

Enfoque de Schrödinger versus Enfoque de Heisenberg

Os kets evoluindo no tempo é a forma de Schrödinger olhar o problema. Uma outra maneira é deixar que as observáveis evoluam no tempo: é o enfoque de Heisenberg. Para discutí-lo, precisamos saber um pouco mais sobre operadores unitários.

Já vimos 3 tipos $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) um para mudanças de base, } U \\ \text{b) um para translação, } \mathfrak{S}(d\mathbf{x}) \\ \text{c) um para evolução temporal, } U(t, t_0) \end{array} \right.$

O tipo a) não muda o ket, só sua forma de representá-lo. Os tipos b) e c) mudam o ket.

Transformações unitárias que mudam os kets

Suponha $\left\{ \begin{array}{l} |\alpha\rangle \rightarrow U|\alpha\rangle \\ |\beta\rangle \rightarrow U|\beta\rangle \end{array} \right.$ e note que $\langle\beta|\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$

Como fica o elemento de matriz?

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \rightarrow (\langle\beta|U^\dagger)X(U|\alpha\rangle) = \langle\beta|(U^\dagger XU)|\alpha\rangle$$

O resultado é o mesmo

Por um lado, afetam os kets e não afetam os operadores

Por outro, não afetam os kets e afetam os operadores

Schrödinger X Heisenberg

Para o mesmo $\langle \beta | U^\dagger X U | \alpha \rangle$, temos $\begin{cases} \text{enfoque 1: } |\alpha\rangle \longrightarrow U|\alpha\rangle \text{ e } X \longrightarrow X \\ \text{enfoque 2: } |\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle \text{ e } X \longrightarrow U^\dagger X U \end{cases}$

Exemplificando as diferenças de enfoque para deslocamentos espaciais

Enfoque 1: $\mathfrak{S}(d\mathbf{x}')$ afeta o ket, mas não muda o operador \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \text{kets mudam } |\alpha\rangle &= \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \longrightarrow \left(1 - \frac{i\mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \\ &= \left(1 - \frac{i\mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar}\right) \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int d^3x' |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \end{aligned}$$

operadores não mudam $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}$

Enfoque 2: $\mathfrak{S}(d\mathbf{x}')$ não afeta o ket, mas muda o operador \mathbf{x}

kets não mudam $|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle$

$$\text{operadores mudam } \mathbf{x} \longrightarrow \left(1 + \frac{i\mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar}\right) \mathbf{x} \left(1 - \frac{i\mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar}\right)$$

$$= \mathbf{x} + \frac{i}{\hbar} [\mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}', \mathbf{x}] + O(d\mathbf{x}')^2 = \mathbf{x} + \frac{i}{\hbar} [p_x dx' + p_y dy' + p_z dz', x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]$$

$$= \mathbf{x} + \frac{i}{\hbar} \{ dx' \hat{i} [p_x, x] + dy' \hat{j} [p_y, y] + dz' \hat{k} [p_z, z] \} = \mathbf{x} + d\mathbf{x}'$$

Schrödinger X Heisenberg

Quanto muda o elemento de matriz $\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle$, segundo os dois enfoques?

No enfoque 1. Use resultado do slide anterior:

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle &\rightarrow \left\{ \int d^3 x'' \langle \alpha | \mathbf{x}'' \rangle \langle \mathbf{x}'' + d\mathbf{x}' | \right\} \mathbf{x} \left\{ \int d^3 x' | \mathbf{x}' + d\mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle \right\} \\
 &= \int d^3 x'' \int d^3 x' \langle \alpha | \mathbf{x}'' \rangle (\mathbf{x}' + d\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \\
 &= \int d^3 x' \langle \alpha | \mathbf{x}' \rangle (\mathbf{x}' + d\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int d^3 x' \langle \alpha | (\mathbf{x}' + d\mathbf{x}') | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \\
 &= \int d^3 x' \langle \alpha | (\mathbf{x} + d\mathbf{x}') | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\mathbf{x} + d\mathbf{x}') | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x} \rangle_\alpha + \langle d\mathbf{x}' \rangle_\alpha
 \end{aligned}$$

No enfoque 2. Use resultado do slide anterior e obtenha, diretamente:

$$\langle \alpha | (\mathbf{x} + d\mathbf{x}') | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x} \rangle_\alpha + \langle d\mathbf{x}' \rangle_\alpha$$

Estados (kets) e observáveis segundo Schrödinger e Heisenberg

$U(t, t_0)$ tem papel chave na estória $\begin{cases} \text{Enfoque 1} \longrightarrow \text{Schrödinger} \\ \text{Enfoque 2} \longrightarrow \text{Heisenberg} \end{cases}$

No enfoque de Schrödinger, as observáveis não evoluem no tempo. Os kets mudam de acordo com $U(t, t_0)$, como já vimos.

