

## Relação de Incerteza

Na aula passada apresentamos a forma geral da relação de incerteza:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2, \text{ onde } A \text{ e } B \text{ são observáveis.}$$

Para prová-la, demonstraremos 3 lemas.

**Lema 1:** A desigualdade de Schwarz  $\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2$   
(É análoga à  $|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2$  do espaço real Euclideano)

**Demonstração:**

$$\langle (\alpha + \lambda^* \beta) | (\alpha + \lambda \beta) \rangle \geq 0 \text{ isto porque } \langle \gamma | \gamma \rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle + \lambda^* \langle \beta | \alpha \rangle + \lambda \langle \alpha | \beta \rangle + \lambda^* \lambda \langle \beta | \beta \rangle \geq 0$$

$$\text{tome } \lambda = -\frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \text{ (vale para } \forall \lambda \text{ } \therefore \text{ vale para esse também)}$$

$$\text{A expressão fica } \langle \alpha | \alpha \rangle - \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \langle \beta | \alpha \rangle - \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \langle \alpha | \beta \rangle + \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \langle \beta | \beta \rangle \geq 0$$

Multiplicando tudo por  $\langle \beta | \beta \rangle$  encontramos a expressão desejada.

## Relação de Incerteza

**Lema 2:** Se  $X^\dagger = X \longrightarrow \langle X \rangle$  é real

**Demonstração:**  $\langle \alpha | X^\dagger | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle^*$ , c.q.d.

**Lema 3:** Se  $X^\dagger = -X \longrightarrow \langle X \rangle$  é imaginário

**Demonstração:**  $\langle \alpha | X^\dagger | \alpha \rangle = -\langle \alpha | X | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle^*$ , c.q.d.

Prontos para demonstrar a forma geral da relação de incerteza. Considere  $|\alpha\rangle \equiv \Delta A|\rangle$  e  $|\beta\rangle \equiv \Delta B|\rangle$ , onde  $|\rangle$  é um ket arbitrário e  $\Delta A$  e  $\Delta B$  são as varianças de  $A$  e  $B$ . Com isso, podemos escrever as componentes da

$$\text{desigualdade de Schwarz} \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha | \alpha \rangle = \langle | \Delta A^\dagger \Delta A | \rangle = \langle | (\Delta A)^2 | \rangle, \text{ pois } \Delta A^\dagger = \Delta A \\ \langle \beta | \beta \rangle = \langle | \Delta B^\dagger \Delta B | \rangle = \langle | (\Delta B)^2 | \rangle, \text{ pois } \Delta B^\dagger = \Delta B, \\ | \langle \alpha | \beta \rangle |^2 = | \langle | \Delta A \Delta B | \rangle |^2 \end{array} \right.$$

E assim  $\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq | \langle \alpha | \beta \rangle |^2$  nos leva à  $\langle | (\Delta A)^2 | \rangle \langle | (\Delta B)^2 | \rangle \geq | \langle | \Delta A \Delta B | \rangle |^2$

## Relação de Incerteza

- $\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} [\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2} \{\Delta A, \Delta B\}$
- $[\Delta A, \Delta B] = \Delta A \Delta B - \Delta B \Delta A = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) - (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) =$   
 $= AB - A\langle B \rangle - \langle A \rangle B + \langle A \rangle \langle B \rangle - BA + B\langle A \rangle + \langle B \rangle A - \langle B \rangle \langle A \rangle = [A, B]$

*Note que isto não é verdade para  $\{\Delta A, \Delta B\}$ .*

- $([A, B])^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A, B]$   
 o que faz do valor médio dele, um imaginário puro para qualquer ket. Como  $\{\Delta A, \Delta B\}^\dagger = \{\Delta A, \Delta B\}$ , o seu valor médio seria real para qualquer ket.

$$\text{Assim, } \langle \Delta A \Delta B \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle [A, B] \rangle}_{\text{imaginário puro}} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle}_{\text{real puro}}$$

- $\therefore |\langle \Delta A \Delta B \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle|^2 =$   
 $= \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle|^2$ 

}	Se é maior que a soma de
	números positivos, é maior que cada parcela.

e assim, como  $\langle |(\Delta A)^2| \rangle \langle |(\Delta B)^2| \rangle \geq |\langle \Delta A \Delta B \rangle|^2$ , vale

$$\langle |(\Delta A)^2| \rangle \langle |(\Delta B)^2| \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2, \text{ c.q.d.}$$

## Mudança de Base ou mudança de representação

Pense em  $|+\rangle, |-\rangle$  ou  $|S_x; +\rangle, |S_x; -\rangle$  e suas relações.

