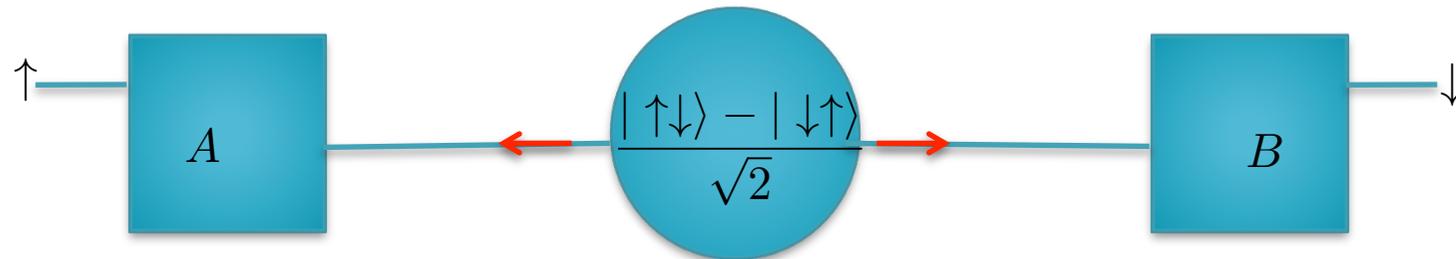




## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Coloque o sistema no  
estado singlete e  
separe as partículas



Se A mede  $\hbar/2$ ,  
o que esperamos  
da medida de B?

Se A mede  $\hbar/2$   
B mediria  $-\hbar/2$ ,  
com certeza

Se A não mede o spin da partícula 1,  
B teria 50% de chance de encontrar  
 $S_z +$  e 50% de chance de encontrar  $S_z -$

Qual é a velocidade do colapso do estado da situação em que não sabemos qual seria o resultado da medida de B para a situação em que saberíamos (decorrente da medida feita por A)? Isso perturbou muito Albert Einstein.

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Será que estamos fazendo alguma interpretação errada? Vamos re-construir o experimento em uma analogia clássica com bolas coloridas. Considere uma urna com duas bolas: uma branca e uma preta. Se aleatoriamente retirarmos uma, temos 50% de chance de obter uma das cores. Se, entretanto, retirarmos uma e der preta, sabemos que a segunda a ser retirada será branca com 100% de certeza.

O problema quântico é, de fato, mais complicado, pois o sistema pode ser caracterizado por  $S_z$  (branco e preto) ou  $S_x$  (verde e azul) ou ainda  $S_y$  (vermelho e amarelo), e outras direções à sua escolha. Lembrando que:

$$|\hat{x}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+\rangle \pm |\hat{z}-\rangle) \text{ e } \therefore |\hat{z}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}+\rangle \pm |\hat{x}-\rangle)$$

Podemos escrever:  $|\text{singlete}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+\rangle \otimes |\hat{z}-\rangle - |\hat{z}-\rangle \otimes |\hat{z}+\rangle)$ . Este estado

pode ser re-escrito usando  $|\hat{x}\pm\rangle$ , da seguinte forma:  $|\text{singlete}\rangle =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}((|\hat{x}+\rangle + |\hat{x}-\rangle) \otimes (|\hat{x}+\rangle - |\hat{x}-\rangle) - (|\hat{x}+\rangle - |\hat{x}-\rangle) \otimes (|\hat{x}+\rangle + |\hat{x}-\rangle))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2|\hat{x}-; \hat{x}+\rangle - 2|\hat{x}+; \hat{x}-\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}+; \hat{x}-\rangle - |\hat{x}-; \hat{x}+\rangle) \text{ também singlete.}$$

O que tínhamos com  $\hat{z}\pm$ , agora temos com  $\hat{x}\pm$  (isso vale para  $\hat{n}\pm$ ).

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Suponha que um observador A possa escolher  $S_z$  ou  $S_x$  da partícula 1, apenas trocando a orientação do analisador de spin, enquanto que o observador B sempre mede  $S_x$  da partícula 2.

