

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Assim, a fórmula de recorrência do slide 11 da aula passada

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \pm 1 \rangle = \\ & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm \rangle + \\ & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm \rangle, \end{aligned}$$

caso J_- (sinal inferior), para $j_1 = \ell, j_2 = s = 1/2$ e $j = \ell + 1/2$ fixos, iniciando com $m_2 = m_s = 1/2$, fica:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\ell + 1/2 + m)(\ell + 1/2 - m + 1)} \langle m_\ell, 1/2 | \ell + 1/2, m - 1 \rangle = \\ & = \sqrt{(\ell + m_\ell + 1)(\ell - m_\ell)} \langle m_\ell + 1, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle + \\ & + \sqrt{(1/2 + 1/2 + 1)(1/2 - 1/2)} \langle m_\ell, 1/2 + 1 | \ell + 1/2, m \rangle \end{aligned}$$

Com a substituição $m \Rightarrow m + 1$ temos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\ell + m + 3/2)(\ell - m + 1/2)} \langle m_\ell, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle = \\ & = \sqrt{(\ell + m_\ell + 1)(\ell - m_\ell)} \langle m_\ell + 1, 1/2 | \ell + 1/2, m + 1 \rangle \text{ com} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m = m_\ell + 1/2 \\ \text{substitua} \\ m_\ell = m - 1/2 \end{cases}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Com a nova substituição temos

$$\begin{aligned} \sqrt{(\ell + m + 3/2)(\ell - m + 1/2)} \langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle &= \\ &= \sqrt{(\ell + m + 1/2)(\ell - m + 1/2)} \langle m + 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m + 1 \rangle \end{aligned}$$

e finalmente

$$\langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle = \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{\ell + m + 3/2}} \langle m + 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m + 1 \rangle$$

Note que os dois coeficientes diferem de 1 em m . Assim podemos substituir o coeficiente da direita usando a mesma regra, isto é:

tem que parar em $\ell + 1/2$

$$\langle m + 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m + 1 \rangle = \sqrt{\frac{\ell + m + 3/2}{\ell + m + 5/2}} \langle m + 3/2, 1/2 | \ell + 1/2, \overbrace{m + 2} \rangle$$

Que tal escrevermos:

$$\langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle = \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{\ell + m + 3/2}} \sqrt{\frac{\ell + m + 3/2}{\ell + m + 5/2}} \sqrt{\frac{\ell + m + 5/2}{\ell + m + 7/2}} \dots$$

$$\dots \sqrt{\frac{\ell + (\ell - 1/2) + 1/2}{\ell + (\ell + 1/2) + 1/2}} \langle \ell, 1/2 | \ell + 1/2, \ell + 1/2 \rangle$$

$$\therefore \langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle = \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{2\ell + 1}} \langle \ell, 1/2 | \ell + 1/2, \ell + 1/2 \rangle$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Usamos:

- 1) O denominador do fator que precede o C.C.G. é igual a soma $j + m$.
- 2) O denominador à esquerda cancela com o numerador à direita.
- 3) Agora note o seguinte:

$|m_\ell = \ell, m_s = 1/2\rangle$ tem $m = \ell + 1/2$, o maior possível e precisa estar associado à $j = \ell + 1/2$ (o $j = \ell - 1/2$ seria menor que m).

$\therefore |m_\ell = \ell, m_s = 1/2\rangle \propto |j = \ell + 1/2, m = \ell + 1/2\rangle$ por convenção, são feitos iguais. Isto é $|\ell, 1/2\rangle = |\ell + 1/2, \ell + 1/2\rangle$ e $\therefore \langle \ell, 1/2 | \ell + 1/2, \ell + 1/2 \rangle = 1$

Nestas condições:

$$\langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle = \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{2\ell + 1}}$$

$$m_s = 1/2$$

Falta o $m_s = -1/2$ que obteremos em seguida.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Até aqui, encontramos:

$$\underbrace{\langle m - 1/2, 1/2 |}_{m_\ell} \underbrace{|}_{m_s} \underbrace{\ell + 1/2, m \rangle}_j = \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{2\ell + 1}}$$

e falta o coeficiente de Clebsch-Gordan associado ao $m_s = -1/2$

Para melhor entender isso, considere:

