# Base de kets e representações matriciais

Começaremos estudando os autokets de uma observável (representada por um operador Hermiteano A).

**Teorema** : Os autovalores de um operador Hermiteano A são reais; os autokets de A com autovalores distintos são ortogonais.

*Demonstração:* Lembre que $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ e que $A$ é Hermiteano, e portanto $\langle a''|A = \langle a''|a''^*$, onde $a',\ a'', \ldots$ são autovalores de $A$. Multiplicando a primeira equação pela esquerda por $\langle a''|$ e a segunda equação por $|a'\rangle$ pela direita e subtraindo uma da outra, temos

$$(a' - a''^*)\langle a''|a'\rangle = 0$$

Um produto resulta em zero, se um dos fatores é zero (ou ambos). Tomemos

$$\text{dois casos} \begin{cases} (1)\ a' = a'' \rightarrow \langle a'|a'\rangle \neq 0 \rightarrow a' = a'^* \text{ e, } \therefore \text{ real.} \\ \\ (2)\ a' \neq a'' \rightarrow a' \neq a''^* \rightarrow \langle a''|a'\rangle = 0 \text{ e, } \therefore \text{ortogonais.} \end{cases}$$

É possível construir um conjunto ortonormal de kets $\langle a''|a'\rangle = \delta_{a',a''}$

*Este conjunto, por hipótese, é completo*

# Autokets como Base de kets

Escreva $\boxed{|\alpha >= \sum_{a'} c_{a'} |a' >}$

Multiplique pela esquerda por $\langle a''|$ e obtenha $c_{a''} = \langle a''|\alpha\rangle$.

Assim, $|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$, o que nos leva à $\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = \mathbb{1}$

Análogo à expansão de um vetor $\vec{V} = \sum_i \hat{e}_i(\hat{e}_i.\vec{V})$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha| \underbrace{\left(\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\right)}_{\mathbb{1}} |\alpha\rangle = \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

Relação de completeza

Se $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \rightarrow \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{a'} |c_{a'}|^2 = 1$

Operador de projeção

$(|a'\rangle\langle a'|).|\alpha\rangle = |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = c_{a'}|a'\rangle$. Se $\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|$ temos $\sum_{a'} \Lambda_{a'} = \mathbb{1}$

$\Lambda_{a'}$ *seleciona a porção de* $|\alpha\rangle$ *na direção de* $|a'\rangle$

# Representações matriciais

Um operador $X$ pode ser escrito na forma $X = \mathbb{1}X\mathbb{1} = \sum_{a''}\sum_{a'} |a''\rangle\langle a''|X|a'\rangle\langle a'|$

Pense em $\langle a''|X|a'\rangle$ como elemento de uma matriz representada por:

*linha e coluna*

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

É fácil mostrar que $X^\dagger \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle^* & \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle^* & \dots \\ \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle^* & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, pois vimos

que $\langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X^\dagger|a''\rangle^*$ $\Bigg\{$ Ou seja, para obter a matriz do conjugado Hermiteano tome a matriz transposta e o complexo conjugado de todos seus elementos.

*Se $X$ é Hermiteano temos que* $\langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X^\dagger|a''\rangle^* = \langle a'|X|a''\rangle^*$

# Representações matriciais

- $\boxed{Z = XY}$

O elemento de matriz $\langle a''|Z|a'\rangle = \langle a''|X\mathbb{1}Y|a'\rangle = \sum_{a'''}\langle a''|X|a'''\rangle\langle a'''|Y|a'\rangle$

operador unidade

- $\boxed{|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle}$

$$\langle a'|\gamma\rangle = \langle a'|X|\alpha\rangle = \langle a'|X.\mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_{a''}\langle a'|X|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle$$

Isto sugere

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(3)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad |\gamma\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\gamma\rangle \\ \langle a^{(2)}|\gamma\rangle \\ \langle a^{(3)}|\gamma\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- $\boxed{\langle\gamma| = \langle\alpha|X}$

operador unidade

$\langle\gamma|a'\rangle = \langle\alpha|X|a'\rangle = \langle\alpha|\mathbb{1}.X|a'\rangle = \sum_{a''}\langle\alpha|a''\rangle\langle a''|X|a'\rangle$ o que sugere

$$\langle\alpha| \doteq (\langle\alpha|a^{(1)}\rangle\ \langle\alpha|a^{(2)}\rangle\ \langle\alpha|a^{(3)}\rangle\ \ldots\ ) = (\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^*\ \ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^*\ \ \langle a^{(3)}|\alpha\rangle^*\ \ \ldots\ )$$

$$\langle\gamma| \doteq (\langle\gamma|a^{(1)}\rangle\ \langle\gamma|a^{(2)}\rangle\ \langle\gamma|a^{(3)}\rangle\ \ldots\ ) = (\langle a^{(1)}|\gamma\rangle^*\ \ \langle a^{(2)}|\gamma\rangle^*\ \ \langle a^{(3)}|\gamma\rangle^*\ \ \ldots\ )$$

