\rangle \\ \\ 3)\ \omega_1 = 0,25 \quad \omega_2 = 0,65 \quad \omega_3 = 0,1 \\ \quad \text{com } 25\% \text{ em } |S_y,-\rangle \text{ e } 65\% \text{ em } |S_z,-\rangle \text{ e } 10\% \text{ em } |S_x,+\rangle \\ \\ 4)\ \omega_1 = 0,4 \quad \omega_2 = 0,6 \\ \quad \text{com } 40\% \text{ em } |\mathbf{S.n_1},+\rangle \text{ e } 60\% \text{ em } |\mathbf{S.n_2},-\rangle \\ \quad \text{onde } \mathbf{n_1} \text{ e } \mathbf{n_2} \text{ são direções quaisquer.} \end{cases}$$

O importante é não confundir, por exemplo, o caso 1 com $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

Ensembles Misturados e Puros

Não confunda w_+ e w_- com $|C_+|^2$ e $|C_-|^2$. Ensemble completamente aleatório é dito despolarizado. Ensemble puro é dito polarizado.

No $\begin{cases} \text{1) Despolarizado, se colocarmos um experimento de SG,} \\ \quad \text{obteremos sempre } 1/2 \text{ a } 1/2 \text{ entre as populações.} \\ \\ \text{2) No polarizado as intensidades são } \cos^2(\beta/2) \text{ e } \sin^2(\beta/2). \end{cases}$

Ensemble misturado: $\begin{cases} 70\% \text{ caracterizados por } |\alpha\rangle \\ 30\% \text{ caracterizados por } |\beta\rangle \end{cases}$

Isto não significa que o estado é: $\sqrt{0,7}|\alpha\rangle + \sqrt{0,3}|\beta\rangle$.

E sim, que $\begin{cases} 70\% \text{ das partículas estão no estado } |\alpha\rangle \\ 30\% \text{ das partículas estão no estado } |\beta\rangle \end{cases}$

Como já vimos $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ não precisam ser ortogonais. Poderíamos ter $\begin{cases} 70\% \text{ das partículas estão no estado } |S_x,+\rangle \\ 30\% \text{ das partículas estão no estado } |S_z,-\rangle \end{cases}$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

$$\text{Ensemble misturado} \begin{cases} \omega_1 \to |\alpha^{(1)}\rangle \\ \omega_2 \to |\alpha^{(2)}\rangle \\ \vdots \to \vdots \\ \omega_i \to |\alpha^{(i)}\rangle \end{cases} \quad \text{c/} \sum_i \omega_i = 1$$

soma≠dimensão do espaço
ver exemplo 3 do slide 2
soma corre até 3 e N=2

Quanto valeria o valor médio de uma observável A em um dado ensemble?

Que tal $$[A] = \sum_i \omega_i \langle\alpha^{(i)}|A|\alpha^{(i)}\rangle$$

$$\text{onde} \begin{cases} \text{a soma em } i \text{ corre sobre as possibilidades existentes.} \\ \omega_i \to \text{ população fracional de partículas que estão em } |\alpha^{(i)}\rangle. \\ \langle\alpha^{(i)}|A|\alpha^{(i)}\rangle \to \text{ valor médio para medida de } A \text{ para partículas em } |\alpha^{(i)}\rangle. \end{cases}$$

Note que

$$[A] = \sum_i \omega_i \langle\alpha^{(i)}|A|\alpha^{(i)}\rangle = \sum_i \omega_i \langle\alpha^{(i)}|A\mathbb{1}|\alpha^{(i)}\rangle = \sum_i \omega_i \langle\alpha^{(i)}|A(\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|)|\alpha^{(i)}\rangle$$

Ou seja

$$[A] = \sum_i \sum_{a'} \omega_i \langle\alpha^{(i)}|a'\rangle\langle a'|\alpha^{(i)}\rangle a' = \sum_i \sum_{a'} \omega_i \underbrace{|\langle a'|\alpha^{(i)}\rangle|^2}_{\substack{\text{probabilidade de} \\ \text{encontrar } a' \text{ se} \\ \text{o estado é } |\alpha^{(i)}\rangle}} a'$$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Note também que, se usássemos o $\mathbb{1}$ feito de autokets de B, teríamos:

$$[A] = \sum_i \omega_i \langle\alpha^{(i)}|\mathbb{1}A\mathbb{1}|\alpha^{(i)}\rangle = \sum_i \omega_i \langle\alpha^{(i)}|(\sum_{b'}|b'\rangle\langle b'|)A(\sum_{b''}|b''\rangle\langle b''|)|\alpha^{(i)}\rangle$$

que pode ser reescrito por: $[A] = \sum_{b'}\sum_{b''}\left(\sum_i \omega_i \langle b''|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b'\rangle\right)\langle b'|A|b''\rangle$

o que permite definir $\boxed{\rho \equiv \sum_i \omega_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|}$ *o operador densidade.*

Na representação $\{|b'\rangle\}$ teremos $[A] = \sum_{b'}\sum_{b''}\langle b''|\rho|b'\rangle\langle b'|A|b''\rangle$ ou seja

$$[A] = \sum_{b''}\langle b''|\rho A|b''\rangle = \mathrm{Tr}\{\rho A\}$$

Lembre que o traço não depende da representação. Isso será útil.