- Assim
- Se A determina  $S_z +$  então B tem 50%-50% de obter  $S_x +$  ou  $S_x -$ . (Mesmo que  $S_z -$  da partícula 2 tenha 100% de chance de ser medida por B,  $S_x$  é indeterminada).
  - Se A determina  $S_x +$  para a partícula 1, então B determina  $S_x -$ , sem chances de errar. Dizemos que as duas medidas estão 100% correlacionadas.
  - Se A não faz nenhuma medida, B tem 50%/50% para  $S_x + / S_x -$ .

A medida de B parece depender da medida de A, independente da distância  $d$  entre os dois experimentos. Considerando que informação viaja com a velocidade máxima  $c$  (velocidade da luz), isto é perturbador. Será que conseguiríamos montar um experimento onde B soubesse o que A mediu em um intervalo de tempo inferior a  $d/c$  após a medida de A? Resp.: NÃO. Isso não seria apenas perturbador. Isso estragaria a relatividade especial.

# Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Suponha que A e B possam escolher  $S_x$  ou  $S_z$ . Teríamos a seguinte situação:

Componente medida por A	Resultado	Componente medida por B	Resultado
z	+	z	-
z	+	x	+
z	+	x	-
z	-	z	+
z	-	x	+
z	-	x	-
x	+	z	+
x	+	z	-
x	+	x	-
x	-	z	+
x	-	z	-
x	-	x	+

O Resultado de B depende do que A fez!

Compare

Compare

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

A interpretação ortodoxa da mecânica quântica diz que se o sistema se encontra em  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|S_z+; S_z-\rangle - |S_z-; S_z+\rangle)$  e fazemos uma medida sobre a partícula 1 e encontramos  $S_z+$ , o sistema colapsa para  $|S_z+; S_z-\rangle$ , ou seja, a medida sobre a partícula 1, que aparentemente parece uma medida isolada, de fato, é uma medida no sistema todo.

### Princípio de Localidade de Einstein e Desigualdade de Bell

Einstein não abria mão do seguinte:

*“A situação real do sistema 2 é independente do que é feito no sistema 1, quando eles estão espacialmente separados”.*

Isto ficou conhecido como o paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen. Para tentar resolver esse assunto alguns cientistas tentaram atribuir as dificuldades encontradas nas interpretações probabilísticas da Mecânica Quântica à parâmetros desconhecidos (as chamadas variáveis escondidas). Até 1964, tais teorias alternativas previam as mesmas coisas que a Mecânica Quântica e nada mais. Até uma proposta de experimento feita por J. S. Bell, como veremos a seguir.

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Foi J. S. Bell que descobriu que estas teorias alternativas, baseadas no princípio de localidade de Einstein, de fato, predizem uma relação de desigualdade, testável, e *em desacordo com a Mecânica Quântica*. Para derivar a desigualdade de Bell, utilizaremos um modelo bolado por E. P. Wigner que descreveremos a seguir. Mesmo sabendo que  $S_x$  e  $S_z$  não podem ser determinados simultaneamente, eles pensaram em classificar as partículas por aquilo que esperam delas, isto é:

Suponha que no feixe existam partículas que:  $\begin{cases} \text{Medindo } S_z, \text{ obtemos } + \\ \text{Medindo } S_x, \text{ obtemos } - \end{cases}$

Estas partículas pertencem ao tipo  $(\hat{z}+, \hat{x}-)$ . Isto não significa que podemos medir  $S_z$  e  $S_x$ . Apenas uma delas, mas se medirmos  $S_z$ , obteremos + e se medirmos  $S_x$ , obteremos -. É importante que o spin total seja zero (singlete).

	Partícula 1	Partícula 2
(a)	$(\hat{z}+, \hat{x}-)$	$(\hat{z}-, \hat{x}+)$
(b)	$(\hat{z}+, \hat{x}+)$	$(\hat{z}-, \hat{x}-)$
(c)	$(\hat{z}-, \hat{x}+)$	$(\hat{z}+, \hat{x}-)$
(d)	$(\hat{z}-, \hat{x}-)$	$(\hat{z}+, \hat{x}+)$

Note que todos os resultados previstos aqui, estão previstos pela MQ; com uma vantagem: Para um par de partículas pertencente ao tipo (a), se um observador medir  $S_z$  da partícula 1, ele vai obter + independente se B medir  $S_z$  ou  $S_x$ .