$$\begin{aligned} |\ell + 1/2, m \rangle &= \sum_{m_\ell m_s} |\ell \ 1/2; m_\ell m_s \rangle \langle \ell \ 1/2; m_\ell m_s | \ell + 1/2, m \rangle = \\ &= \sum_{m_\ell m_s} |m_\ell m_s \rangle \langle m_\ell m_s | \ell + 1/2, m \rangle = \sum_{m_\ell} |m_\ell \ 1/2 \rangle \underbrace{\langle m_\ell \ 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle}_{m_\ell + 1/2 = m} + \\ &+ \sum_{m_\ell} |m_\ell - 1/2 \rangle \underbrace{\langle m_\ell - 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle}_{m_\ell - 1/2 = m} \end{aligned}$$

$$= |m - 1/2, 1/2 \rangle \underbrace{\langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle}_{\text{temos esse}} +$$

$$+ |m + 1/2, -1/2 \rangle \underbrace{\langle m + 1/2, -1/2 | \ell + 1/2, m \rangle}_{\text{falta esse}}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Observe que a fórmula de recorrência do J_+ fornece um deles, em função de dois conhecidos:

$$\begin{aligned}
 \langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle &= \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{2\ell + 1}} \\
 \langle m + 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m + 1 \rangle &= \sqrt{\frac{\ell + (m + 1) + 1/2}{2\ell + 1}}
 \end{aligned}$$

$(m - 1/2, 1/2)$ $(m + 1/2, 1/2)$

$(m + 1/2, -1/2)$

$\langle m + 1/2, -1/2 | \ell + 1/2, m \rangle$

Da fórmula do J_+ tome: $j_1 = \ell, j_2 = 1/2, j = \ell + 1/2$ e $\begin{cases} m_1 = m + 1/2 \\ m_2 = 1/2 \end{cases}$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Isso fornece:

$$\begin{aligned} & \sqrt{[(\ell + 1/2) - m][(\ell + 1/2) + m + 1]} \langle \ell s; m + 1/2, 1/2 | \ell s; \ell + 1/2, m + 1 \rangle = \\ & = \sqrt{[(\ell - (m + 1/2) + 1)[\ell + (m + 1/2)]} \langle \ell s; m + 1/2 - 1, 1/2 | \ell s; \ell + 1/2, m \rangle + \\ & + \sqrt{[1/2 - 1/2 + 1][1/2 + 1/2]} \langle \ell s; m + 1/2, 1/2 - 1 | \ell s; \ell + 1/2, m \rangle \end{aligned}$$

Simplificando a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\ell - m + 1/2)(\ell + m + 3/2)} \langle m + 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m + 1 \rangle = \\ & = \sqrt{(\ell - m + 1/2)(\ell + m + 1/2)} \langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m \rangle + \\ & + \langle m + 1/2, -1/2 | \ell + 1/2, m \rangle \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle m + 1/2, -1/2 | \ell + 1/2, m \rangle & = \sqrt{(\ell - m + 1/2)(\ell + m + 3/2)} \sqrt{\frac{(\ell + m + 3/2)}{2\ell + 1}} + \\ & - \sqrt{(\ell - m + 1/2)(\ell + m + 1/2)} \sqrt{\frac{(\ell + m + 1/2)}{2\ell + 1}} = \\ & = (\ell + m + 3/2 - (\ell + m + 1/2)) \sqrt{\frac{(\ell - m + 1/2)}{2\ell + 1}} = \sqrt{\frac{(\ell - m + 1/2)}{2\ell + 1}} \end{aligned}$$

e finalmente, podemos, a seguir, escrever $|\ell s; \ell + 1/2, m \rangle$ na base $\{m_1, m_2\}$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Isto é: $|\ell s; \ell + 1/2, m\rangle =$

base j, m

$$= \sqrt{\frac{(\ell + m + 1/2)}{2\ell + 1}} |\ell s; \underbrace{m - 1/2, 1/2}_{\text{base } m_1, m_2}\rangle + \sqrt{\frac{(\ell - m + 1/2)}{2\ell + 1}} |\ell s; \underbrace{m + 1/2, -1/2}_{\text{base } m_1, m_2}\rangle$$