# Representações matriciais

Assim, nesta representação matricial

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\beta|\mathbb{1}|\alpha\rangle = \langle\beta|(\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|)|\alpha\rangle = \sum_{a'}\langle\beta|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix}\langle\beta|a^{(1)}\rangle & \langle\beta|a^{(2)}\rangle & \langle\beta|a^{(3)}\rangle & \dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(3)}|\alpha\rangle \\ \vdots\end{pmatrix}$$

Use o operador unidade

e $\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\beta|\mathbb{1}.X.\mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_{a'}\sum_{a''}\langle\beta|a'\rangle\langle a'|X|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle$ fica representado por

$$\begin{pmatrix}\langle\beta|a^{(1)}\rangle & \langle\beta|a^{(2)}\rangle & \langle\beta|a^{(3)}\rangle & \dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(3)}|\alpha\rangle \\ \vdots\end{pmatrix}$$

# Representações matriciais

A representação matricial do produto externo fica

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle \\ \langle a^{(3)}|\beta\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \left( \langle\alpha|a^{(1)}\rangle \quad \langle\alpha|a^{(2)}\rangle \quad \langle\alpha|a^{(3)}\rangle \quad \ldots \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(2)}\rangle & \ldots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(2)}\rangle & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

A representação matricial de um operador na sua base de autokets fica

$$A = 1\!\!1 . A . 1\!\!1 = \sum_{a',a''} |a'\rangle\langle a'|A|a''\rangle\langle a''| = \sum_{a',a''} |a'\rangle a'' \delta_{a'a''}\langle a''| =$$

$$= \sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'| = \sum_{a'} a'\Lambda_{a'}$$

$$\langle a'|A|a''\rangle = a''\langle a'|a''\rangle = a''\delta_{a',a''}$$

operador unidade

Operador
de projeção

# Representações matriciais: Sistemas de Spin ½

$|S_z;\pm\rangle \rightarrow |\pm\rangle$para economizar

Como fica o operador unidade (também chamado de operador identidade)?

$$\mathbb{1} = (|+\rangle\langle+|) + (|-\rangle\langle-|)$$

E o $S_z$? $\quad S_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle-|$

Note que $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

Uma definição útil $S_+ \equiv \hbar|+\rangle\langle-|$ e $S_- \equiv \hbar|-\rangle\langle+|$ mais tarde $S_\pm = S_x \pm iS_y$

Note que $\underbrace{S_+|+\rangle}\, = \hbar|+\rangle\langle-|+\rangle = 0$ e que $S_+|-\rangle = \overbrace{\hbar|+\rangle\langle-|-\rangle = \hbar|+\rangle}^{\text{levantador}}$

**Quando não dá para levantar, a operação dá zero**

Note que $\underbrace{S_-|-\rangle}\, = \hbar|-\rangle\langle+|-\rangle = 0$ e que $S_-|+\rangle = \overbrace{\hbar|-\rangle\langle+|+\rangle = \hbar|-\rangle}^{\text{abaixador}}$

**Quando não dá abaixar, a operação dá zero**

Representações matriciais $\qquad |+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$$S_z \doteq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ S_+ \doteq \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ S_- \doteq \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Medidas, observáveis e relações de incerteza

Antes da medida da observável *A*, podemos pensar que o sistema pode ser representado por

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

quando a medida é feita, tudo se passa como se o sistema fosse atirado (colapsasse) em um dos autokets de *A* (aquele correspondente ao autovalor *a'*)

$$|\alpha\rangle \stackrel{medida}{\longrightarrow} |a'\rangle$$

Uma medida normalmente muda o estado do sistema, exceto

$$|a'\rangle \stackrel{medida}{\longrightarrow} |a'\rangle$$

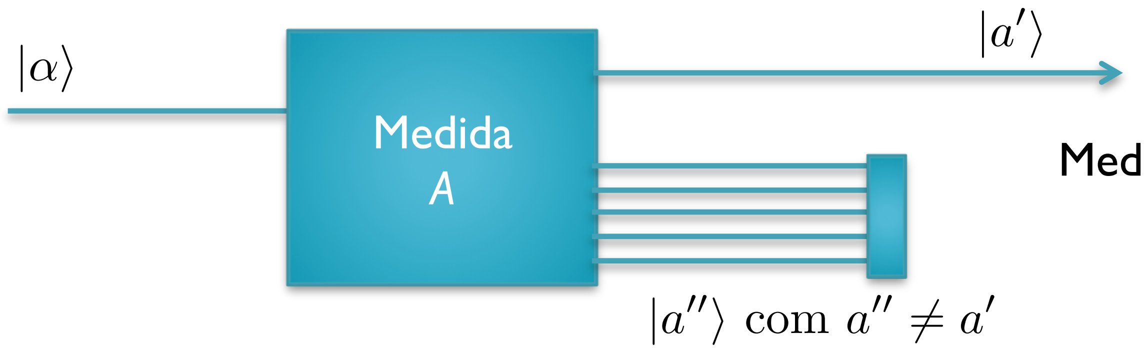
Note, entretanto, que antes da medida não sabemos qual dos *a'* será obtido.

