TRANSFORMADAS DE FOURIER

AULA 6 – FI001 – MECÂNICA QUÂNTICA I

PROFESSOR : MARCO AURÉLIO P. LIMA

ALUNA : ANA ELISA D. BARIONI

DEFINIÇÃO (MATEMÁTICA)

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

DEFINIÇÃO (MECÂNICA QUÂNTICA)

- Escolhendo $k = \frac{p}{\hbar}$, definimos a "constante de normalização" (que faz a inversa voltar à função original) como

  $$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

- Assim, no nosso contexto, usaremos a seguinte definição de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[f(x)](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx = F(p)$$

- E sua inversa é dada por:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(p)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

APLICAÇÃO

- Note que ao realizarmos a transformada de Fourier obtemos uma função da variável "p" (momento) a partir de uma função da variável "x" (posição) ou vice versa.

- Aí reside o propósito da transformada de Fourier, em mudar a variável do domínio da função. Se queremos uma informação em função do momento e temos tal informação em função da posição basta realizarmos a transformada de Fourier

EXEMPLO I

- Façamos um exemplo com a função gaussiana, que será uma transformada muito importante e útil ao longo do curso
- Tomemos $f(x) = e^{-\alpha x^2}$
- Então

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x + \frac{ip}{2\hbar\sqrt{\alpha}})^2} e^{-\frac{p^2}{4\hbar^2\alpha}} dx$$

EXEMPLO I

- Fazendo a seguinte troca de $u = \sqrt{\alpha}x + \frac{ip}{2\hbar\sqrt{\alpha}}$ $\Rightarrow$ $du = \sqrt{\alpha}dx$ ficamos com

$$F(p) = \frac{e^{-\frac{p^2}{4\hbar^2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} du = \frac{e^{-\frac{p^2}{4\hbar^2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](p) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\alpha}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha\hbar^2}}}$$

- Note que a transformada de Fourier de uma gaussiana em uma dimensão é também outra gaussiana

EXEMPLO II

- Outra transformada bem útil para o curso é a da função delta de Dirac. Para calculá-la vamos usar a definição da delta que aprendemos em métodos, com uma sequência delta e uma função teste.
- Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(x)](p) f(p) dp = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\phi_n(x)](p) f(p) dp$$

- Aplicando a definição de transformada de Fourier no integrando, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx \right] f(p) dp$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dp \right] dx$$

EXEMPLO II

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) F(x) dx$$

- Onde $F(x) = \mathcal{F}^{-1}[f(p)]$ é a transformada de Fourier da função teste. Assim, podemos considerar F(x) como uma uma função teste e então temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) F(x) dx = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) dp$$

EXEMPLO II

- Logo, o que obtivemos foi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(x)](p) f(p) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) dp$$

- O que nos permite concluir que

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

EXEMPLO II

- A partir dessa expressão podemos obter uma representação muito útil para a delta de Dirac, aplicando a transformada inversa na expressão anterior

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,dp$$