Na representação das coordenadas e linguagem de spinor, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\ell^{j=\ell+1/2, m} &= \sqrt{\frac{(\ell + m + 1/2)}{2\ell + 1}} Y_\ell^{m-1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{\frac{(\ell - m + 1/2)}{2\ell + 1}} Y_\ell^{m+1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\ell + 1}} \begin{pmatrix} \sqrt{\ell + m + 1/2} Y_\ell^{m-1/2} \\ \sqrt{\ell - m + 1/2} Y_\ell^{m+1/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}_\ell^{j=\ell+1/2, m} \text{ autofunções de } \begin{cases} L^2 \\ S^2 \\ J^2 \\ J_z, \end{cases} \quad \text{c/ autovalores } \begin{cases} \ell(\ell + 1)\hbar^2 \\ 3/4\hbar^2 \\ j(j + 1)\hbar^2 \text{ com } j = \ell + 1/2 \\ m\hbar \end{cases}$$

Mostre que também é autoestado de **L.S** (justifique) com autovalor $\frac{\ell\hbar^2}{2}$.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Comentários adicionais: sobre a família de CG para $j = \ell - 1/2$

$$|\ell - 1/2, m\rangle = \sum_{m_\ell m_s} |\ell - 1/2; m_\ell m_s\rangle \langle \ell - 1/2; m_\ell m_s | \ell - 1/2, m\rangle =$$

$$= \sum_{m_\ell m_s} |m_\ell m_s\rangle \langle m_\ell m_s | \ell - 1/2, m\rangle. \text{ Considere primeiro } m = \ell - 1/2$$

$$|\underbrace{\ell - 1/2}_j, \underbrace{\ell - 1/2}_m\rangle = |\underbrace{\ell}_{m_\ell}, \underbrace{-1/2}_{m_s}\rangle \langle \ell, -1/2 | \ell - 1/2, \ell - 1/2\rangle +$$

$$+ |\underbrace{\ell - 1}_{m_\ell}, \underbrace{1/2}_{m_s}\rangle \langle \ell - 1, 1/2 | \ell - 1/2, \ell - 1/2\rangle$$

Note que envolvem os mesmos kets $|m_\ell m_s\rangle$, pois são os únicos que garantem $m = \ell - 1/2 = m_\ell + m_s$.

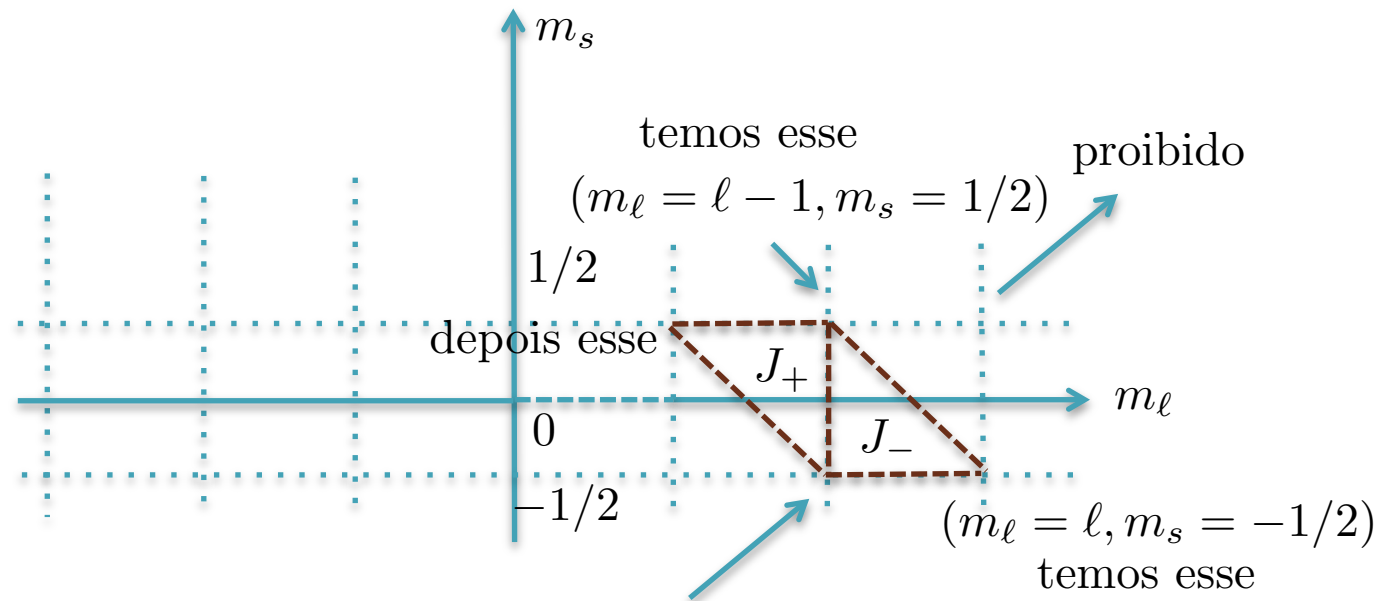
E para obtê-lo $\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ faça-o ortogonal à: } |\ell + 1/2, \ell - 1/2\rangle \\ (2) \text{ normalize-o e} \\ (3) \text{ tome CG's reais.} \end{array} \right.$

