Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Considere 2 osciladores harmônicos simples desacoplados: tipo $+$ e tipo $-$

$$\text{tipo } + \begin{cases} a_+ \\ a_+^\dagger \\ N_+ = a_+^\dagger a_+ \\ [a_+, a_+^\dagger] = 1 \\ [N_+, a_+] = -a_+ \\ [N_+, a_+^\dagger] = a_+^\dagger \end{cases} \qquad \text{e tipo } - \begin{cases} a_- \\ a_-^\dagger \\ N_- = a_-^\dagger a_- \\ [a_-, a_-^\dagger] = 1 \\ [N_-, a_-] = -a_- \\ [N_-, a_-^\dagger] = a_-^\dagger \end{cases}$$

Como são desacoplados $[a_+, a_-] = [a_+, a_-^\dagger] = [a_+^\dagger, a_-] = [a_+^\dagger, a_-^\dagger] = 0$

Construa autokets simultâneos de N_+ e N_-. Lembre que $\big([N_+, N_-] = 0\big)$

$$\text{Que tal} \begin{cases} N_+|n_+\rangle = n_+|n_+\rangle \\ N_-|n_-\rangle = n_-|n_-\rangle \end{cases} \quad \text{dando origem à:} \begin{cases} N_+|n_+, n_-\rangle = n_+|n_+, n_-\rangle \\ N_-|n_+, n_-\rangle = n_-|n_+, n_-\rangle \end{cases}$$

$$\text{Também vale} \begin{cases} a_+^\dagger|n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1}|n_+ + 1, n_-\rangle \\ a_-^\dagger|n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_- + 1}|n_+, n_- + 1\rangle \\ a_+|n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+}|n_+ - 1, n_-\rangle \\ a_-|n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_-}|n_+, n_- - 1\rangle \\ a_+|0, n_-\rangle = 0 \text{ e } a_-|n_+, 0\rangle = 0 \\ |n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}}|0, 0\rangle \end{cases}$$

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Defina $\begin{cases} J_+ \equiv \hbar a_+^\dagger a_- \\ \\ J_- \equiv \hbar a_-^\dagger a_+ \\ \\ J_z \equiv \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-) \end{cases}$ e mostre $\begin{cases} [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \\ \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \end{cases}$

Se definirmos $N \equiv N_+ + N_-$, é possível obter:

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 + \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_-) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 + \frac{\hbar^2}{2}(\underbrace{a_+^\dagger a_+}_{N_+} \underbrace{a_- a_-^\dagger}_{\updownarrow \atop 1 + a_-^\dagger a_-} + \underbrace{a_-^\dagger a_-}_{N_-} \underbrace{a_+ a_+^\dagger}_{\updownarrow \atop 1 + a_+^\dagger a_+})$$

$$\therefore J^2 = \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 + \frac{\hbar^2}{2}(N_+ + N_+N_- + N_- + N_-N_+) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(N_+^2 - 2N_+N_- + N_-^2) + \frac{\hbar^2}{2}(N_+ + N_- + 2N_+N_-) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(N_+^2 + 2N_+N_- + N_-^2) + \frac{\hbar^2}{2}N = \frac{\hbar^2}{4}N^2 + \frac{\hbar^2}{2}N = \frac{\hbar^2}{2}N(\frac{N}{2} + 1)$$

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

$$\text{Interpretação } |n_+, n_-\rangle \begin{cases} n_+ \rightarrow \text{número de spins 1/2 p/ cima} \\ \\ n_- \rightarrow \text{número de spins 1/2 p/ baixo} \end{cases}$$

$J_+ = \hbar a_+^\dagger a_-$

destrói um spin para baixo (direção $\hat{\mathbf{z}}$)

constrói um spin para cima (direção $\hat{\mathbf{z}}$)

$J_- = \hbar a_-^\dagger a_+$

destrói um spin para cima (direção $\hat{\mathbf{z}}$)

constrói um spin para baixo (direção $\hat{\mathbf{z}}$)

$J_z = \dfrac{\hbar}{2}(N_+ - N_-)$ diferença entre o número de spins "up" e "down". Esta é a componente z do momento angular.