Algumas propriedades de ρ
$$\begin{cases} \rho^\dagger = \rho \\ \\ \mathrm{Tr}\{\rho\} = \sum_{b'}\langle b'|\left(\sum_i \omega_i|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|\right)|b'\rangle = \\ \qquad = \sum_i \omega_i\langle\alpha^{(i)}|\left(\sum_{b'}|b'\rangle\langle b'|\right)|\alpha^{(i)}\rangle = \\ \qquad = \sum_i \omega_i\langle\alpha^{(i)}|\alpha^{(i)}\rangle = \sum_i \omega_i = 1 \end{cases}$$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Note que $\rho = \begin{pmatrix} \sum_i \underbrace{\omega_i \langle b_1|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b_1\rangle}_{\#\ \text{real}} & \sum_i \underbrace{\omega_i \langle b_1|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b_2\rangle}_{c\,=\,\#\ \text{complexo}} \\ \sum_i \underbrace{\omega_i \langle b_2|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b_1\rangle}_{c^*\,=\,\#\ \text{complexo}} & \sum_i \underbrace{\omega_i \langle b_2|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b_2\rangle}_{\#\ \text{real}} \end{pmatrix}$

$\therefore$ Para um sistema de 2 níveis, precisamos de 4 variáveis reais para definir ρ. A condição de normalização implica que apenas três sejam variáveis independentes. Para o caso em questão, conhecer $[S_x]$, $[S_y]$ e $[S_z]$ é suficiente para construir o operador densidade. Para ver isso, considere:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad \text{c/}$$

$$\begin{cases} \text{Tr}\{\rho\} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \\ \text{Tr}\{\rho S_x\} = [S_x] = \frac{\hbar}{2}\text{Tr}\begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{11} \\ \rho_{22} & \rho_{21} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(\rho_{12} + \rho_{21}) = \frac{\hbar}{2}(\rho_{12} + \rho_{12}^*) = \hbar\text{Re}(\rho_{12}) \\ \text{e (mostre que): } [S_y] = -\hbar\text{Im}(\rho_{12}) \text{ e } [S_z] = \frac{\hbar}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}). \end{cases}$$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Resolvendo as equações do slide anterior para os elementos de ρ,

$$\text{temos} \begin{cases} \rho_{11} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\hbar}[S_z]\right) & \rho_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\hbar}[S_z]\right) \\ \\ \mathrm{Re}(\rho_{12}) = \frac{1}{\hbar}[S_x] & \mathrm{Im}(\rho_{12}) = -\frac{1}{\hbar}[S_y] \end{cases}$$

Três números caracterizam o ensemble: Isso sugere que $\exists$ muitas formas de se combinar ensembles puros para obter o ensemble em questão.

Um ensemble puro é caracterizado por $\omega_i = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq n & |\alpha^{(i)}\rangle \\ 1 \text{ se } i = n & |\alpha^{(n)}\rangle \end{cases}$

Neste caso $\rho = |\alpha^{(n)}\rangle\langle\alpha^{(n)}|$ (sem a soma). Note que $\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ \rho^2 - \rho = \rho(\rho - 1) = 0 \\ \mathrm{Tr}(\rho^2) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1 \end{cases}$

Considere uma base de kets $\{|k\rangle\}$ tal que $\rho|k\rangle = k|k\rangle$. Da equação $\rho(\rho-1) = 0$ temos $\rho \sum_k |k\rangle\langle k|(\rho - 1) = 0 \to \sum_k k|k\rangle\langle k|(k-1) = 0$ e como

$$|k\rangle\langle k| \neq 0 \ \therefore \ \sum_k k(k-1)|k\rangle\langle k| = 0 \to k(k-1) = 0 \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ k = 1 \end{cases}$$

Como $\mathrm{Tr}(\rho) = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\textit{só um deles é } 1. \textit{ O resto é } 0.}$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Assim, para um ensemble puro, sua representação matricial na base de autokets é dada por:

Zeros e um 1 na diagonal

$$\rho = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}$$

$$\text{duas propriedades} \begin{cases} 1)\ \mathrm{Tr}(\rho^2) \text{ é máximo quando o ensemble é puro} \\ 2)\ \text{p/ ensembles misturados } \mathrm{Tr}(\rho^2) \text{ é positivo e menor que } 1 \end{cases}$$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Dado um operador densidade, como construir a matriz densidade correspondente em uma base específica?

$$|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| = \sum_{b'b''} |b'\rangle \underbrace{\langle b'|\alpha^{(i)}\rangle}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{coluna}}} \underbrace{\langle\alpha^{(i)}|b''\rangle}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{linha}}} \langle b''|$$

$$\langle b'|\rho|b''\rangle = \sum_i \omega_i \langle b'|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b''\rangle$$