Base de autokets de  $A$ ,  $\{|a'\rangle\} \longrightarrow \begin{cases} \text{Representação de } A \text{ ou} \\ \text{Representação diagonal de } A. \end{cases}$

Queremos relacionar a base de autokets de  $A$ ,  $\{|a'\rangle\}$ , com a base de  $B$ ,  $\{|b'\rangle\}$ .  
base velha base nova

### Operador de transformação

**Teorema:** Dados 2 conjuntos de kets, ambos satisfazendo relações de ortogonalidade e completeza,  $\exists$  um operador unitário  $U$ , tal que

$$|b^{(1)}\rangle = U|a^{(1)}\rangle, |b^{(2)}\rangle = U|a^{(2)}\rangle, \dots |b^{(N)}\rangle = U|a^{(N)}\rangle, \dots$$

$$U \text{ unitário} \longrightarrow U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \quad (\text{note que } U^\dagger = U^{-1})$$

**Demonstração:** Demonstramos este teorema por construção explícita.

Pressupomos que o seguinte operador resolve o assunto:

$$U = \sum_k |b^{(k)}\rangle \langle a^{(k)}|, \text{ e para verificar, aplique-o em } |a^{(\ell)}\rangle$$

$$U|a^{(\ell)}\rangle = \sum_k |b^{(k)}\rangle \langle a^{(k)}|a^{(\ell)}\rangle = \sum_k |b^{(k)}\rangle \delta_{k,\ell} = |b^{(\ell)}\rangle.$$

*Será que  $U U^\dagger = \mathbb{1}$ ?*

$$U^\dagger U = \left( \sum_k |b^{(k)}\rangle \langle a^{(k)}| \right)^\dagger \left( \sum_\ell |b^{(\ell)}\rangle \langle a^{(\ell)}| \right) = \sum_{k\ell} |a^{(k)}\rangle \delta_{k,\ell} \langle a^{(\ell)}| = \mathbb{1}$$

## Matriz de Transformação I

É instrutivo estudar a representação matricial de  $U$  na base antiga  $\{|a'\rangle\}$

$$\langle a^{(\ell)} | U | a^{(k)} \rangle = \langle a^{(\ell)} | \left( \sum_m | b^{(m)} \rangle \underbrace{\langle a^{(m)} |}_{\delta_{m,k}} | a^{(k)} \rangle \right) = \langle a^{(\ell)} | b^{(k)} \rangle$$

Ou seja, o elemento de matriz do operador de transformação da base antiga para a base nova é o produto escalar entre o bra da base antiga e ket da base nova. Tem uma analogia com a matriz de rotação de vetores do espaço tridimensional de  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  para  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ , que pode ser escrita por:

$$R = \begin{pmatrix} \hat{x} \cdot \hat{x}' & \hat{x} \cdot \hat{y}' & \hat{x} \cdot \hat{z}' \\ \hat{y} \cdot \hat{x}' & \hat{y} \cdot \hat{y}' & \hat{y} \cdot \hat{z}' \\ \hat{z} \cdot \hat{x}' & \hat{z} \cdot \hat{y}' & \hat{z} \cdot \hat{z}' \end{pmatrix}$$

A matriz feita pelos elementos  $\langle a^{(\ell)} | U | a^{(k)} \rangle$  é conhecida por matriz de transformação da base  $\{|a'\rangle\}$  para a base  $\{|b'\rangle\}$ .

## Matriz de Transformação II

Conhecendo o ket  $|\alpha\rangle$  na base  $\{|a'\rangle\}$ , como escrevê-lo na base  $\{|b'\rangle\}$ ?

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle$$

Para obter  $|\alpha\rangle$  na nova base  $\{|b'\rangle\}$ , use  $\langle b^{(k)}|\alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle b^{(k)}|a^{(\ell)}\rangle \langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle$ ,

$$\begin{aligned} \text{ou ainda, } \langle b^{(k)}|\alpha\rangle &= \sum_{\ell} \langle a^{(\ell)}|b^{(k)}\rangle^* \langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle a^{(\ell)}|U|a^{(k)}\rangle^* \langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle = \\ &= \sum_{\ell} \langle a^{(k)}|U^\dagger|a^{(\ell)}\rangle \langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle \implies (\text{Nova}) = (U^\dagger) (\text{Velha}) \end{aligned}$$

Como obter  $\langle b^{(k)}|X|b^{(\ell)}\rangle$ ? Como  $|b^{(\ell)}\rangle = U|a^{(\ell)}\rangle$  e  $\langle b^{(k)}| = \langle a^{(k)}|U^\dagger$ , temos

$$\langle b^{(k)}|X|b^{(\ell)}\rangle = \langle a^{(k)}|U^\dagger X U|a^{(\ell)}\rangle$$

$X' = U^\dagger X U$  é conhecida por transformação de similaridade.

