

# Experimento Mental EPR

Felipe M. Silva

Universidade Estadual de Campinas

Disciplina: FI001 - Mecânica Quântica I

Prof. Dr. Marco Aurelio P. Lima

15 de junho de 2020

# Objetivo do Artigo

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

## Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*  
(Received March 25, 1935)

- Artigo publicado em 1935 por Einstein, Podolsky e Rosen:<sup>1</sup>
- O artigo afirma que ao julgar uma teoria física duas perguntas devem ser considerada:
  - ❶ A teoria está correta? Ou seja, as previsões da teoria concordam com os experimentos?
  - ❷ A descrição dada pela teoria é completa? Ou seja, não existem elementos com realidade física que não são descritos pela teoria?
- O artigo EPR busca analisar a segunda pergunta para a Teoria Quântica, considerando os operadores que não comutam;
- Os autores fazem isso propondo um experimento mental;

---

<sup>1</sup> "É Possível Considerar a Descrição da Mecânica Quântica da Realidade Física Completa?"

## Definições e Hipótese da Localidade

- Quando uma teoria pode ser considerada completa?
  - "Todo elemento de realidade física teve ter uma contraparte na teoria" para essa seja considerada completa.
- O que pode ser considerado um elemento de realidade física?
  - "Se, sem perturbar o sistema, nos conseguirmos prever com certeza o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física, o qual corresponde a quantidade prevista".
  - Ou seja, se podermos prever uma quantidade física de um sistema sem realizar uma medida direta dele, então essa quantidade é tem realidade física.
- Na mecânica quântica é entendido que a função de onda contém a descrição completa do sistema físico. Ou seja, a Mecânica Quântica é uma teoria completa.
- **Hipótese da Localidade:** Um sistema não pode ser influenciado por um evento que ocorre em uma região suficientemente distante.
  - Essa hipótese não tem muito destaque no artigo, apenas é dito que os sistemas não interagir após um intervalo de tempo. Os autores provavelmente consideravam isso trivial; são trabalhos seguintes (principalmente os de John Bell) que percebem a importância dessa hipótese;

# Operadores não comutáveis

- Na mecânica quântica existem operadores que não comutam entre si. Por exemplo:
  - $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ ;
  - $\hat{J}_x$ ,  $\hat{J}_y$  e  $\hat{J}_z$ ;
  - Em geral:  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  não comutam com  $\hat{H}$
- Isso dá origem a relações de incerteza:

$$\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |[A, B]|^2$$

- Uma interpretação comum as relações de incerteza é que elas não exprimem apenas uma impossibilidade experimental, mas uma condição da própria natureza.
- Segundo EPR: “Uma conclusão usual (...) é que quando o momento de uma partícula é conhecido, a sua coordenada de posição não tem realidade física”<sup>[1]</sup>

# ○ experimento EPR I

- Considere dois sistemas (1 e 2), que interajam durante um intervalo de tempo, e depois não interajam mais;
- Seja  $\Psi(x_1, x_2)$  a função de onda dos dois sistemas após a interação.
- Dado um observável  $\hat{A}$  com autovalores  $a_1, a_2, \dots$  e autofunções  $u_1(x_1), u_2(x_1), \dots$ , podemos escrever:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{i,j} c_{ij} u_i(x_1) \xi_j(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(x_1, x_2) = \sum_i u_i(x_1) \psi_i(x_2)$$

- sendo  $\psi_i(x_2) = \sum_j c_{ij} \xi_j(x_2)$
- Dado outro observável  $\hat{B}$  com autovalores  $b_1, b_2, \dots$  e autofunções  $v_1(x_1), v_2(x_1), \dots$ , também podemos escrever:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_n v_n(x_1) \phi_n(x_2)$$

- Se medirmos o observável  $\hat{A}$  do sistema 1 e encontrarmos o autovalor  $a_k$ , então o sistema 2 está no estado  $\psi_k(x_2)$ . O mesmo vale para  $\hat{B}$ , medindo  $b_m$  no sistema 1 sabemos que o sistema 2 está em  $\phi_m(x_2)$