No enfoque de Heisenberg os kets não evoluem no tempo e as observáveis evoluem com auxílio de $U(t, t_0)$.

Para simplificar, tomaremos

$U(t, t_0 = 0) = U(t) = \exp\left(-i\frac{Ht}{\hbar}\right)$ e a seguinte notação:

$$A^{(H)}(t) = U^\dagger(t)A^{(S)}U(t).$$

Assim, para $t = 0$, temos $A^{(H)}(0) = A^{(S)}$ (pois, $U^\dagger(0) = U(0) = 1$) e

$$|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_S = U(t)|\alpha, t_0 = 0\rangle$$

$$|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_H = |\alpha, t_0 = 0\rangle \quad \forall t$$

Quanto vale o valor esperado de A nos dois enfoques?

$$\begin{aligned} {}_S\langle\alpha, t_0 = 0, t|A^{(S)}|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_S &= \langle\alpha, t_0 = 0|U^\dagger(t)A^{(S)}U(t)|\alpha, t_0 = 0\rangle = \\ &= {}_H\langle\alpha, t_0 = 0, t|A^{(H)}|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_H \end{aligned}$$

Equação de movimento de Heisenberg

Consideraremos $A^{(S)}(t) = A^{(S)}$, sem dependência explícita com o tempo. Comece por $A^{(H)}(t) = U^\dagger(t)A^{(S)}U(t)$, e derive esta equação com respeito ao tempo

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} A^{(S)} U(t) + U^\dagger(t) A^{(S)} \frac{\partial U(t)}{\partial t}$$

mas, $i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU \therefore \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} HU$ e $\frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger H$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \frac{dA^{(H)}}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t) H A^{(S)} U(t) + U^\dagger(t) A^{(S)} \frac{1}{i\hbar} H U(t) = \\ &= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t) H \underbrace{U(t)U^\dagger(t)}_1 A^{(S)} U(t) + \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t) A^{(S)} \underbrace{U(t)U^\dagger(t)}_1 H U(t) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} H^{(H)} A^{(H)} + \frac{1}{i\hbar} A^{(H)} H^{(H)} = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H^{(H)}] \end{aligned}$$

mas, $H^{(H)} = U^\dagger(t)H^{(S)}U(t) = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)H \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) = H$.

Assim, finalmente, temos a equação de Heisenberg:

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H]$$

Equação de movimento de Heisenberg

A equação de Heisenberg: $\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H]$ é muito similar à equação clássica de movimento $\frac{dA}{dt} = [A, H]_{\text{clássico}}$

Note, entretanto, que a equação quântica tem sentido, mesmo quando não existe análogo clássico, como é o caso de spin:

$$\frac{dS_i^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [S_i^{(H)}, H] \rightarrow S_i^{(H)} \text{ não pode ser escrito em termos de } p \text{ e } q's.$$

Assim, é melhor virar a ordem da flecha

$$\text{de } [A, H]_{\text{clássico}} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H]$$

$$\text{para } \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H] \rightarrow [A, H]_{\text{clássico}}$$

Clássica pode ser deduzida da quântica, vice-versa nem sempre.

Construindo a Hamiltoniana Quântica

Precisamos aprender a construir a Hamiltoniana na Mecânica Quântica. Faça o seguinte:

1) Quando tem análogo clássico, usaremos a Hamiltoniana clássica. Simplesmente trocaremos as variáveis clássicas x_i e p_i por operadores correspondentes. Veremos que com esta hipótese, poderemos reproduzir as equações clássicas corretas no limite clássico. Caso a Hamiltoniana clássica não seja simétrica com respeito à operadores que não comutam entre si, torne-a simétrica. Por exemplo, se $H = xp$, use $H = \frac{1}{2}(xp + px)$.

2) Quando não tem análogo clássico, “chute” H e veja se os resultados reproduzem a experiência.

