Operadores Tensoriais

Aprendemos a rodar kets e componentes de vetores (operadores vetoriais)

$$|\alpha\rangle \longrightarrow D(R)|\alpha\rangle \Longrightarrow \langle\alpha|D^\dagger(R)V_iD(R)|\alpha\rangle = \underbrace{\sum_j R_{ij}\langle\alpha|V_j|\alpha\rangle}_{\text{roda como vetores clássicos}}$$

Como vale para qualquer $|\alpha\rangle$, temos: $\boxed{D^\dagger(R)V_iD(R) = \sum_j R_{ij}V_j}$ e com auxílio de $\boxed{D(R) = 1 - i\epsilon\frac{\mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}}{\hbar},}$ é possível obter: $\boxed{[V_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar V_k}$ $\rightarrow$ *para isso, seguiremos passos semelhantes ao que foi feito para* $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar J_k$.

Podemos escrever a equação da caixa azul com auxílio da equação da caixa vermelha, por (até primeira ordem em ϵ) :

$$V_i + \frac{\epsilon}{i\hbar}[V_i, \mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}] = \sum_j R_{ij}(\hat{\mathbf{n}};\epsilon)V_j$$

Tomemos o caso particular $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow R(\hat{\mathbf{z}},\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operadores Tensoriais

Neste caso, temos $\begin{cases} i=1: V_x + \frac{\epsilon}{i\hbar}[V_x, J_z] = V_x - \epsilon V_y \\ i=2: V_y + \frac{\epsilon}{i\hbar}[V_y, J_z] = \epsilon V_x + V_y \\ i=3: V_z + \frac{\epsilon}{i\hbar}[V_z, J_z] = V_z \end{cases}$ $\Rightarrow [V_i, J_3] = i\epsilon_{i3k}\hbar V_k$

Brinque com a fórmula.
Tome **V=p** e **x** e **J=L**

Com $R(\hat{\mathbf{x}}, \epsilon)$ e $R(\hat{\mathbf{y}}, \epsilon)$, obtemos a fórmula geral da caixa amarela do slide 1.
O comportamento de $\mathbf{V}$ sob rotação finita é completamente definido pelas regras de comutação acima, usando:

$$\exp\Big(\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\Big)V_i \exp\Big(-\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\Big)$$ se soubermos $[J_j, [J_j, [...[J_j, V_i]...]]]$.

Verifique que sabemos calcular isso

É possível generalizar $V_i \to \sum_j R_{ij}V_j$ e definir um tensor por:

$$T_{...ijk...} \to \sum_{...i'j'k'...} \ldots R_{ii'}R_{jj'}R_{kk'}\ldots T_{...i'j'k'...}$$

com ajuda da matriz ortogonal de rotação $R(3\times 3)$. O número de índices é chamado de "rank" do tensor. E o tensor definido desta forma é conhecido como tensor cartesiano.
Exemplo simples: $T_{ij} = U_iV_j$ onde U_i e V_j são componentes de operadores vetoriais que podem ou não comutar entre si. Note 9 pares possíveis.

Operadores Tensoriais

Explorando o exemplo simples:

$$U_iV_j = \underbrace{\frac{\mathbf{U}.\mathbf{V}}{3}\delta_{ij}}_{\substack{\text{um}\\ \text{escalar}\\ \downarrow}} + \underbrace{\frac{U_iV_j - U_jV_i}{2}}_{\substack{\text{vetor}\\ (U\times V)_k\epsilon_{ijk}\\ \downarrow}} + \underbrace{\left(\frac{U_iV_j + U_jV_i}{2} - \frac{\mathbf{U}.\mathbf{V}}{3}\delta_{ij}\right)}_{\substack{\text{matriz simétrica}\\ \text{traço zero}\\ \downarrow}}$$

Transforma como: $\underbrace{Y_0^0 \qquad Y_1^m \qquad Y_2^m}$

Tensores esféricos irredutíveis,

$$\text{onde: } \begin{cases} Y_0^0 \to \text{tem 1 componente independente} \\ Y_1^m \to \text{tem 3 componentes independentes} \\ Y_2^m \to \text{tem 5 componentes independentes.} \end{cases}$$