## O experimento EPR II

- Considere o caso em que  $\widehat{A} = \widehat{P}_1$ ,  $\widehat{B} = \widehat{X}_1$  e

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1 - x_2 + x_0)p/\hbar} dp$$

- Os autoestados de  $\widehat{P}_1$  e  $\widehat{X}_1$  são:  $u_p(x_1) = e^{ix_1p/\hbar}$  e  $v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$ ;
- Assim, ao medirmos  $\widehat{P}_1$  encontrarmos o autovalor  $p$  sabemos que os sistema 2 está no estado:

$$\psi_p(x_2) = e^{-i(x_2 - x_0)p/\hbar}$$

- O qual é autoestado de  $\widehat{P}_2$  com autovalor  $-p$ .
- Por outro lado,

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{x_1}(x_2) \delta(x_1 - x) dx_1 = \phi_{x_1}(x_2)$$

- Logo, ao medirmos  $\widehat{X}_1$  encontrarmos o autovalor  $x$  sabemos que os sistema 2 está no estado:

$$\phi_x(x_2) = \Psi(x, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x - x_2 + x_0)p/\hbar} dp = h\delta(x - x_2 + x_0)$$

- O qual é autoestado de  $\widehat{X}_2$  com autovalor  $x + x_0$ .

## Conclusão do experimento mental EPR

- Medindo o momento de sistema 1 e encontrando  $p$ , sabemos que o sistema 2 tem momento  $-p$ ;
- Medindo a posição do sistema 1 e encontrando  $x$ , sabemos que o sistema 2 está na posição  $x + x_0$
- Devido a hipótese da localidade, a escolha de medir  $\widehat{P}_1$  ou  $\widehat{X}_1$  não pode influenciar as propriedades do sistema 2.
- Portanto, a conclusão dos autores é que a posição e o momento, mesmo sendo grandezas associadas a operadores que não comutam, são elementos de realidade física que existem simultaneamente.
- Em resumo, utilizando a **mecânica quântica** e assumido que vale o **princípio de localidade** concluímos que existem elementos que não são descritos para teoria quântica. Esses elementos são comumente chamados de *variáveis ocultas*.
- Os autores também chamam a atenção para seguinte fato: se entendermos que só saberemos as propriedade do sistema 2 após medir o próprio sistema, não chegaremos a mesma conclusão.

## EPR e desigualdades de Bell

- Esse argumento pode ser aplicado para outros operadores que não comutam, um caso mais simples do experimento EPR é obtido considerando o spin;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1 - x_2 + x_0)p/\hbar} dp \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\ -\rangle - |-\ +\rangle \right]$$

$$\hat{X} \text{ e } \hat{P} \quad \leftrightarrow \quad \vec{S} \cdot \hat{a} \text{ e } \vec{S} \cdot \hat{b}, \text{ com } |\hat{a} \cdot \hat{b}| < 1$$

- Como vimos com o professor Marco, John Bell analisou a correlação entre medidas realizadas na sistema 1 e no sistema 2. Com isso, ele encontrou um contradição na forma de um desigualdade;
- É importante notar: a contradição não está apenas nas variáveis ocultas.

EPR

Desigualdade de Bell

$$M.Q. + \text{Localidade} \Rightarrow V.O. \quad M.Q. + \text{Localidade} + V.O. = \text{Falso}$$

- Isso indica uma possível incompatibilidade entre a **mecânica quântica** e o **princípio de localidade**;



## Referências Bibliográficas

- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education, Inc, 2011.
- Artigo Original:
  - EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777
- O livro do Ballentine (no capítulo 20) tem uma discussão muito boa sobre experimento EPR e a relação dele com os Teoremas de Bell:
  - BALLENTINE, L. E. **Quantum Mechanics: A Modern Development**. 2ª. ed. Hackensack, NJ: World Scientific, 2014. DOI: 10.1142/9038