Para F e G expandíveis em série de potências, vale:

$$\begin{cases} [x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ [p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i} \end{cases}$$

Construindo a Hamiltoniana Quântica

Para provar a relação $[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}$, comece pela expansão em p_i de $F(\mathbf{p})$

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} + \frac{1}{1!} \frac{\partial F}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} p_i^1 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} p_i^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial p_i^n}(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} p_i^n + \dots$$

Primeiro, derive a expressão acima com respeito à p_i

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{1}{1!} \frac{\partial F}{\partial p_i}(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} p_i^0 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} 2p_i^1 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial p_i^n}(\mathbf{p}) \Big|_{(p_i=0)} n p_i^{n-1} + \dots$$

depois, compare com $[x_i, F(\mathbf{p})]$, usando a expansão de $F(\mathbf{p})$ e as regras de comutação abaixo:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{i,j}; \quad [x_i, p_j^2] = [x_i, p_j] p_j + p_j [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{i,j} p_j + i\hbar \delta_{i,j} p_j = 2i\hbar p_j \delta_{i,j};$$

$$[x_i, p_j^3] = [x_i, p_j] p_j^2 + p_j [x_i, p_j^2] = i\hbar \delta_{i,j} p_j^2 + 2i\hbar \delta_{i,j} p_j^2 = 3i\hbar p_j^2 \delta_{i,j}; \quad \dots$$

$$[x_i, p_j^n] = ni\hbar p_j^{n-1} \delta_{i,j}; \quad \dots \text{ etc. (faça por indução finita)}$$

De forma similar é possível mostrar que $[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$

Equação de Heisenberg para uma partícula livre

Suponha uma partícula livre de massa m . Como seria a Hamiltoniana? Que tal?

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

O futuro será definido pela equação

$$\frac{dp_i^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_i^{(H)}, H] = 0$$

ou seja, para uma partícula livre, o operador momento é uma constante

de movimento $p_i^{(H)}(t) = p_i^{(H)}(0) = p_i^{(S)}(0) = p_i$

É possível generalizar. Se $[A^{(H)}, H] = 0 \rightarrow A^{(H)}$ é constante de movimento.

Como fica $x_i^{(H)}(t)$? Basta resolver a equação de Heisenberg para este operador

$$\frac{dx_i^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x_i^{(H)}, H] = \frac{1}{i\hbar} [x_i^{(H)}, \sum_j \frac{p_j^2}{2m}] = \frac{1}{i\hbar 2m} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_j p_j^2 = \frac{p_i}{m}$$

ou seja, $\frac{dx_i^{(H)}}{dt} = \frac{p_i}{m} \therefore x_i^{(H)}(t) = x_i^{(H)}(0) + \frac{p_i}{m}t$. Cuidado! $[x_i^{(H)}(0), x_j^{(H)}(0)] = 0$,

mas $[x_i^{(H)}(t), x_i^{(H)}(0)] = [x_i^{(H)}(0) + \frac{p_i}{m}t, x_i^{(H)}(0)] = \frac{t}{m} [p_i, x_i^{(H)}(0)] = -\frac{i\hbar t}{m}$

Isto tem consequências interessantes!