Exemplo 1) Feixe completamente polarizado com S_z+

$$\rho = |+\rangle\langle+| \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2) Feixe completamente polarizado com $S_x\pm$

$$\rho = |S_x;\pm\rangle\langle S_x;\pm| = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle+| \pm \langle-|) \doteq$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Exemplo 3) 50% spin para baixo e 50% spin para cima

$$\rho = \frac{1}{2}|S_z;+\rangle\langle S_z;+| + \frac{1}{2}|S_z;-\rangle\langle S_z;-| \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Note que se tivéssemos feito 50% spin para cima em x e 50% spin para baixo em x, teríamos a mesma coisa, pois

$$\rho = \frac{1}{2}|S_x;+\rangle\langle S_x;+| + \frac{1}{2}|S_x;-\rangle\langle S_x;-| =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ver slide 9

Note que $\rho S_x = \frac{1}{2}S_x;\ \rho S_y = \frac{1}{2}S_y;\ \rho S_z = \frac{1}{2}S_z$ e

$\therefore \mathrm{Tr}(\rho S_x) = \mathrm{Tr}(\rho S_y) = \mathrm{Tr}(\rho S_z) = 0 \rightarrow [\mathbf{S}] = 0$ valor médio de $\mathbf{S}$ é zero.

Esperado, pois hipótese é de feixe de spins aleatórios.

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Exemplo 4) feixe parcialmente polarizado: 75% de $S_z +$ e 25% de S_x+

$$\omega(S_z+) = 0,75 \text{ e } \omega(S_x+) = 0,25 \text{ e } \therefore \; \rho = \frac{3}{4}|S_z;+\rangle\langle S_z;+| + \frac{1}{4}|S_x;+\rangle\langle S_x;+| \doteq$$

$$\doteq \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \rho = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Assim $[S_x] = \; \mathrm{Tr}(\rho S_x) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{8}$

De forma similar, pode-se obter $\begin{cases} [S_y] = 0 \\ [S_z] = \frac{3\hbar}{8} \end{cases}$

Evolução temporal dos Ensembles

Suponha conhecido $\rho(t_0) = \sum_i \omega_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|$. Se o ensemble for deixado sem perturbação, a população fracional, ω_i não mudará. Esperamos que a evolução temporal de ρ seja governada pela evolução dos diversos $|\alpha^{(i)}\rangle$. Sabemos que $|\alpha^{(i)}, t_0\rangle$ é levado para $|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$ resolvendo a equação:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle = H|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$$

Assim, escreva: $i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_i \omega_i|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|\Big) = i\hbar\sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial t}\Big(|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|\Big) =$

$$= i\hbar\sum_i \omega_i\Big(\frac{\partial}{\partial t}|\alpha^{(i)}\rangle\Big)\Big(\langle\alpha^{(i)}|\Big) + i\hbar\sum_i \omega_i\Big(|\alpha^{(i)}\rangle\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha^{(i)}|\Big) =$$

$$= H\sum_i \omega_i|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| - \sum_i \omega_i|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|H = H\rho - \rho H = -[\rho, H].$$ Ou seja,

a equação que governa o futuro de ρ tem o sinal trocado em relação à equação que governa o futuro das observáveis de Heisenberg, e é dada por:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = -[\rho, H]}$$ ($\exists$ um análogo clássico: equação de Liouville)

Não se perturbem com o sinal, ρ não é uma observável dinâmica no enfoque de Heisenberg. E, de fato, ρ foi construído com os kets de Schrödinger.

Generalização para o contínuo

Como ficaria o valor médio de uma observável A na representação das coordenadas?

$$[A] = \mathrm{Tr}(\rho A) = \int d^3x'' \langle x''|\rho A|x''\rangle = \int d^3x'' \int d^3x' \langle x''|\rho|x'\rangle\langle x'|A|x''\rangle$$

onde $\langle x''|\rho|x'\rangle = \sum_i \omega_i \langle x''|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|x'\rangle = \sum_i \omega_i \psi_i(x'')\psi_i^*(x')$. Note que

$\langle x'|\rho|x'\rangle = \sum_i \omega_i |\psi_i(x')|^2$ e que um mesmo ensemble pode ser escrito,

$$\text{como:} \begin{cases} \sum \ \text{ondas Planas} \\ \sum \ \text{pacotes gaussianos} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Conexão entre o formalismo de operador densidade e a Mecânica Estatística

Para um ensemble completamente aleatório (ECA), temos:

$$\rho = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma matriz $N \times N$ igual à $\frac{\mathit{1}}{N}$, onde $\mathit{1}$ é a matriz unidade $N \times N$. Note que isso vem da definição de ECA, pois pressupomos que neste caso, podemos p/ $\forall$ representação ter: $\rho = \frac{1}{N}|a_1\rangle\langle a_1| + \dots \frac{1}{N}|a_N\rangle\langle a_N| = \frac{\mathit{1}}{N}$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Para um ensemble polarizado, temos:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma matriz $N \times N$ com apenas um elemento diferente de zero e igual à um na diagonal. Note que isso vem da proposta que:

$$\rho = |a_n\rangle\langle a_n| \rightarrow \text{ na base que diagonaliza } \rho.$$

Exploraremos uma quantidade que diferencia estas duas situações:

$$\sigma = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho). \text{ Esquisito? Faça na base que diagonaliza } \rho.$$

Assunto da próxima aula