

Adição de Momento Angular

Começamos com dois exemplos $\begin{cases} a) \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \\ b) \mathbf{J} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \end{cases}$

Em ambos os casos, é preciso primeiro “expandir” o espaço de atuação dos operadores. No primeiro caso, lembre que \mathbf{L} atua no R^3 (de fato duas das três dimensões) e \mathbf{S} atua em um espaço de duas dimensões (discreto e com apenas dois valores possíveis - um em cada dimensão).

Exemplo a) Cria-se um novo espaço por meio de todos os produtos possíveis

do tipo: $|\mathbf{x}', \pm\rangle = |\mathbf{x}'\rangle \otimes |\pm\rangle$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Note que no } R^3, L^2 \text{ e } L_z \text{ têm espectros} \\ \text{discretos e } \mathbf{S} \text{ tem um contínuo de orientações.} \end{array} \right.$

Neste espaço, o operador que roda continua com a forma: $\exp\left(-i\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi}{\hbar}\right)$,

mas com $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, que deve ser lido como $\mathbf{J} = \mathbf{L} \otimes \mathbb{1}_S + \mathbb{1}_L \otimes \mathbf{S}$, onde

$\mathbf{J}|\mathbf{x}', \pm\rangle = \mathbf{L}|\mathbf{x}'\rangle \otimes \mathbb{1}_S|\pm\rangle + \mathbb{1}_L|\mathbf{x}'\rangle \otimes \mathbf{S}|\pm\rangle$ e $\begin{cases} \mathbb{1}_S : \text{ unidade do espaço de spin} \\ \mathbb{1}_L : \text{ unidade do espaço de} \\ \text{momento angular orbital} \end{cases}$

Operadores que atuam em subespaços diferentes comutam. Especificamente:

$$[\mathbf{L}, \mathbf{S}] = 0.$$

Isso permitirá construir autokets simultâneos de S^2, S_z, L^2 e L_z .

Adição de Momento Angular

A rotação de kets neste espaço expandido pode ser definida por:

$$D(R) = D^{\text{orb}}(R) \otimes D^{\text{spin}}(R) \text{ e } \therefore$$

$$D(R) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{L}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) \otimes \exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right)$$

A função de onda de uma partícula com spin é:

$$\langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \psi_{\pm}(\mathbf{x}') \doteq \begin{pmatrix} \psi_{+}(\mathbf{x}') \\ \psi_{-}(\mathbf{x}') \end{pmatrix}$$

base de $|\mathbf{x}'\rangle \otimes |\pm\rangle$ pode ser trocada por: $|n, \ell, m\rangle \otimes |\pm\rangle$,

autokets de H, L^2, L_z, S^2, S_z ou como veremos mais tarde, por:

$|n, \ell, s; jm\rangle$ autokets de H, L^2, S^2, J^2, J_z

Adição de Momento Angular

Exemplo b) Cria-se um novo espaço por meio de todos os produtos do tipo $|\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$. O operador que roda é da forma: $\exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\phi}{\hbar}\right)$, com $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \otimes \mathbb{1}_S + \mathbb{1}_S \otimes \mathbf{S}_2$

e as seguintes propriedades ($\forall i, j = x, y, z$):

$$\begin{cases} [S_{1i}, S_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_{1k} \\ [S_{2i}, S_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_{2k} \\ [S_{1i}, S_{2j}] = 0 \end{cases}$$

e $\therefore [S_x, S_y] = [S_{1x} + S_{2x}, S_{1y} + S_{2y}] = i\hbar(S_{1z} + S_{2z}) = i\hbar S_z$, etc.