Equação de Heisenberg para uma partícula livre

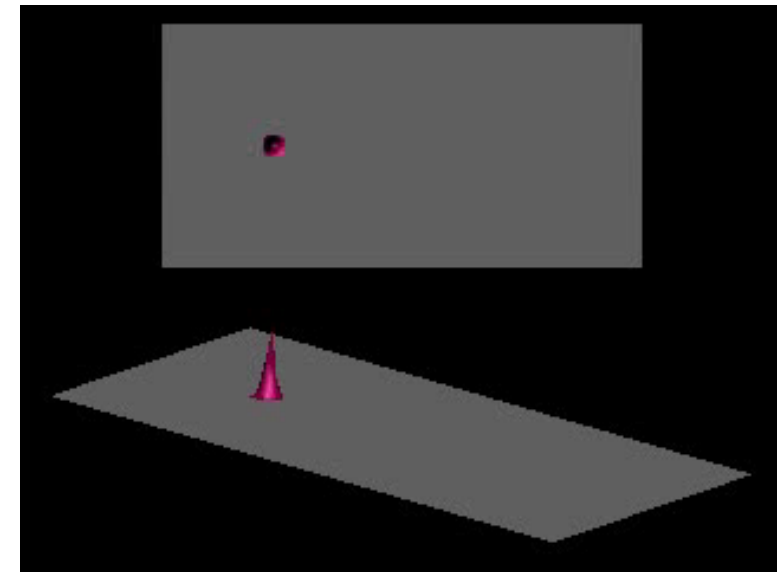
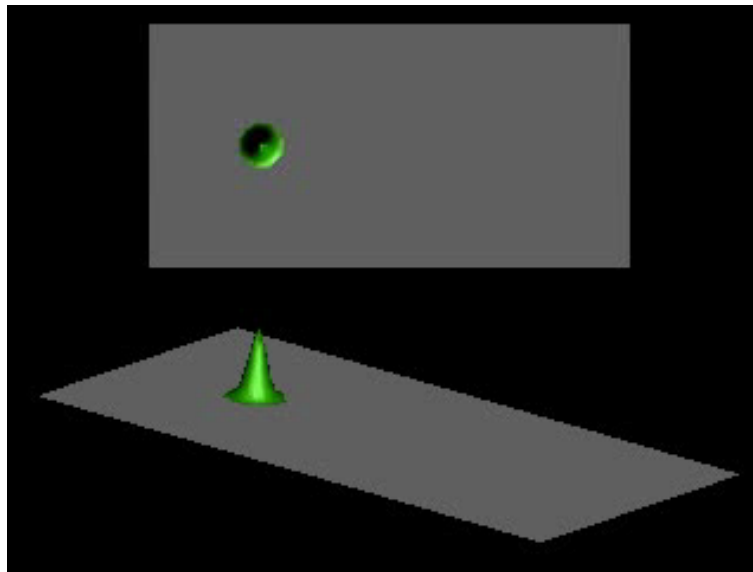
De $[x_i^{(H)}(t), x_i^{(H)}(0)] = -\frac{i\hbar t}{m}$

e da expressão $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$, onde A e B são observáveis, tiramos:

$$\langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_t \langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_{t=0} \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \quad (\text{o mesmo vale no enfoque de Schrödinger?})$$

Mesmo se $\langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_{t=0}$ for pequeno (a partícula bem localizada em $t=0$),

$\langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_t$ vai crescer, pelo menos com $\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$, e o pacote vai abrir.



Equação de Heisenberg para uma partícula em um potencial

Adicionemos um potencial $V(\mathbf{x})$. Teremos, então, $H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ e as

$$\text{equações de Heisenberg para } x_i \text{ e } p_i, \begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_i, V(\mathbf{x})] = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}) \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x_i, \frac{p^2}{2m}] = \frac{p_i}{m} \end{cases}$$

Derivando a segunda equação com relação ao tempo e, fazendo uso da primeira, obtemos

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{dx_i}{dt}, H \right] = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{p_i}{m}, H \right] = \frac{1}{m} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}).$$

$$\therefore m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

Tirando média (estado $|\alpha\rangle$), temos :

$$\underbrace{m \frac{d^2 \langle \mathbf{x} \rangle}{dt^2}} = \frac{d \langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = -\langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle \quad (\text{note que não depende de } \hbar)$$