Postulamos que a probabilidade de encontrar *a'* é $|c_{a'}|^2 = |\langle a'|\alpha\rangle|^2$

normalizado

# Medidas, observáveis e relações de incerteza

Na vida real para verificarmos que a probabilidade de encontrar $a'$ está correta, preparamos muito sistemas em $|a'\rangle$ e medimos até verificar que a distribuição estatística das medidas está correta. Uma coleção de sistemas, todos preparados no mesmo estado $|\alpha\rangle$, é chamado de ensemble puro. Um feixe de átomos de prata que passaram por um experimento de Stern-Gerlach $SG_{\hat{\mathbf{z}}}$ é um ensemble puro caracterizado pelo estado $|S_z;+\rangle$.




Medida seletiva

Em uma nova medida, qual a probabilidade de medirmos $A$ e obtermos $a'$? e de obtermos $a'' \neq a'$?

$|\langle a'|a'\rangle|^2 = 1$ $\qquad$ $|\langle a''|a'\rangle|^2 = 0$

# Valor esperado de $A$ com respeito ao estado $|\alpha\rangle$

Valor esperado é definido por $\langle A\rangle = \langle\alpha|A|\alpha\rangle = \langle A\rangle_\alpha$ (notação comum)

$$\langle A\rangle = \langle\alpha|\mathbb{1}.A.\mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_{a,a''}\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|A|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle = \sum_{a'} a'|\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

$$\langle a'|A|a''\rangle = a''\langle a'|a''\rangle = a''\delta_{a',a''}$$

Uma média ponderada. Nossa noção intuitiva de um valor médio medido

Cuidado
- Valor médio pode dar qualquer coisa entre o menor e o maior valor das medidas efetuadas
- O valor de uma medida é um dos autovalores

# Um pouco mais de Sistemas de Spin ½

Será que temos o suficiente para definir $|S_x;\pm\rangle$ e $|S_y;\pm\rangle$? Veremos que sim e até para definir os operadores.

Na Experiência de Stern-Gerlach quando tomamos um feixe $|S_x;+\rangle$ e o passamos por $SG_z$, o feixe dividiu-se igualmente em $\underbrace{|S_z;+\rangle \text{ e } |S_z;-\rangle}_{|\pm\rangle}$, de tal forma

notação simplificada

$$|\langle+|S_x;+\rangle| = |\langle-|S_x;+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ pois } |\langle+|S_x;+\rangle|^2 = |\langle-|S_x;+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } |S_x;+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$$

Nada mudaria se multiplicássemos por uma fase global (escolhemos uma para ter o coeficiente do $|+\rangle$ real).

$$\text{De forma semelhante, obtemos } |S_x;-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1'}|-\rangle$$

$$\text{Como } \langle S_x;-|S_x;+\rangle = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{i(\delta_1-\delta_1')} = 0 \longrightarrow e^{i\underbrace{(\delta_1-\delta_1')}_{\pi}} = -1$$

$$\text{Assim, } |S_x;-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$$

# Um pouco mais de Sistemas de Spin ½

De $|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$, obtemos

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|S_x;+\rangle\langle S_x;+| - |S_x;-\rangle\langle S_x;-|) = \underbrace{\frac{\hbar}{2}(e^{-\delta_1}|+\rangle\langle -| + e^{\delta_1}|-\rangle\langle +|)}$$

$$A = \sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'| = \sum_{a'} a'\Lambda_{a'}$$

note que $S_x^\dagger = S_x$, como deveria ser

De forma similar, podemos construir $|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_2}|-\rangle$, e

$$S_y = \frac{\hbar}{2}(|S_y;+\rangle\langle S_y;+| - |S_y;-\rangle\langle S_y;-|) = \frac{\hbar}{2}(e^{-\delta_2}|+\rangle\langle -| + e^{\delta_2}|-\rangle\langle +|)$$

Será que dá para definir $\delta_1$ e $\delta_2$? Que tal $SG_{\hat{x}}$ seguido de $SG_{\hat{y}}$?

$$|\langle S_y;\pm|S_x;+\rangle| = |\langle S_y;\pm|S_x;-\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{2}|1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mas $|1 \pm e^{i\phi}| = |\pm 2e^{i\frac{\phi}{2}}\frac{(e^{i\frac{\phi}{2}} \pm e^{-i\frac{\phi}{2}})}{2}|$ → $\cos\frac{\phi}{2}$, $\sin\frac{\phi}{2}$ $\longrightarrow \phi = \delta_1 - \delta_2 = \mp\frac{\pi}{2}$

$\delta_1 = 0$ faz elementos de matriz $S_x$ reais e $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$ faz eixos x,y,z convencionais

# Um pouco mais de Sistemas de Spin ½

Resumindo:

$$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}(-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|)$$

Mostre que: $S_\pm = S_x \pm iS_y$; $\quad [S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$

onde $[A, B] = AB - BA$ e $\{A, B\} = AB + BA$

$\epsilon_{ijk} = 1$ para permutação cíclica e $-1$ para permutação não cíclica

Mostre também que: $S^2 = \vec{S}.\vec{S} \equiv S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = (\frac{3}{4})\hbar^2$ e que $[S^2, S_i] = 0$