Os autovalores dos seguintes operadores são:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 \implies s(s+1)\hbar^2 \\ S_z = S_{1z} + S_{2z} \implies m\hbar \\ \mathbf{S}_1^2 = \mathbf{S}_2^2 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \\ S_{1z} \implies m_1\hbar \\ S_{2z} \implies m_2\hbar \end{cases}$$

Vamos achar as relações entre eles e seus valores possíveis

Adição de Momento Angular

O ket estado arbitrário de 2 spins pode ser expandido de duas (de novo) formas.

$$\text{representações} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\{m_1, m_2\}}_{S_{1z} \quad S_{2z}} \\ |++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle \\ \underbrace{\{s, m\}}_{S^2 \quad S_z} \text{(representação singleto e tripleto)} \\ |s = 1, m = \pm 1\rangle \text{ e } |s = 0, m = 0\rangle \end{array} \right.$$

Em ambas as representações temos 4 kets. Como relacioná-los?

$$\text{Que tal} \left\{ \begin{array}{l} |s = 1, m = 1\rangle = |++\rangle \text{ (dois elétrons com spin para cima)} \\ |s = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \text{ (aplique } S_- = S_{1-} + S_{2-} \text{ acima)} \\ |s = 1, m = -1\rangle = |--\rangle \text{ (aplique } S_- = S_{1-} + S_{2-} \text{ acima de novo)} \\ |s = 0, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) \text{ (exija ortogonalidade)} \end{array} \right.$$

$$\text{Ex: } S_- |s = 1, m = 1\rangle = \sqrt{(s + m)(s - m + 1)} |s = 1, m = 0\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle$$

$$\begin{aligned} S_{1-} |++\rangle + S_{2-} |++\rangle &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} |-+\rangle + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} |+-\rangle \\ &= |-+\rangle + |+-\rangle \therefore |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle + |+-\rangle) \end{aligned}$$

Exercício: diagonalize S^2 na base $\{m_1, m_2\}$

Adição de Momento Angular

Considere \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2

$$\text{Sabemos que } \begin{cases} [J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k} \\ [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{2k} \\ [J_{1i}, J_{2j}] = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{J}_2 \\ [J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \end{cases}$$

A forma de somar tem início nas rotações infinitesimais que afetam ambos os sub-espacos 1 e 2, e pode ser escrita por:

$$\left(1 - \frac{i\mathbf{J}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta\phi}{\hbar}\right) \otimes \left(1 - \frac{i\mathbf{J}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta\phi}{\hbar}\right) = \left(1 - \frac{i(\mathbf{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{J}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta\phi}{\hbar}\right).$$

Isso define $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{J}_2$

Rotações finitas são representadas por:

$$D_1(R) \otimes D_1(R) = \exp\left(-\frac{i\mathbf{J}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{\hbar}\right) \otimes \exp\left(-\frac{i\mathbf{J}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{\hbar}\right)$$

A regra de comutação das componentes de \mathbf{J} indicam que se trata de momento angular e isso é fisicamente aceitável, uma vez que \mathbf{J} gera rotações do sistema global.

Teoria Formal de Adição de Momento Angular

Tudo que aprendemos até aqui continua valendo, inclusive as propriedades de \mathbf{J}_+ e \mathbf{J}_- . Como escolha de bases temos duas opções:

$$\text{A) Base de autokets de } J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z} \begin{cases} J_1^2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \\ J_2^2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \\ J_{1z} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = m_1 \hbar |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \\ J_{2z} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \end{cases}$$

$$\text{B) Base de autokets de } J_1^2, J_2^2, J^2, J_z \begin{cases} J_1^2 |j_1 j_2; jm\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1 j_2; jm\rangle \\ J_2^2 |j_1 j_2; jm\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_1 j_2; jm\rangle \\ J^2 |j_1 j_2; jm\rangle = j(j + 1)\hbar^2 |j_1 j_2; jm\rangle \\ J_z |j_1 j_2; jm\rangle = m\hbar |j_1 j_2; jm\rangle \end{cases}$$

Note, entretanto, que embora $[J^2, J_z] = 0$, temos $\begin{cases} [J^2, J_{1z}] \neq 0 \\ [J^2, J_{2z}] \neq 0 \end{cases}$

Para ver isso, use $\begin{cases} J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} \\ [J_{1z}, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{1\pm} \end{cases}$

Isto implica em J^2 não poder ser adicionado entre os operadores do tipo A e J_{1z} ou J_{2z} não poderem ser colocados entre os do tipo B.