## Matriz de Transformação III

Uma propriedade interessante de uma matriz é o traço,  $tr X \equiv \sum_{a'} \langle a' | X | a' \rangle$

$$\begin{aligned} tr X &= \sum_{a'} \langle a' | X | a' \rangle = \sum_{a'} \sum_{b'} \sum_{b''} \langle a' | b' \rangle \langle b' | X | b'' \rangle \langle b'' | a' \rangle = \\ &= \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b' | X | b'' \rangle \left( \sum_{a'} \langle b'' | a' \rangle \langle a' | b' \rangle \right) = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b' | X | b'' \rangle \delta_{b' b''} = \\ &= \sum_{b'} \langle b' | X | b' \rangle \text{ o traço não depende da representação} \end{aligned}$$

Mostre que:

- 1)  $tr(XY) = tr(YX)$ ;
- 2)  $tr(U^\dagger XU) = tr(X)$ ;
- 3)  $tr(|a'\rangle\langle a''|) = \delta_{a' a''}$ ;
- 4)  $tr(|b'\rangle\langle a'|) = \langle a' | b' \rangle$

## Autokets, autovalores e diagonalização de matrizes

Como resolver o problema  $B|b'\rangle = b'|b'\rangle$ , supondo conhecida a base  $\{|a'\rangle\}$ ?

Multiplique pela esquerda pelo bra  $\langle a'|$  e use o operador unidade

$$\sum_{a''} \langle a'|B|a''\rangle \langle a''|b'\rangle = b' \langle a'|b'\rangle?$$

O que transforma o problema em um problema matricial

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix} = b^{(\ell)} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{com } B_{i,j} = \langle a^{(i)}|B|a^{(j)}\rangle \text{ e } C_k^{(\ell)} = \langle a^{(\ell)}|b^{(k)}\rangle$$

Soluções não triviais só se  $\det(B - \lambda I) = 0$ . Lembre que:

Matrizes Hermiteanas são diagonalizáveis

## Observáveis unitárias equivalentes

**Teorema.** Sejam  $|a'\rangle$  e  $|b'\rangle$  conectados pelo operador de transformação  $U$ ,  $U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|$ . Os operadores  $A$  e  $UAU^{-1}$  têm o mesmo espectro e são denominadas observáveis unitárias equivalentes.

**Demo.:** Se  $A|a^{(\ell)}\rangle = a^{(\ell)}|a^{(\ell)}\rangle \longrightarrow UAU^{-1}U|a^{(\ell)}\rangle = a^{(\ell)}U|a^{(\ell)}\rangle$ .  
 $\therefore A$  e  $UAU^{-1}$  têm o mesmo espectro, onde  $\{|a'\rangle\}$  são autokets de  $A$  e  $\{U|a'\rangle = |b'\rangle\}$  são autokets de  $UAU^{-1}$ .

Por definição  $B|b^{(\ell)}\rangle = b^{(\ell)}|b^{(\ell)}\rangle \therefore B$  e  $UAU^{-1}$  podem ser diagonalizados simultaneamente (compatíveis)

Se são compatíveis, comutam. Mostre, portanto, que mesmo que  $[A, B] \neq 0$ ,  $[UAU^{-1}, B] = 0$

Um bom exemplo são as observáveis  $S_x$  e  $S_z$ . Elas não comutam, estão relacionadas por uma operação unitária (rotação de  $\frac{\pi}{2}$  ao redor de  $y$ ), e possuem o mesmo espectro. No caso  $US_xU^{-1} = S_z$



## Posição, Momento e Translação

- Um bom começo: Espectro contínuo. Considere

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle, \quad \xi = x, y, z, p_x, p_y, p_x, \text{ etc.}$$

$\xi$  é um operador, cujo espectro  $\xi'$  pode variar continuamente entre  $-\infty$  e  $+\infty$

- Faremos a seguinte analogia com o espectro discreto:

$$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''} \longrightarrow \langle \xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi'')$$

$$\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = \mathbb{1} \longrightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle\langle \xi'| = \mathbb{1}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle = \int d\xi' |\xi'\rangle\langle \xi'|\alpha\rangle$$

$$\sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = 1 \longrightarrow \int d\xi' |\langle \xi'|\alpha\rangle|^2 = 1$$

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle \beta|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \longrightarrow \langle \beta|\alpha\rangle = \int d\xi' \langle \beta|\xi'\rangle\langle \xi'|\alpha\rangle$$

$$\langle a''|A|a'\rangle = a'\delta_{a'a''} \longrightarrow \langle \xi''|\xi|\xi'\rangle = \xi'\delta(\xi'' - \xi')$$