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Assim
$$\boxed{\begin{cases} J_+|n_+,n_-\rangle = \hbar a_+^\dagger a_-|n_+,n_-\rangle = \sqrt{(n_+ + 1)n_-}\hbar|n_+ + 1, n_- - 1\rangle \\ J_-|n_+,n_-\rangle = \hbar a_-^\dagger a_+|n_+,n_-\rangle = \sqrt{(n_- + 1)n_+}\hbar|n_+ - 1, n_- + 1\rangle \\ J_z|n_+,n_-\rangle = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-)|n_+,n_-\rangle = \frac{\hbar}{2}(n_+ - n_-)|n_+,n_-\rangle \\ \left(J^2 = \frac{\hbar^2}{2}N(\frac{N}{2}+1)\right)|n_+,n_-\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(n_+ + n_-)(\frac{n_+ + n_-}{2} + 1)|n_+,n_-\rangle \end{cases}}$$

A similaridade aumenta ainda mais, se tomarmos $\begin{cases} n_+ \to j+m \\ n_- \to j-m \end{cases}$

pois assim, os fatores acima ficam: $\begin{cases} \sqrt{(n_+ + 1)n_-} = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \\ \sqrt{(n_- + 1)n_+} = \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \end{cases}$

de acordo com a expectativa. Além disso, os

autovalores de $\begin{cases} J_z \Longrightarrow \dfrac{1}{2}(j+m-(j-m))\hbar = m\hbar \\ J^2 \Longrightarrow \frac{\hbar^2}{2}(2j)(j+1) = \hbar^2 j(j+1) \end{cases}$

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Dada a similaridade de tratamento, definimos de $\begin{cases} n_+ \to j+m \\ n_- \to j-m \end{cases}$

no modelo de oscilador de Schwinger $\begin{cases} j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2} \\ m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2} \end{cases}$

Algumas observações

1) Quando aplicamos $J_\pm$, o j não muda.

2) e o $m \Longrightarrow m \pm 1$, como esperado.

Use isso para definir j e m de um dado ket $|n_+, n_->$, e as duas primeiras fórmulas da caixa azul do slide anterior.

3) $$|jm\rangle = |n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}} |0,0\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0,0\rangle,$$

com um caso especial interessante:

Caso m=j ou se prefirir caso $n_-=0$, $n_+=2j$, pois $n_+ + n_- = 2j$

$$|jj\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{2j}}{\sqrt{(2j)!}} |0,0\rangle \Longrightarrow \underbrace{2j \text{ partículas}} \text{ de spin } 1/2 \text{ com seus spins "up".}$$

Interpretamos $|jm\rangle$ como sendo: $\begin{cases} j+m \text{ com spin } +1/2 \\ j-m \text{ com spin } -1/2 \end{cases}$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Lembrem: $D(R)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle \underbrace{\langle jm'|D(R)|jm\rangle}_{\mathcal{D}^j_{m'm}(R)} \overset{\alpha=\gamma=0}{=\!=} \sum_{m'} |jm'\rangle d^j_{m'm}(\beta)$

pois, $\mathcal{D}^j_{m'm}(R) = \langle jm'|\exp\big(-\frac{iJ_z\alpha}{\hbar}\big)\exp\big(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\big)\exp\big(-\frac{iJ_z\gamma}{\hbar}\big)|jm\rangle =$

$$= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle jm'|\exp\big(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\big)|jm\rangle}_{d^j_{m'm}(\beta)}$$

Usaremos $D(R) = \exp\big(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\big)$ para obter $D(R)|jm\rangle$ na linguagem de Schwinger. Começamos por: $D(R)|jm\rangle = D(R)\frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}|0,0\rangle$