Teoria Formal de Adição de Momento Angular

Considere uma transformação unitária que liga as duas bases

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \mathbb{1} |j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{\underbrace{m_1 m_2}} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle}_{\text{Coeficientes de Clebsch-Gordan}}$$

Não somamos
em j_1 e j_2 .
Porque?

Coeficientes de
Clebsch-Gordan

Propriedades importantes dos Clebsch-Gordan $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle$

1) os coeficientes são nulos, a menos que $m = m_1 + m_2$.

Para provar isso, observe que $(J_z - J_{1z} - J_{2z})|j_1 j_2; jm\rangle = 0$ e que

isso implica em $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | (J_z - J_{1z} - J_{2z}) | j_1 j_2; jm\rangle = 0$

e $\therefore (m - m_1 - m_2) \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle = 0$. Para que o coeficiente seja diferente de zero, é preciso que $m = m_1 + m_2$.

2) os coeficientes são nulos, a menos que $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

Neste primeiro momento, mostramos apenas que a dimensão do sub-espço descrito por $\{|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle\}$ é igual à do sub-espço $\{|j_1 j_2; jm\rangle\}$ com $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$.

Teoria Formal de Adição de Momento Angular

A dimensão N_1 de $\{|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle\}$ é $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

A dimensão N_2 de $\{|j_1 j_2; jm\rangle\}$, no referido intervalo, é

$$N_2 = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1). \text{ Considere } j_1 \geq j_2 \Rightarrow N_2 = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(2(j_1+j_2)+1 + 2(j_1-j_2)+1)}_{\text{termo médio}} \underbrace{(j_1+j_2 - (j_1-j_2)+1)}_{\text{número de termos}} =$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1) = N_1 \text{ c.q.d.}$$

$$3) \sum_{jm} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm \rangle = \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2}$$

É simples provar se considerarmos $\langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm \rangle =$
 $= \langle j_1 j_2; jm | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle^* = \langle j_1 j_2; jm | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle$ (por convenção)

$$4) \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle}_{m = m_1 + m_2} \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j' m' \rangle}_{m' = m_1 + m_2} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$m = m_1 + m_2 \quad m' = m_1 + m_2 \quad \therefore m = m'$$

Para $j' = j$ é direto, pois temos $\sum_{m_1 m_2} |\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle|^2 = 1$

Caso geral: basta inverter o primeiro termo.

Teoria Formal de Adição de Momento Angular

Alguns autores tem outras notações para estes coeficientes

1) $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$

2) $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$

3) $C_{j_1 j_2}(j m; m_1 m_2)$

4) $3 - j$ “symbol” de Wigner

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan: Fórmulas de Recorrência

Fixe j_1, j_2 e j : os coeficientes com diferentes m_1 e m_2 estão relacionados entre si por relações de recorrência. Comece por:

$$J_{\pm}|j_1 j_2; jm\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{m'_1 m'_2} |j_1 j_2; m'_1 m'_2\rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm\rangle$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j_1 j_2; jm \pm 1\rangle = \\ & = \sum_{m'_1 m'_2} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} |j_1 j_2; m'_1 \pm 1 m'_2\rangle + \right. \\ & \left. + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} |j_1 j_2; m'_1 m'_2 \pm 1\rangle \right\} \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm\rangle \end{aligned}$$

Multiplique pela esquerda por $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 |$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \pm 1\rangle = \\ & = \sum_{m'_1 m'_2} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; m'_1 \pm 1 m'_2\rangle + \right. \\ & \left. + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \pm 1\rangle \right\} \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm\rangle \\ & = \sum_{m'_1 m'_2} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} \delta_{m_1, m'_1 \pm 1} \delta_{m_2 m'_2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2, m'_2 \pm 1} \right\} \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm\rangle \end{aligned}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan: Fórmulas de Recorrência

