

# Aproximação semi-clássica

## WKB

Exercícios extra aula 11

Aluna: Ana Elise D. Barioni

RA: 165897

Professor: Marco Aurélio P. Lima

1) Use a aproximação WKB para resolver o problema da partícula saltitante no campo gravitacional:

$$V(x) = \begin{cases} mgx & , x > 0 \\ \infty & , x \leq 0 \end{cases}, \text{ onde } m = \text{massa da partícula} \\ g = \text{const gravit.}$$

Relembrando o método:

Uma partícula no potencial obedece a eq. de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Na região de  $V(\vec{r})$  constante a solução é

$$\psi(\vec{r}) = A e^{\pm i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}, \quad \vec{p} = \sqrt{2m(E - V(\vec{r}))}$$

O método consiste então em uma solução aproximada para potenciais que variam LENTAMENTE em  $\vec{r}$ .

A ideia é buscar uma solução da forma

$$\psi(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{\frac{iS(\vec{r})}{\hbar}}$$

Substituindo tal função na equação de Schrodinger, obtemos em  $\Delta D$ :

$$S(x) = \pm \int p(x) dx \quad e \quad A(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}}$$

de forma que a solução é enfim dada por

$$\Psi_{\pm}(x) = \frac{C_{\pm}}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x') dx'\right]$$

Voltando ao nosso problema

Lembramos que  $p = \sqrt{2m(E - V(\vec{r}))}$ . Logo, para  $x > 0$

$$p(x) = \sqrt{2m(E - mgx)}$$

Se  $E > mgx$ , ie, se  $x < E/mg$   $p(x) \in \mathbb{R}$

Se, por outro lado  $x > E/mg$   $p(x) = i|p(x)|$

Assim, na região classicamente permitida ( $x < E/mg$ ) temos

$$\int_0^{E/mg} p(x) dx = \sqrt{2mE} \int_0^{E/mg} \sqrt{1 - \frac{mg}{E}x} dx = \sqrt{2mE} \frac{2E}{3mg} = \sqrt{\frac{8E^3}{9mg^2}}$$

Lembrando da condição de quantização, eq (9.224) do

Zettili.  $\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = (n + \frac{3}{4})\pi\hbar$ , onde  $x_1 = 0$   
 $x_2 = E/mg$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8E^3}{9mg^2}} = (n + \frac{3}{4})\pi\hbar$$

$$\text{Logo, } E_n = \left[ \frac{9\pi^2}{8} mg^2 \pi^2 \hbar^2 \left(n + \frac{3}{4}\right)^2 \right]^{1/3}$$

Portanto, o estado fundamental é dado por

Gráfico do potencial