Definição de um tensor esférico:

$$\text{Comece com } Y_\ell^m(\theta,\varphi) = Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}) \text{ e troque } \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \text{ por } \mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z) \\ \ell \text{ por } k \text{ (ordem)} \\ m \text{ por } q \ \left(\substack{\text{momento quântico}\\ \text{magnético}}\right) \end{cases}$$

e obtenha $T_q^{(k)} = Y_{\ell=k}^{m=q}(\mathbf{V})$

Operadores Tensoriais

Assim, considere: $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) \Longrightarrow (V_x, V_y, V_z)$

Comece com $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \Longrightarrow T_0^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} V_z$

Já $Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) =$

$$= \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\sin\theta\cos\varphi \pm i\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{2}} = \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\frac{x \pm iy}{\sqrt{2}r})$$

$$\therefore \; T_{\pm 1}^{(1)} = \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}$$

De forma semelhante, obtemos:

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2} \Longrightarrow T_{\pm 2}^{(2)} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (V_x \pm iV_y)^2$$

$$\text{faça} \begin{cases} Y_2^{\pm 2} \Longrightarrow T_{\pm 2}^{(2)} \\ Y_2^{\pm 1} \Longrightarrow T_{\pm 2}^{(1)} \\ Y_2^{0} \Longrightarrow T_{\pm 2}^{(0)} \end{cases}$$

Operadores Tensoriais

Revisando $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ sob rotações

$|\hat{\mathbf{n}}\rangle \Longrightarrow D(R)|\hat{\mathbf{n}}\rangle \equiv |\hat{\mathbf{n}}'\rangle$

Lembre que $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}') = \langle \hat{\mathbf{n}}'|\ell m\rangle$ e escreva $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}')$ em função dos $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}})$. Como?

$D(R^{-1})|\ell m\rangle = \sum_{m'} |\ell m'\rangle\langle \ell m'|D(R^{-1})|\ell m\rangle = \sum_{m'} |\ell m'\rangle \mathcal{D}^{\ell}_{m'm}(R^{-1})$ multiplique pela esquerda por: $\langle\hat{\mathbf{n}}|$ e obtenha $\langle \hat{\mathbf{n}}|D(R^{-1})|\ell m\rangle = \langle \hat{\mathbf{n}}'|\ell m\rangle =$

$= \sum_{m'} \langle \hat{\mathbf{n}}|\ell m'\rangle \mathcal{D}^{\ell}_{m'm}(R^{-1})$ onde usamos que $\langle \hat{\mathbf{n}}'| = \langle \hat{\mathbf{n}}|D^\dagger(R) = \langle \hat{\mathbf{n}}|D(R^{-1})$

ou seja $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}') = \sum_{m'} Y_\ell^{m'}(\hat{\mathbf{n}}) \mathcal{D}^{\ell *}_{mm'}(R)$

Um operador que age como um $Y_\ell^m(\mathbf{V})$ deve respeitar:

$$D^\dagger(R) Y_\ell^m(\mathbf{V}) D(R) = \sum_{m'} Y_\ell^{m'}(\mathbf{V}) \mathcal{D}^{\ell *}_{mm'}(R)$$

ou melhor, a definição do tensor esférico fica:

$$D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q'=-k}^{k} \mathcal{D}^{(k)^*}_{qq'}(R) T_{q'}^{(k)} \text{ ou de forma}$$

equivalente (troque R por R^{-1}) $D(R) T_q^{(k)} D^\dagger(R) = \sum_{q'=-k}^{k} \mathcal{D}^{(k)}_{q'q}(R) T_{q'}^{(k)}$

Operadores Tensoriais

Para rotações infinitesimais a expressão $D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{q'=-k}^{k} \mathcal{D}_{qq'}^{(k)^*}(R)T_{q'}^{(k)}$

fica:

$$(1 + i\epsilon\frac{\mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}}{\hbar})T_q^{(k)}(1 - i\epsilon\frac{\mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}}{\hbar}) = \sum_{q'=-k}^{k} \mathcal{D}_{qq'}^{(k)^*}(R)T_{q'}^{(k)} = \sum_{q'=-k}^{k} T_{q'}^{(k)}\langle kq'|1 + i\epsilon\frac{\mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}}{\hbar}|kq\rangle$$