Note $\begin{cases} a_-^\dagger|0,0\rangle = a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle \\ a_-^{\dagger\,2}|0,0\rangle = a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} D(R)a_-^\dagger|0,0\rangle = [D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)]D(R)|0,0\rangle \\ D(R)a_-^{\dagger\,2}|0,0\rangle = D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle \\ D(R)a_-^{\dagger\,2}D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle = [D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)]^2 D(R)\rangle|0,0\rangle \end{cases}$$

E isso nos leva à: $D(R)a_-^{\dagger\,n}D^{-1}(R) = \big(D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)\big)^n$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Este raciocínio permite escrever $D(R)|jm\rangle = D(R)\dfrac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}\dfrac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}|0,0\rangle$

da seguinte forma:

$$D(R)|jm\rangle = D(R)\frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}D^{-1}(R)D(R)\frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle$$

que com auxílio da expressão $D(R){a_-^\dagger}^n D^{-1}(R) = \big(D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)\big)^n$ fica:

$$D(R)|jm\rangle = \frac{[D(R)a_+^\dagger D^{-1}(R)]^{j+m}[D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}D(R)|0,0\rangle$$

Para desenvolver esta expressão, precisamos olhar para:

$D(R)a_\pm^\dagger D^{-1}(R) = \exp\big(-\dfrac{iJ_y\beta}{\hbar}\big)a_\pm^\dagger \exp\big(+\dfrac{iJ_y\beta}{\hbar}\big)$ e para isso, precisamos usar

$$\exp\big(iG\lambda\big)A\exp\big(-iG\lambda\big) =$$

$$= A + i\lambda[G,A] + \frac{i^2\lambda^2}{2!}[G,[G,A]] + \ldots + \frac{i^n\lambda^n}{n!}[G,[G,[G\ldots[G,A]\ldots]]] + \ldots$$

com $G = -\dfrac{J_y}{\hbar}$, $A = a_\pm^\dagger$, $\lambda = \beta$ e calcular $[-\dfrac{J_y}{\hbar}, a_\pm^\dagger]; [-\dfrac{J_y}{\hbar}[-\dfrac{J_y}{\hbar}, a_\pm^\dagger]]$, etc.

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Sabendo que $\begin{cases} J_\pm = J_x \pm iJ_y \\ J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i} \\ J_+ = \hbar a_+^\dagger a_- \\ J_- = \hbar a_-^\dagger a_+ \end{cases}$ começaremos por $[-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger]$

$$[-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar}[J_+ - J_-, a_+^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar}\{[J_+, a_+^\dagger] - [J_-, a_+^\dagger]\}$$

mas $\begin{cases} [J_+, a_+^\dagger] = \hbar[a_+^\dagger a_-, a_+^\dagger] = 0 \\ [J_-, a_+^\dagger] = \hbar[a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger] = \hbar a_-^\dagger \underbrace{[a_+, a_+^\dagger]}_{1} = \hbar a_-^\dagger \end{cases}$

$$\therefore \; [-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar}.(-\hbar)a_-^\dagger = \frac{1}{2i}a_-^\dagger$$

$$[-\frac{J_y}{\hbar}, [-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger]] = [-\frac{J_y}{\hbar}, \frac{1}{2i}a_-^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar}[\frac{J_+ - J_-}{2i}, a_-^\dagger] =$$

$$= -\frac{1}{2i\hbar}\{\underbrace{[\frac{\hbar a_+^\dagger a_-}{2i}, a_-^\dagger]}_{\hbar\frac{a_+^\dagger}{2i}} - \underbrace{[\frac{\hbar a_-^\dagger a_+}{2i}, a_-^\dagger]}_{0}\} = \frac{a_+^\dagger}{4}$$