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Foi neste sentido que o princípio de localidade de Einstein foi incorporado: O resultado de A é predeterminado, independentemente da escolha de B sobre o que medir. As coisas pareciam ir no sentido imposto por Einstein em respeito ao princípio de localidade. Para explorar o assunto, considere um exemplo mais complicado: 3 vetores  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ , e  $\hat{\mathbf{c}}$ , não necessariamente ortogonais. Uma partícula de um certo tipo seria:

$$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+) \text{ que significa: } \begin{cases} \text{Se } \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}} \text{ é medido} \implies \text{encontra-se } - \\ \text{Se } \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{b}} \text{ é medido} \implies \text{encontra-se } + \\ \text{Se } \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{c}} \text{ é medido} \implies \text{encontra-se } + \end{cases}$$

Note que a outra partícula precisa corresponder à  $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$  para assegurar o valor zero para a componente do momento angular medida do sistema. Para obter a desigualdade de Bell, vamos construir uma tabela de possíveis resultados de medidas deste novo cenário.

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

População	Partícula 1	Partícula 2
$N_1$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$
$N_2$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$
$N_3$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$
$N_4$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$
$N_5$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$
$N_6$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$
$N_7$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$
$N_8$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$

Suponha que  $\begin{cases} \mathbf{S}_1 \cdot \hat{a} \text{ dê } + \\ \mathbf{S}_2 \cdot \hat{b} \text{ dê } + \end{cases} \implies \text{tipos } \begin{cases} 3 \\ \text{ou} \\ 4 \end{cases}$

Assim o número de pares de partículas para o qual esta situação pode acontecer é  $N_3 + N_4$ . Como  $N_i \geq 0$ , temos:

$$N_3 + N_4 \leq \underbrace{N_3 + N_4}_{\mathbf{S}_1 \cdot \hat{a} + \text{ e } \mathbf{S}_2 \cdot \hat{c} +} + \underbrace{N_2 + N_7}_{\mathbf{S}_1 \cdot \hat{c} + \text{ e } \mathbf{S}_2 \cdot \hat{b} +}$$

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Isto permite escrever as probabilidades

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N_3 + N_4}{\sum N_i} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}+) \\ \frac{N_3 + N_7}{\sum N_i} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{c}}+; \hat{\mathbf{b}}+) \\ \frac{N_2 + N_4}{\sum N_i} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{c}}+) \end{array} \right.$$

Da expressão do slide anterior:  $N_3 + N_4 \leq N_3 + N_4 + N_2 + N_7$ , obtemos a chamada desigualdade de Bell:

$$\underbrace{\frac{N_3 + N_4}{\sum N_i}}_{\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}+)} \leq \underbrace{\frac{N_3 + N_7}{\sum N_i}}_{\mathcal{P}(\hat{\mathbf{c}}+; \hat{\mathbf{b}}+)} + \underbrace{\frac{N_2 + N_4}{\sum N_i}}_{\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{c}}+)}$$

Em seguida, vamos calcular estas probabilidades segundo as regras da Mecânica Quântica e verificar se a desigualdade continua valendo.

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

População	Partícula 1	Partícula 2
$N_1$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$
$N_2$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$
$N_3$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$
$N_4$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$
$N_5$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$
$N_6$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$
$N_7$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$
$N_8$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$

Na Mecânica Quântica, conhecendo o estado do sistema

$$|\text{singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle - |\hat{z}-; \hat{z}+\rangle)$$

é possível calcular cada uma das probabilidades que aparecem na desigualdade de Bell.

Coisas do tipo:  $\mathcal{P}(\hat{a}+; \hat{b}+) = |\langle \hat{a}+, \hat{b}+ | \text{singleto} \rangle|^2$

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

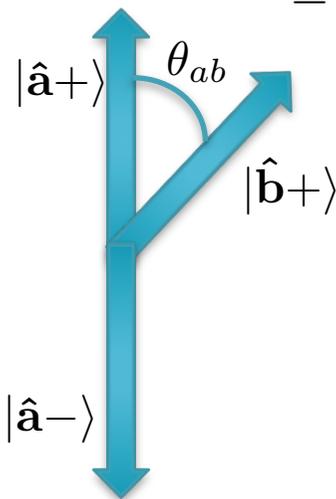
Para facilitar, vamos escrever o estado:

$$|\text{singlete}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle - |\hat{z}-; \hat{z}+\rangle) = e^{i\text{fase}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{a}+; \hat{a}-\rangle - |\hat{a}-; \hat{a}+\rangle)$$

pois, como já vimos, eles diferem da definição de singlete apenas por uma fase.