O termo de primeira ordem, fornece:

$$[\mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}, T_q^{(k)}] = \sum_{q'=-k}^{k} T_{q'}^{(k)}\langle kq'|\mathbf{J}.\hat{\mathbf{n}}|kq\rangle$$

$$\text{Se} \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \Longrightarrow [J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}} \text{ (faça em casa) } \Longrightarrow [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}T_{q\pm 1}^{(k)} \end{cases}$$

Produtos de Tensores

Comece por: $T_0^{(0)} = -\frac{\mathbf{U}.\mathbf{V}}{3} = -\left(\frac{U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z}{3}\right)$ com auxílio

da definição $U_{\pm 1} \equiv \mp\left(\frac{U_x \pm iU_y}{\sqrt{2}}\right)$, temos: $U_{\pm 1} = \frac{\mp U_x - iU_y}{\sqrt{2}}$, que pode ser

Componentes q de um tensor de ordem 1

invertido: $\begin{cases} U_x = \frac{U_{-1}-U_{+1}}{\sqrt{2}} \\ U_y = \frac{U_{-1}+U_{+1}}{-i\sqrt{2}} \end{cases}$ e ao definir $U_0 \equiv U_z$, podemos escrever:

$$T_0^{(0)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{(U_{-1}-U_{+1})(V_{-1}-V_{+1})}{2} - \frac{(U_{-1}+U_{+1})(V_{-1}+V_{+1})}{2} + U_0V_0\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\Big(\frac{U_{+1}V_{+1}}{2} - \frac{U_{+1}V_{+1}}{2} - \frac{U_{+1}V_{-1}}{2} - \frac{U_{+1}V_{-1}}{2} - \frac{U_{-1}V_{+1}}{2} - \frac{U_{+1}V_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{U_{-1}V_{-1}}{2} - \frac{U_{-1}V_{-1}}{2} + U_0V_0\Big) = \frac{1}{3}\left(U_{+1}V_{-1} + U_{-1}V_{+1} - U_0V_0\right).$$

Verifique: $\begin{cases} T_q^{(1)} = \frac{(\mathbf{U}\times\mathbf{V})_q}{i\sqrt{2}} \\ T_{\pm 2}^{(2)} = U_{\pm 1}V_{\pm 1} \\ T_{\pm 1}^{(2)} = \frac{U_{\pm 1}V_0 + U_0V_{\pm 1}}{\sqrt{2}} \\ T_0^{(2)} = \frac{U_{+1}V_{-1} + 2U_0V_0 + U_{-1}V_{+1}}{\sqrt{6}} \end{cases}$

note: $\begin{cases} Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{3z^2-r^2}{r^2}, \text{ onde} \\ 3z^2 - r^2 = 2z^2 - (x^2+y^2) = \\ = 2z^2 - 2\left(\frac{(x+iy)}{\sqrt{2}}\frac{(x-iy)}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{caso especial de } T_0^{(2)} \text{ com} \\ \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{r} \end{cases}$

Teorema importante sobre tensores esféricos

Teorema:

Sejam $X_{q_1}^{(k_1)}$ e $Z_{q_2}^{(k_2)}$ tensores esféricos irredutíveis de ordem k_1 e k_2. Então $T_q^{(k)} = \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; kq \rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$ é um tensor esférico de ordem k.