Mostre que $[-\frac{J_y}{\hbar}, [-\frac{J_y}{\hbar}, [-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger]]] = \frac{1}{8i}a_-^\dagger$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Usando os resultados do slide anterior, podemos calcular:

$$D(R)a_+^\dagger D^{-1}(R) = \exp\big(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\big)a_+^\dagger \exp\big(+\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\big) =$$

$$= a_+^\dagger + i\beta\frac{1}{2i}a_-^\dagger + \frac{i^2\beta^2}{2!}\frac{1}{4}a_+^\dagger + \frac{i^3\beta^3}{3!}\frac{1}{8i}a_-^\dagger + \ldots =$$

$$= a_+^\dagger \underbrace{\big(1 - \frac{(\beta/2)^2}{2!}\ldots\big)}_{\cos\beta/2} + a_-^\dagger \underbrace{\big(\beta/2 - \frac{(\beta/2)^3}{3!} + \ldots\big)}_{\sin\beta/2} =$$

$= a_+^\dagger \cos\beta/2 + a_-^\dagger \sin\beta/2$ (não é uma surpresa: spin up rodando)

Da mesma forma, é possível obter $D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R) = a_-^\dagger \cos\beta/2 - a_+^\dagger \sin\beta/2$

Usando o teorema binomial $(x+y)^N = \sum_k N!\frac{x^{N-k}y^k}{(N-k)!k!}$, podemos escrever

$$D(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|jm\rangle = \sum_{k\ell}\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)!k!(j-m-\ell)!\ell!}\times$$

$$\times\frac{(a_+^\dagger\cos\beta/2)^{j+m-k}(a_-^\dagger\sin\beta/2)^k\big(-a_+^\dagger\sin\beta/2\big)^{j-m-\ell}(a_-^\dagger\cos\beta/2)^\ell}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0,0\rangle$$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Esta última fórmula precisa ser comparada com:

$$D(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|jm\rangle=\sum_{m'}|jm'\rangle d^{(j)}_{m'm}(\beta)=$$

$$=\sum_{m'}d^{(j)}_{m'm}(\beta)\underbrace{\frac{(a_+^\dagger)^{j+m'}(a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}|0,0\rangle}_{|jm'\rangle}$$

Para isso, note e

$$\text{iguale}\begin{cases}\text{Expoente de } a_+^\dagger \Longrightarrow j+m-k+j-m-\ell=j+m'\rightarrow \ell=j-k-m' \\ \\ \text{Expoente de } a_-^\dagger \Longrightarrow k+\ell=j-m'\rightarrow \ell=j-k-m'\end{cases}$$

iguais

Assim faça $\ell=j-k-m'$ na soma dupla do slide anterior (a soma em ℓ vira soma em m').

$$D(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|jm\rangle=\sum_{km'}\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)!k!(j-m-j+k+m')!(j-k-m')!}\times$$

$$\times\big(\cos\beta/2\big)^{j+m-k+j-k-m'}\frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\big(\sin\beta/2\big)^{k+j-m-j+k+m'}\times$$

$$\times\,(a_+^\dagger)^{j+m-k+j-m-j+k+m'}(a_-^\dagger)^{k+j-k-m'}\big(-1\big)^{j-m-j+k+m'}|0,0\rangle$$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Simplificando a última fórmula do slide anterior, temos

$$D(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|jm\rangle = \sum_{m'}\sum_{k} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!}\times$$
$$\times\Big(\cos\beta/2\Big)^{2j-2k+m-m'}\Big(\sin\beta/2\Big)^{2k-m+m'}\Big(a_+^\dagger\Big)^{j+m'}\Big(a_-^\dagger\Big)^{j-m'}\Big(-1\Big)^{k-m+m'}|0,0\rangle$$

Comparação direta com a fórmula do do topo do slide 10, nos leva à

$$\boxed{d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_{k}\Big(-1\Big)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!}\times \Big(\cos\beta/2\Big)^{2j-2k+m-m'}\Big(\sin\beta/2\Big)^{2k-m+m'}}$$

Note que multiplicamos e dividimos a expressão anterior por $\sqrt{(j+m')!(j-m')!}$ para obter a expressão para $|jm'\rangle$ da fórmula do topo do slide 10.