Repetindo a última equação do slide anterior, temos

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \pm 1 \rangle = \\
 & = \sum_{m'_1 m'_2} \left\{ \sqrt{(j_1 \mp m'_1)(j_1 \pm m'_1 + 1)} \delta_{m_1, m'_1 \pm 1} \delta_{m_2 m'_2} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{(j_2 \mp m'_2)(j_2 \pm m'_2 + 1)} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2, m'_2 \pm 1} \right\} \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm \rangle = \\
 & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm (m_1 \mp 1) + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm \rangle + \\
 & + \sqrt{(j_2 \mp (m_2 \mp 1))(j_2 \pm (m_2 \mp 1) + 1)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm \rangle
 \end{aligned}$$

Desta forma gera-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \pm 1 \rangle = \\
 & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm \rangle + \\
 & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm \rangle
 \end{aligned}$$

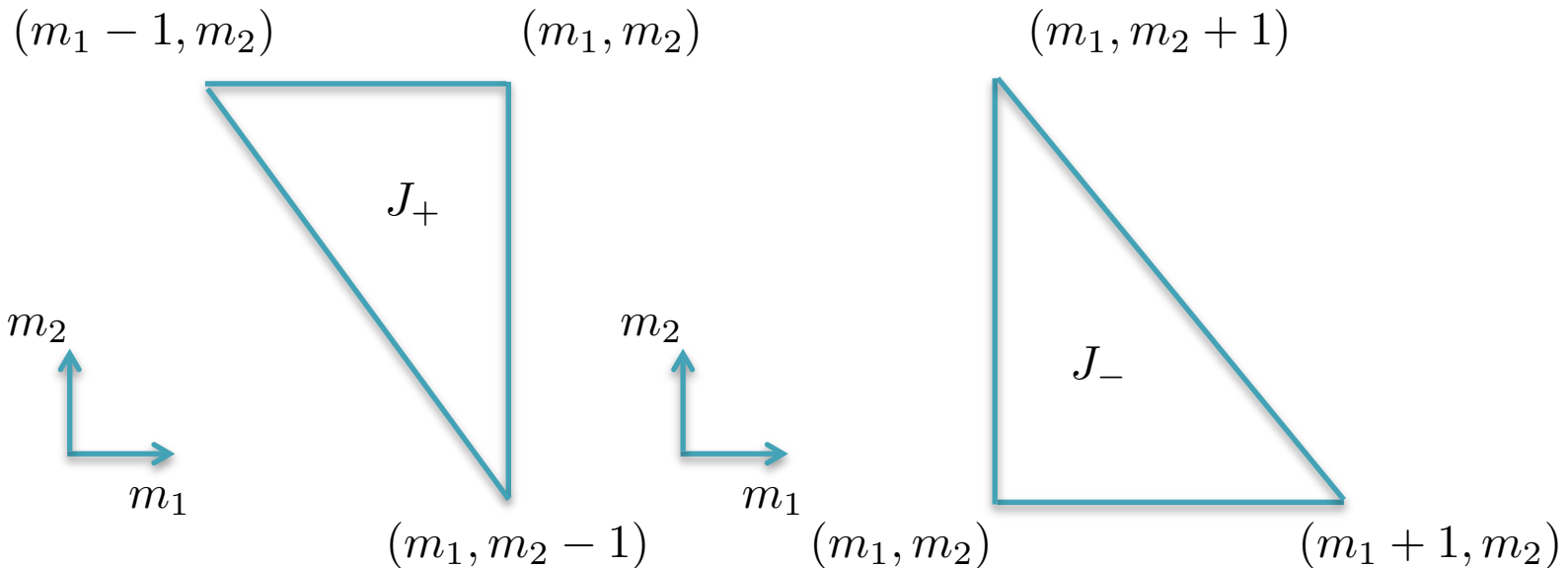
Note que os três coeficientes de Clebsch-Gordan indicam que nesta fórmula de recorrência: $m_1 + m_2 = m \pm 1$

Usando as Fórmulas de Recorrência

A fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \pm 1 \rangle = \\ & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm \rangle + \\ & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm \rangle \end{aligned}$$