Demonstração:

Para demonstrá-lo, basta verificar que $T_q^{(k)}$ transforma de acordo com

$$D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q'=-k}^{k} \mathcal{D}_{qq'}^{(k)\star} T_{q'}^{(k)}$$

$$D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; kq \rangle D^\dagger(R) X_{q_1}^{(k_1)} \underbrace{D(R) D^\dagger(R)}_{1} Z_{q_2}^{(k_2)} D(R) =$$

$$= \sum_{q_1 q_2 q_1' q_2'} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; kq \rangle \mathcal{D}_{q_1 q_1'}^{(k_1)\star} X_{q_1'}^{(k_1)} \mathcal{D}_{q_2 q_2'}^{(k_2)\star} Z_{q_2'}^{(k_2)},$$ mas vimos que

$$\mathcal{D}_{q_1 q_1'}^{(k_1)} \mathcal{D}_{q_2 q_2'}^{(k_2)} = \sum_{k'' q' q''} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; k'' q'' \rangle \langle k_1 k_2; q_1' q_2' | k_1 k_2; k'' q' \rangle \mathcal{D}_{q'' q'}^{(k'')}$$

Tome o complexo conjugado e insira na expressão acima, para obter:

Teorema importante sobre tensores esféricos

A nova expressão:

$$D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{\substack{k''q'q''\\ q_1q_2q'_1q'_2}} \overbrace{\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;kq\rangle}^{q_1+q_2=q}\overbrace{\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;k''q''\rangle}^{q_1+q_2=q''\ \therefore\ \delta_{qq''}}\times$$

$$\times\langle k_1k_2;q'_1q'_2|k_1k_2;k''q'\rangle\mathcal{D}^{(k'')^\star}_{q''q'}X^{(k_1)}_{q'}Z^{(k_2)}_{q'_2},$$

mas $\sum_{q_1q_2}\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;kq\rangle\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;k''q''\rangle$ pode ser re-escrito por

$$\sum_{q_1q_2}\langle k_1k_2;kq|k_1k_2;q_1q_2\rangle\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;k''q''\rangle = \langle k_1k_2;kq|k_1k_2;k''q''\rangle = \delta_{kk''}\delta_{qq''}$$

De forma que:

$$D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{q'}\left(\underbrace{\sum_{q'_1q'_2}\langle k_1k_2;q'_1q'_2|k_1k_2;kq'\rangle X^{(k_1)}_{q'_1}Z^{(k_2)}_{q'_2}}_{T^{(k)}_{q'}}\right)\mathcal{D}^{(k)^\star}_{qq'} =$$

$$= \sum_{q'}T^{(k)}_{q'}\mathcal{D}^{(k)^\star}_{qq'} \qquad \text{c.q.d.}$$

Elementos de Matriz de Operadores Tensoriais e Teorema de Wigner-Eckar

O elemento de matriz $\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle$ é importante, pois entre outras, coisas, pode expressar interações de campos eletromagnéticos com átomos e núcleos.

1) **Regra m de Seleção:** $\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = 0$ salvo se $m' = q + m$

Demonstração:

Para provar, basta lembrar que: $[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$ e calcular o elemento de matriz: $\langle\alpha', j'm'|\left([J_z, T_q^{(k)}] - \hbar q T_q^{(k)}\right)|\alpha, jm\rangle = 0$ que implica em:

$$(m' - m - q)\hbar\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = 0,$$

ou seja se $m' \neq m + q \rightarrow \langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = 0$

2) **Teorema de Wigner-Eckar**:

$$\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = \underbrace{\langle jk; mq|jk; j'm'\rangle}_{\text{não depende de } T^{(k)}} \frac{\overbrace{\langle\alpha' j'||T^{(k)}||\alpha j\rangle}^{\text{não depende de } m, m' \text{e } q}}{\sqrt{2j+1}}$$

onde $|j - k| \leq j' \leq j + k$.

Teorema de Wigner-Eckar

Demonstração:

Para provar isso, usaremos a relação: $[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\,T_{q\pm 1}^{(k)}$

que pode ser usada em:

$\langle \alpha', j'm'|[J_\pm, T_q^{(k)}]|\alpha, jm\rangle = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\langle \alpha', j'm'|T_{q\pm 1}^{(k)}|\alpha, jm\rangle$

para fornecer algo parecido com as relações de recorrência dos coeficientes de Clebsch-Gordan, isto é:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)}\langle \alpha', j'm' \mp 1|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = \\
&= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle \alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm \pm 1\rangle + \\
&\quad + \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\langle \alpha', j'm'|T_{q\pm 1}^{(k)}|\alpha, jm\rangle
\end{aligned}
$$