## Autokets de posição e medidas de posição

$$x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$

↑ operador      ↑ número

Suponha partícula no estado  $|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle$

Experimento de medir  $x$ , clica só quando ela estiver em  $x'$ . O estado  $|\alpha\rangle$  muda abruptamente para  $|x'\rangle$ . Na prática, um intervalo pequeno ao redor de  $x'$ , algo

entre  $x' - \frac{\Delta}{2}$  e  $x' + \frac{\Delta}{2}$ . Nestas condições o estado  $|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle$

colapsa, com a medida, para  $\int_{x' - \frac{\Delta}{2}}^{x' + \frac{\Delta}{2}} dx'' |x''\rangle \langle x''|\alpha\rangle$ . Considerando que  $\langle x''|\alpha\rangle$

varia pouco no intervalo, podemos escrever que a probabilidade de encontrar a partícula em  $x'$ , é  $|\langle x'|\alpha\rangle|^2 dx'$ . Para escrever isso, assumimos  $dx' = \Delta$ .

de fato, entre  $x'$  e  $x' + dx'$

função de onda

Note que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle x'|\alpha\rangle|^2 dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \alpha|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle dx' = \langle \alpha|\alpha\rangle = 1$

## Extrapolando para 3 dimensões

$$|\mathbf{x}'\rangle \equiv |x', y', z'\rangle$$

$$x|\mathbf{x}'\rangle = x'|\mathbf{x}'\rangle; \quad y|\mathbf{x}'\rangle = y'|\mathbf{x}'\rangle; \quad z|\mathbf{x}'\rangle = z'|\mathbf{x}'\rangle.$$

Assumiremos que  $[x_i, x_j] = 0$  e que a base  $\{|\mathbf{x}'\rangle\}$  é completa

↙

$$x_i \text{ e } x_j = x, y, z$$

Um estado  $|\alpha\rangle$  de uma partícula em um espaço tridimensional pode, portanto, ser escrito por:

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

Agora, a quantidade  $d^3x' |\langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle|^2$  representa a probabilidade de encontrar a partícula em  $\mathbf{x}'$  dentro do elemento de volume  $d^3x'$

## Translação (deslocamento espacial)

Este operador atua em um estado  $|\mathbf{x}'\rangle$  de uma partícula que se encontra em  $\mathbf{x}'$  e a leva para um novo estado, agora  $|\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle$

$$\mathfrak{T}(d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle$$

Operador de deslocamento infinitesimal
Fase igual a 1 por convenção

Note que  $|\mathbf{x}'\rangle$  não é autoket de  $\mathfrak{T}(d\mathbf{x}')$ .

$$\begin{aligned} \text{O efeito de } \mathfrak{T}(d\mathbf{x}') \text{ sobre } |\alpha\rangle &\rightarrow \mathfrak{T}(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle = \mathfrak{T}(d\mathbf{x}') \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle \\ &= \int d^3x' |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle \\ &= \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' - d\mathbf{x}'|\alpha\rangle \end{aligned}$$

função de onda calculada em  $\mathbf{x}' - d\mathbf{x}'$

## Propriedades do Operador de Translação

- 1) Se  $|\alpha\rangle$  é normalizado  $\rightarrow \mathfrak{T}(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle$  também é normalizado  
 $\rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha|\mathfrak{T}^\dagger(d\mathbf{x}')\mathfrak{T}(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle = 1$   
**basta**  $\rightarrow \mathfrak{T}^\dagger(d\mathbf{x}')\mathfrak{T}(d\mathbf{x}') = 1$

- 2) Translação primeiro em  $d\mathbf{x}'$  e depois em  $d\mathbf{x}''$  tem que resultar em  $d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}''$   
 $\mathfrak{T}(d\mathbf{x}'')\mathfrak{T}(d\mathbf{x}') = \mathfrak{T}(d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'')$

3)  $\mathfrak{T}(-d\mathbf{x}') = \mathfrak{T}^{-1}(d\mathbf{x}')$

- 4)  $\lim_{d\mathbf{x}' \rightarrow 0} \mathfrak{T}(d\mathbf{x}') = 1$  neste limite basta primeira ordem em  $d\mathbf{x}'$   
 para representar  $\mathfrak{T}(d\mathbf{x}')$ . Adotaremos  $\mathfrak{T}(d\mathbf{x}') = 1 - i\mathbf{K}.d\mathbf{x}'$

- 5) Se  $K_x, K_y, K_z$  forem operadores Hermiteanos, mostraremos que  
 $\mathfrak{T}$  satisfaz as 3 primeiras propriedades