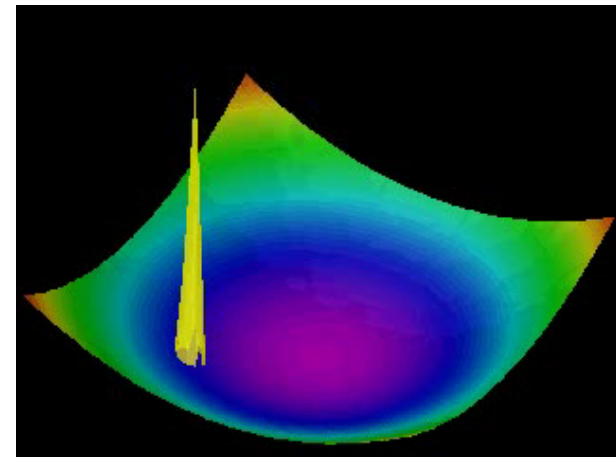
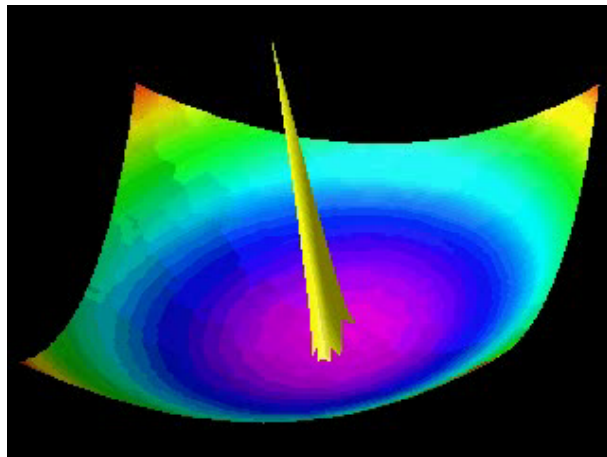
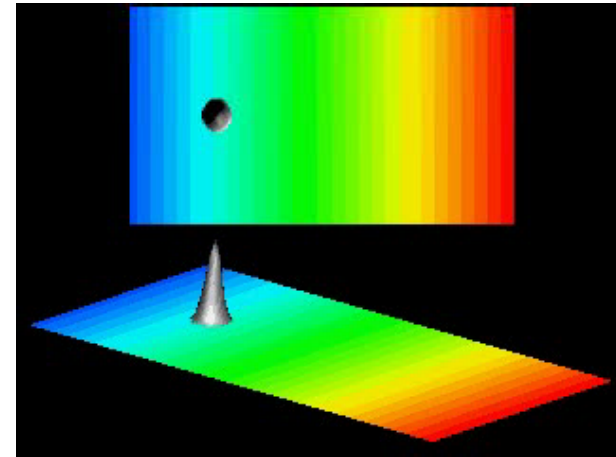
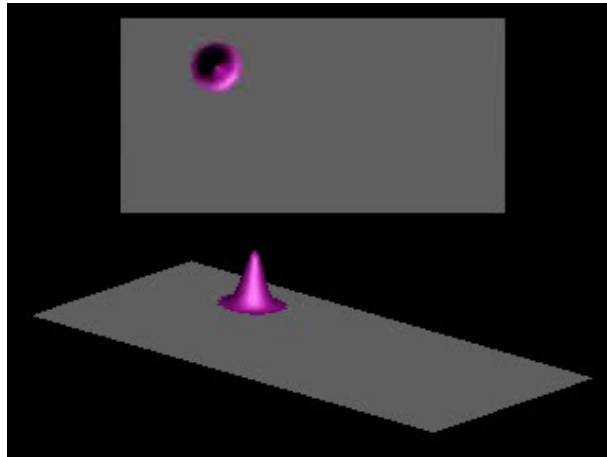
Equação de Ehrenfest (induz a idéia que o centro do pacote é clássico).

Cuidado com a diferença entre $-\langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle$ e $-\nabla V(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\langle \mathbf{x} \rangle}$

Teorema de Ehrenfest

Teorema de Ehrenfest (induz a idéia que o centro do pacote é clássico)

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{d \langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = - \langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle$$



Base de kets e amplitudes de transição

Até o momento, não discutimos como a base de kets evolui no tempo. No enfoque de Schrödinger, a base é obtida com auxílio de uma observável A , que não depende explicitamente do tempo, e portanto a base não depende do tempo. No enfoque de Heisenberg, a observável A evolui no tempo e, devemos esperar que a base também evolua. Ou seja, o fato do ket estado ficar constante no tempo no enfoque de Heisenberg, não implica que a base de kets também fique.

No enfoque de Schrödinger, temos: $A|a'\rangle = a'|a'\rangle \rightarrow$ base $\{|a'\rangle\}$ não evolui no tempo.

O que mudaria no enfoque de Heisenberg, lembrando que: $A^{(H)}(t) = U^\dagger A(0)U$?

Comece com $A|a'\rangle = a'|a'\rangle \rightarrow$ **Inseri I** $AUU^\dagger|a'\rangle = a'|a'\rangle \rightarrow$ **multipliquei por** $U^\dagger AUU^\dagger|a'\rangle = a'U^\dagger|a'\rangle$
 e obtenha $A^{(H)}|a', t\rangle_H = a'|a', t\rangle_H$ com $|a', t\rangle_H = U^\dagger|a'\rangle \rightarrow$ base de Heisenberg feitas de kets $\rightarrow \{|a', t\rangle_H\} = \{U^\dagger|a'\rangle\}$ que evoluem no tempo.