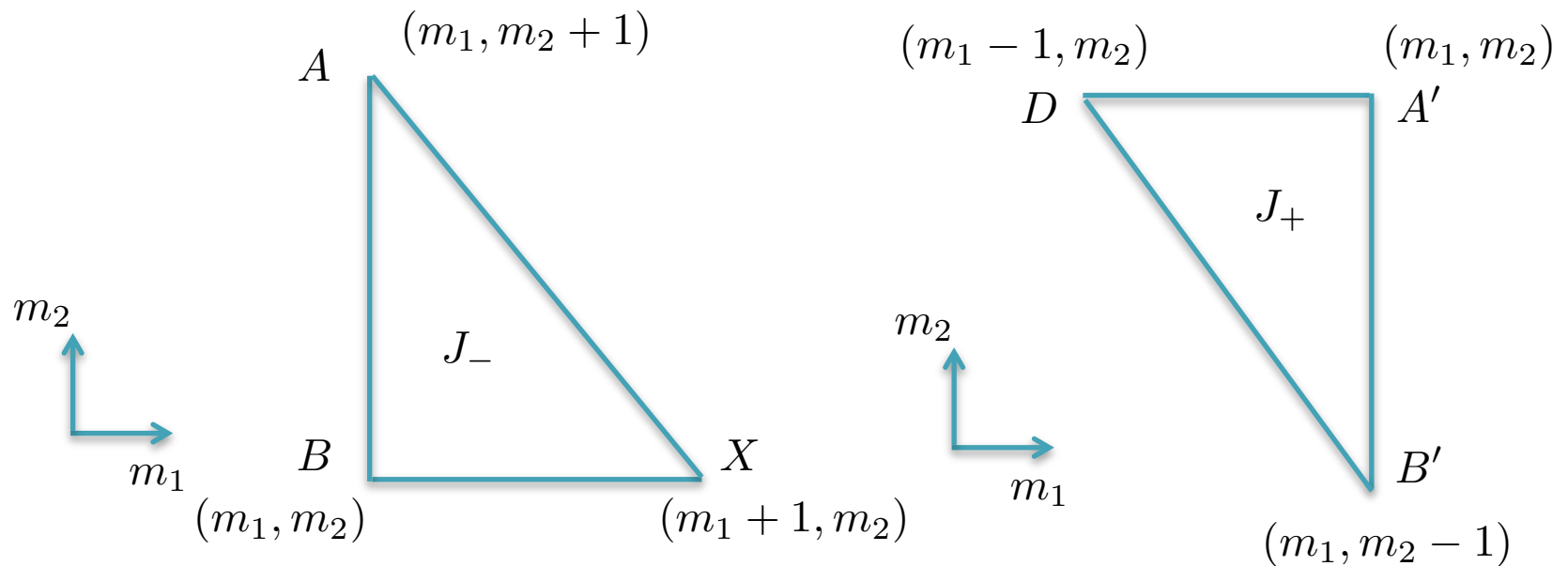
pode ser representada graficamente no plano: (m_1, m_2)



As fórmulas de recorrência definidas acima, juntamente com condições de normalização, quase determinam unicamente todos os coeficientes de Clebsch-Gordon. Quase porque certos sinais têm que ser especificados por convenção.

Usando as Fórmulas de Recorrência

como gerar coeficientes? $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Tome na figura } \begin{cases} A = (m_1, m_2 + 1) \\ B = (m_1, m_2) \\ X = (m_1 + 1, m_2) \end{cases} \\ 2) \text{ Escolha } A \text{ tal que } m_1 = j_1 \\ 3) \text{ Use } J_- \text{ para gerar } B \\ 4) \text{ Note que } X \text{ é proibido, pois } m_1 \text{ seria maior que } j_1 \end{array} \right.$



Depois, redefina $A' = A$ e $B' = B$ no gráfico de J_+ e gere D . Repita com novos triângulos (com dois vértices conhecidos) e ache todos os m_1, m_2 e m' s para j_1, j_2 e j fixos.