Assim, podemos escrever a primeira das probabilidades como:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\hat{a}+; \hat{b}+) &= \frac{1}{2} |\langle \hat{a}+, \hat{b}+ | \hat{a}+; \hat{a}-\rangle - \langle \hat{a}+, \hat{b}+ | \hat{a}-; \hat{a}+\rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{2} |\langle \hat{b}+ | \hat{a}-\rangle|^2 \end{aligned}$$



Já fizemos isso antes: rodamos o spinor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  para obter um autoket

de  $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  com  $\hat{\mathbf{n}} \equiv (\theta = \beta, \varphi = \alpha) \implies \chi = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 e^{-i\alpha/2} \\ \sin \beta/2 e^{+i\alpha/2} \end{pmatrix}$ .

## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Tomemos  $|\hat{\mathbf{a}}+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $|\hat{\mathbf{a}}-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; e  $|\hat{\mathbf{b}}+\rangle = \chi$ , com  $\alpha = 0$  e  $\beta = \theta_{ab}$ .

Isto torna  $|\hat{\mathbf{b}}+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta_{ab}/2 \\ \sin \theta_{ab}/2 \end{pmatrix}$  e permite o cálculo de

$$\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+) = \frac{1}{2} |\langle \hat{\mathbf{b}}+ | \hat{\mathbf{a}}+\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \cos \theta_{ab}/2 & \sin \theta_{ab}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{ab}/2$$

Analogamente, obtemos:

$$\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}+) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{ac}/2 \text{ e } \mathcal{P}(\hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{b}}+) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{bc}/2$$

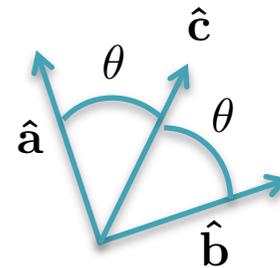
o que permite escrever a desigualdade de Bell como:

$$\frac{1}{2} \cos^2 \theta_{ab}/2 \leq \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{ac}/2 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{bc}/2$$

Por simplicidade, tome  $\theta_{ab} = 2\theta$ ;  $\theta_{ac} = \theta$  e  $\theta_{bc} = \theta$ , conforme a figura.

Isto implicaria em  $\cos^2 \theta \leq 2 \cos^2 \theta/2$

Será que esta expressão está correta  $\forall \theta$ ?



## Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Vamos verificar se  $\sin^2 \theta \leq 2 \sin^2 \theta/2$  está correta  $\forall \theta$ .

Como  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \rightarrow \sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$  e isso faz com que

$$4 \sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2 \leq 2 \sin^2 \theta/2 \rightarrow 4 \sin^2 \theta/2 (1 - \sin^2 \theta/2) \leq 2 \sin^2 \theta/2$$

$$-4 \sin^4 \theta/2 + 2 \sin^2 \theta/2 \leq 0 \rightarrow \underbrace{-2 \sin^2 \theta/2}_{\text{sempre negativo}} \underbrace{(2 \sin^2 \theta/2 - 1)}_{\text{Para violar basta } 2 \sin^2 \theta/2 - 1 < 0} \leq 0$$

Ou seja, para violar a desigualdade de Bell, basta que no intervalo de definição de  $\theta$ , ou seja, em  $0 \leq \theta \leq \pi$ , existam valores de  $\theta$  que satisfaçam

$$\sin^2 \theta/2 < \frac{1}{2} \implies \begin{cases} 0 < \theta/2 < \pi/4 \implies 0 < \theta < \pi/2 \\ 3\pi/4 < \theta/2 < \pi \implies 3\pi/2 < \theta < 2\pi \text{ (fora do intervalo)} \end{cases}$$

Mecânica Quântica viola a desigualdade de Bell e muitas experiências também!