Base de kets e amplitudes de transição

Observe que os kets da base de Heisenberg $\{|a', t\rangle_H\}$, onde $|a', t\rangle_H = U^\dagger(t, 0)|a'\rangle$ evoluem ao contrário no tempo (efeito do U^\dagger).

Como U satisfaz a equação de Schrödinger, temos que

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) = HU(t)\right\}^\dagger \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t) = HU^\dagger(t)$$

satisfaz uma equação de Schrödinger com sinal trocado.

Aplicando esta equação em um ket $|a'\rangle$, encontramos que kets da base de Heisenberg, também satisfazem a equação de Schrödinger com sinal trocado

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t)|a'\rangle = HU^\dagger(t)|a'\rangle \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a', t\rangle_H = -H|a', t\rangle_H$$

A observável $A^{(H)}(t)$ nesta base, fica

$$\begin{aligned} A^{(H)}(t) &= \sum_{a'} A^{(H)}(t)|a', t\rangle_H \langle a', t| = \sum_{a'} a'|a', t\rangle_H \langle a', t| = \\ &= \sum_{a'} U^\dagger(t)a'|a'\rangle \langle a'|U(t) = U^\dagger(t)\left\{\sum_{a'} a'|a'\rangle \langle a'|\right\}U(t) \\ &= U^\dagger(t)A^{(S)}U(t) \text{ o que é consistente.} \end{aligned}$$

Probabilidade de uma medida nos dois enfoques

Uma boa pergunta é: Na representação da observável A , quanto valem os coeficientes de expansão de um ket genérico de Heisenberg $|\alpha\rangle_H = |\alpha, t = 0\rangle_S$ que no enfoque de Schrödinger é dado por $|\alpha, t = 0, t\rangle_S$?

Queremos comparar

$$|\alpha, t = 0, t\rangle_S = \sum_{a'} C_{a'}^{(S)}(t) |a'\rangle \quad \text{com} \quad |\alpha\rangle_H = |\alpha, t = 0\rangle_S = \sum_{a'} C_{a'}^{(H)} |a', t\rangle_H$$

$$\text{e temos: } \begin{cases} C_{a'}^{(S)}(t) = \langle a' | \alpha, t = 0, t \rangle_S = \langle a' | (U(t, 0) | \alpha, t = 0 \rangle_S \rightarrow \text{Schrödinger} \\ C_{a'}^{(H)}(t) = \underbrace{(\langle a' | U)}_{\uparrow} | \alpha, t = 0 \rangle_S \rightarrow \text{Heisenberg} \end{cases}$$

↑
bra do ket $U^\dagger(t, 0) |a'\rangle$

Encontramos $C_{a'}^{(S)}(t) = C_{a'}^{(H)}(t) = \langle a' | (U(t, 0) | \alpha, t = 0 \rangle_S$ o que é bom, pois tratam-se das amplitudes de probabilidade de medir A e encontrar a' .
(Precisavam ser iguais).

Probabilidade de uma medida nos dois enfoques

Uma outra boa pergunta é: Suponha sistema tal que em $t = 0$, medimos A e encontramos a' . No instante t , qual a probabilidade de medindo B encontrarmos b' ?

Enfoque de Schrödinger

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{mede } A} |a'\rangle \xrightarrow{t} \begin{cases} U(t)|a'\rangle \text{ ket evolui} \\ A \text{ operadores NÃO evoluem} \\ B \rightarrow \therefore \text{ base NÃO evolui} \end{cases} \xrightarrow{\text{mede } B} \langle b'|(U|a'\rangle)$$

Enfoque de Heisenberg

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{mede } A(0)} |a'\rangle \xrightarrow{t} \begin{cases} |a'\rangle \text{ ket NÃO evolui} \\ A(t) \text{ operadores evoluem} \\ B(t) \rightarrow \therefore \text{ base evolui: } U^\dagger(t)|b'\rangle \end{cases} \xrightarrow{\text{mede } B(t)} \underbrace{(\langle b'|U)|a'\rangle}$$

Ambas podem ser escritas por $\langle b'|U(t,0)|a'\rangle$, amplitude de probabilidade da transição de $|a'\rangle$ para $|b'\rangle$.