Para o item (1), temos do slide 8 (basta fazer $m = \ell - 1/2$):

$$|\ell + 1/2, \ell - 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2\ell}{2\ell + 1}} |\ell - 1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{2\ell + 1}} |\ell, -1/2\rangle$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Considere $j = \ell - 1/2$, $m = \ell - 1/2$ e os dois CG encontrados no slide anterior



primeiro encontramos esse
 $(m_\ell = \ell - 1, m_s = -1/2)$

De volta as Matrizes de Rotação

Em termos dos elementos das matrizes de rotação, temos uma relação importante, conhecida como série de Clebsch-Gordan:

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(R) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(R) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_m \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \times \\ \times \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; j m' \rangle \mathcal{D}_{m m'}^{(j)}(R)$$

Para demonstrar isso, note que o lado esquerdo é o elemento de matriz:

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | D(R) | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle = \underbrace{\langle j_1 m_1 | D(R) | j_1 m'_1 \rangle}_{\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(R)} \underbrace{\langle j_2 m_2 | D(R) | j_2 m'_2 \rangle}_{\mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(R)}$$

e que o lado direito também pode ser obtido da mesma expressão, se

$$\text{inserirmos a unidade da base } \{j m\}, \text{ isto é: } \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | \mathbb{1} D(R) \mathbb{1} | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle = \\ = \sum_{j m} \sum_{j' m'} \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle}_{\mathcal{D}_{m m'}^{(j)}(R)} \underbrace{\langle j_1 j_2; j m | D(R) | j_1 j_2; j' m' \rangle}_{\delta_{j j'}} \underbrace{\langle j_1 j_2; j' m' | j_1 j_2; m'_1 m'_2 \rangle}_{\text{real}}$$

e isso completa a demonstração de validade da série de Clebsch-Gordan.

Uma aplicação da fórmula

Lembre que $\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\alpha, \beta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell + 1)}} Y_{\ell}^{m*}(\beta, \alpha)$

Faça na expressão do slide anterior, $j_1 = \ell_1$, $j_2 = \ell_2$, $m'_1 = 0$, e $m'_2 = 0$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell_1 + 1)}} Y_{\ell_1}^{m_1*}(\beta, \alpha) \sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell_2 + 1)}} Y_{\ell_2}^{m_2*}(\beta, \alpha) = \sum_{\ell m} \langle \ell_1 \ell_2; m_1 m_2 | \ell_1 \ell_2; \ell m \rangle \times$$

$$\langle \ell_1 \ell_2; m'_1 = 0 m'_2 = 0 | \ell_1 \ell_2; \ell m' = m'_1 + m'_2 = 0 \rangle \underbrace{\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\alpha, \beta, 0)}_{\sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell + 1)}} Y_{\ell}^{m*}(\beta, \alpha)}$$

O que permite escrever

$$Y_{\ell_1}^{m_1*}(\beta, \alpha) Y_{\ell_2}^{m_2*}(\beta, \alpha) = \sum_{\ell' m'} \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell' + 1)}} \langle \ell_1 \ell_2; m_1 m_2 | \ell_1 \ell_2; \ell' m' \rangle \times$$

$$\langle \ell_1 \ell_2; 00 | \ell_1 \ell_2; \ell 0 \rangle Y_{\ell'}^{m'*}(\beta, \alpha). \text{ “Complexando” e multiplicando por } Y_{\ell}^{m*}(\beta, \alpha),$$

temos ($\beta = \theta$ e $\alpha = \varphi$): $\int d\Omega Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta, \varphi) Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta, \varphi) =$

$$= \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell + 1)}} \langle \ell_1 \ell_2; 00 | \ell_1 \ell_2; \ell 0 \rangle \langle \ell_1 \ell_2; m_1 m_2 | \ell_1 \ell_2; \ell m \rangle$$