Compare com a fórmula de recorrência já demonstrada:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle j_1 j_2, m_1 m_2|j_1 j_2, jm \pm 1\rangle = \\
&= \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\langle j_1 j_2, m_1 \mp 1 m_2|j_1 j_2, jm\rangle + \\
&\quad + \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}\langle j_1 j_2, m_1 m_2 \mp 1|j_1 j_2, jm\rangle
\end{aligned}
$$

inverta o sinal de cima com o debaixo e

troque: $\begin{cases} j \to j' & j_1 \to j & j_2 \to k \\ m \to m' & m_1 \to m & m_2 \to q \end{cases}$

Teorema de Wigner-Eckar

Para obter

$$\sqrt{(j'\pm m')(j'\mp m'+1)}\langle jk,mq|jk,j'm'\mp 1\rangle =$$
$$= \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\langle jk,m\pm 1q|jk,j'm'\rangle +$$
$$+\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\langle jk,mq\pm 1|jk,j'm'\rangle$$

Assim, encontramos dois conjuntos de equações, tais que:

$$\sum a_{ij}\underbrace{x_j}_{\langle\ |T_q^{(k)}|\ \rangle} = 0 \qquad \sum a_{ij}\underbrace{y_j}_{\langle \mathrm{CG}\rangle} = 0$$

e mesmos coeficientes a_{ij} $\therefore$ $x_j = cy_j\ \forall\ j$

x_j e y_j dependem de m, m' e q, mas c não pode depender deles.

Pegue o 3o. termo

$\langle\alpha', j'm'|T_{q\pm 1}^{(k)}|\alpha, jm\rangle = c\langle jk, mq\pm 1|jk, j'm'\rangle$ troque $q\pm 1$ por q

e terminamos nossa demonstração, escrevendo:

$$\langle\alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle\alpha' j'||T^{(k)}||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle jk, mq|jk, j'm'\rangle$$

onde a barra dupla significa que este termo não depende de m, m' e q.

Exemplos de uso do Teorema de Wigner-Eckar

Exemplo 1: $T_0^{(0)} = S$

$$\langle \alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha' j'||T^{(k)}||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle jk, mq|jk, j'm'\rangle$$

$$\langle \alpha', j'm'|S|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha' j'||S||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle j0, m0|j0, j'm'\rangle \;\therefore\; m' = m \text{ e } j' = j$$

$$\therefore\; \langle \alpha', j'm'|S|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha' j'||S||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\delta_{j'j}\delta_{m'm}$$

o que permite concluir que S não transfere momento angular.

Exemplo 2: Operador Vetorial $V_q^{(1)} \to (V_{-1}, V_0, V_{+1})$

$$\langle \alpha', j'm'|T_q^{(k)}|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha' j'||T^{(k)}||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle jk, mq|jk, j'm'\rangle$$

$$\langle \alpha', j'm'|V_q^{(1)}|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha' j'||V^{(1)}||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\underbrace{\langle j1, mq|j1, j'm'\rangle}$$

Note que $\underset{q=\pm 1 \text{ ou } 0}{m+q=m'} \begin{cases} m' = m \pm 1 \\ \text{ou } m' = m \end{cases}$ e $|j-1| \le j' \le j+1$ e $\therefore\; j' = \begin{cases} j \pm 1 \\ j \end{cases}$

mas $\begin{cases} \text{se } j = 0 \to j' = 1 \\ \text{e } \; j = 0 \to j' = 0 \\ \text{é proibido.} \end{cases}$ resumo $\begin{cases} \Delta m = m' - m = \pm 1 \text{ ou } 0 \\ \Delta j = j' - j = \pm 1 \text{ ou } 0 \\ \text{mas } j = 0 \to j' = 0 \text{ (proibido)} \end{cases}$

Teorema da Projeção

$$\boxed{\langle\alpha', j'm'|V_q|\alpha, jm\rangle = \frac{\langle\alpha' jm|\mathbf{J}.\mathbf{V}|\alpha jm\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\langle jm'|J_q|jm\rangle}$$

Primeiro, é importante escrever $\mathbf{J}$ como um tensor esférico cujas componentes serão definidas por (J_{-1}, J_0, J_{+1}), conforme havíamos definido.

De $U_{+1} = -\dfrac{(U_x + iU_y)}{\sqrt{2}}$; $\quad U_{-1} = \dfrac{(U_x - iU_y)}{\sqrt{2}}$; $\quad U_0 = U_z$, e $J_\pm = J_x \pm iJ_y$,

temos: $J_{\pm 1} = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}J_\pm$ e $J_0 = J_z \Longrightarrow \mathbf{J}.\mathbf{V} = J_z V_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}J_+ V_{-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}J_- V_{+1}$,

uma vez que: $\mathbf{U}.\mathbf{V} = U_0 V_0 - U_{+1}V_{-1} - U_{-1}V_{+1}$. Feito isso, agora podemos escrever: $\langle\alpha', jm|\mathbf{J}.\mathbf{V}|\alpha, jm\rangle = \langle\alpha', jm|J_z V_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}J_+ V_{-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}J_- V_{+1}|\alpha, jm\rangle =$

$$= m\hbar\langle\alpha', jm|V_0|\alpha, jm\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\langle\alpha', jm-1|V_{-1}|\alpha, jm\rangle +$$

$$-\frac{\hbar}{2}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\langle\alpha', jm+1|V_{+1}|\alpha, jm\rangle = c_{jm}\langle\alpha', j||\mathbf{V}||\alpha, j\rangle,$$

onde usamos o teorema de Wigner-Eckar. Note que c_{jm} não depende de α', α e V. Como $\mathbf{J}.\mathbf{V}$ é um escalar $\langle\ |\mathbf{J}.\mathbf{V}|\ \rangle$ não depende de m. Assim, $\therefore\ c_{jm} = c_j$

Teorema da Projeção

No slide anterior obtivemos: $\langle\alpha',jm|\mathbf{J}.\mathbf{V}|\alpha,jm\rangle = c_j\langle\alpha',j||\mathbf{V}||\alpha,j\rangle$.

Note que c_j não depende da escolha de $\mathbf{V}$. Tome, portanto, $\mathbf{V}=\mathbf{J}$ e escreva para $\alpha'=\alpha$: $\langle\alpha,jm|J^2|\alpha,jm\rangle = c_j\langle\alpha,j||\mathbf{J}||\alpha,j\rangle$. Dividindo uma expressão pela outra, para se livrar de c_j temos: $\dfrac{\langle\alpha',jm|\mathbf{J}.\mathbf{V}|\alpha,jm\rangle}{\langle\alpha,jm|J^2|\alpha,jm\rangle} = \dfrac{\langle\alpha',j||\mathbf{V}||\alpha,j\rangle}{\langle\alpha,j||\mathbf{J}||\alpha,j\rangle}$

Usando duas vezes o Teorema de Wigner-Eckar, uma para $\langle\alpha',j||\mathbf{V}||\alpha,j\rangle$ e outra para $\langle\alpha,j||\mathbf{J}||\alpha,j\rangle$, tome a razão entre as expressões e note que os coeficientes são iguais e se cancelam. Assim, obtemos a fração: $\dfrac{\langle\alpha',j||\mathbf{V}||\alpha,j\rangle}{\langle\alpha,j||\mathbf{J}||\alpha,j\rangle} = \dfrac{\langle\alpha',jm'|V_q|\alpha,jm\rangle}{\langle\alpha,jm'|J_q|\alpha,jm\rangle}$ que quando substituída na expressão acima, demonstra o teorema da projeção:

$$\boxed{\langle\alpha',jm'|V_q|\alpha,jm\rangle = \frac{\langle\alpha',jm|\mathbf{J}.\mathbf{V}|\alpha,jm\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\langle jm'|J_q|jm\rangle,}$$

onde usamos $\begin{cases}\langle\alpha,jm|J^2|\alpha,jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)\\ \langle\alpha,jm'|J_q|\alpha,jm\rangle = \langle jm'|J_q|jm\rangle\end{cases}$