Leonardo Rodrigues Dos Santos

Feynman e a equação de Maxwell

Feynman assume as seguintes três hipóteses:

$$m\ddot{x}_j = F_j(x, \dot{x}, t) \qquad [x_j, x_k] = 0 \qquad m[x_j, \dot{x}_k] = i\hbar\delta_{jk} \tag{1}$$

Dessas propriedades seguem as relações:

$$[x_i, f(\dot{x})] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \qquad [\dot{x}_i, f(x)] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{2}$$

Derivando $m[x_j, \dot{x}_k] = i\hbar\delta_{jk}$, temos:

$$m[\dot{x}_j, \dot{x}_k] + m[x_j, \ddot{x}_k] = m[\dot{x}_j, \dot{x}_k] + [x_j, F_k] = 0 \implies \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_j} = -m[\dot{x}_j, \dot{x}_k]$$
$$\frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_j} = i\frac{m^2}{\hbar}[\dot{x}_j, \dot{x}_k] \tag{3}$$

(3) também implica que $[x_j, F_k] = -[x_k, F_j]$:

$$[x_j, F_k] = -m[\dot{x}_j, \dot{x}_k] = m[\dot{x}_k, \dot{x}_j] = -[x_k, F_j]$$

Isto motiva a definição de B_i:

$$i\frac{m}{\hbar}[x_j, F_k] = \epsilon_{ijk}B_i \implies \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_j} = i\frac{m^2}{\hbar}[\dot{x}_j, \dot{x}_k] = -\epsilon_{ijk}B_i \tag{4}$$

Podemos inverter esta relação e obter uma expressão para B_i. Utilizando:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$$

Multiplicamos dos dois lados por ϵ_{pjk} para obter:

$$\epsilon_{pjk}i\frac{m^2}{\hbar}[\dot{x}_j, \dot{x}_k] = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk}B_i = -2\delta_{ip}B_i = -2B_p$$
$$B_i = -\epsilon_{ijk}i\frac{m^2}{2\hbar}[\dot{x}_j, \dot{x}_k] = \epsilon_{ijk}i\frac{m}{2\hbar}[x_j, F_k] \tag{5}$$

Nos lembrando da identidade de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

substituindo $x_n, \dot{x}_j$ e $\dot{x}_k$, vemos que B_i não depende de $\dot{x}$:

$$[x_n,[x_j,F_k]] = m[x_n,[\dot{x}_k,\dot{x}_j]] = -m[\dot{x}_j,[x_n,\dot{x}_k]] - m[\dot{x}_k,[\dot{x}_j,x_n]] = -[\dot{x}_j, i\hbar\delta_{nk}] + [\dot{x}_k, i\hbar\delta_{nj}] = 0$$

Daqui é fácil ver que o divergente de B é nulo, nos permitindo então identifica-lo com o campo magnético. De (1) e (5) :

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = \frac{m}{i\hbar}[\dot{x}_i, B_i] = -\epsilon_{ijk}\frac{m^3}{2\hbar^2}[\dot{x}_i,[\dot{x}_j,\dot{x}_k]] = -\frac{m^3}{2\hbar^2}\frac{\epsilon_{ijk}}{3}\left([\dot{x}_i,[\dot{x}_j,\dot{x}_k]] + [\dot{x}_k,[\dot{x}_i,\dot{x}_j]] + [\dot{x}_j,[\dot{x}_k,\dot{x}_i]]\right) = 0$$

Obtemos então nossa primeira lei de Maxwell $\partial_i B_i = 0$. Note que para conseguirmos esta equação foi apenas necessário assumir as hipóteses (1). Elas tem como consequência a não comutação das componentes do momento cinemático, assim como obtido na aula 14 com a interação do potencial vetor. O interessante é que as hipóteses aparentam ser restritivas o suficiente para permitir que apenas a interação eletromagnética as satisfaça. Prosseguimos com o campo elétrico.

Nos lembrando de como podemos escrever o produto externo em notação de tensores:

$$(A \times B)_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j \tag{6}$$

Simplesmente definimos E_i, como:

$$E_i = F_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\dot{x}_j B_k - \dot{x}_j B_k) \implies \mathbf{E} = \mathbf{F} - \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{x}}) \tag{7}$$

Vamos denotar a simetrização por $(\dot{x}_j B_k)_s = \frac{1}{2}(\dot{x}_j B_k + B_k \dot{x}_j)$ por simplicidade. Podemos identificar E_i como o campo elétrico se ele satisfaz as equação de Faraday:

$$\frac{\partial B_k}{\partial t} + \epsilon_{ijk}\partial_i E_j = 0 \tag{8}$$

Tomamos a derivada total no tempo do campo B:

$$\begin{aligned}\frac{dB_i}{dt} = \frac{\partial B_i}{\partial t} + \left(\dot{x}_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n}\right)_s &= -\epsilon_{ijk} i \frac{m^2}{2\hbar}\frac{d}{dt}[\dot{x}_j,\dot{x}_k] = \epsilon_{ijk}\frac{m^2}{i\hbar}\left([\ddot{x}_j,\dot{x}_k]\right) \\ &= \epsilon_{ijk}\frac{m}{i\hbar}\left([E_j + \epsilon_{jpq}(\dot{x}_p B_q)_s, \dot{x}_k]\right)\end{aligned}$$

Pois $m\ddot{x}_j = E_j + \epsilon_{jpq}(\dot{x}_p B_q)_s$, agora usando a igualdade:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jpq} = \delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}[E_j,\dot{x}_k] + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jpq}[(\dot{x}_p B_q)_s,\dot{x}_k] &= \epsilon_{ijk}[E_j,\dot{x}_k] + (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip})[(\dot{x}_p B_q)_s,\dot{x}_k] \\ &= \epsilon_{ijk}[E_j,\dot{x}_k] + [(\dot{x}_k B_i)_s,\dot{x}_k] - [(\dot{x}_i B_k)_s,\dot{x}_k]\end{aligned}$$

Cada termo é uma derivada:

$$[E_j, \dot{x}_k] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial E_j}{\partial x_k} \qquad [(\dot{x}_k B_i)_s, \dot{x}_k] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial(\dot{x}_k B_i)_s}{\partial x_k} = \frac{i\hbar}{m}\left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} B_i + \dot{x}_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k}\right)_s$$

$$[(\dot{x}_i B_k)_s, \dot{x}_k] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial(\dot{x}_i B_k)_s}{\partial x_k} = \frac{i\hbar}{m}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} B_k + \dot{x}_i \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)_s$$

Subtraindo o terceiro termo do segundo:

$$\frac{i\hbar}{m}\left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} B_i + \dot{x}_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} B_k\right)_s = \left([\dot{x}_k, \dot{x}_k] B_i - [\dot{x}_k, \dot{x}_i] B_k + \frac{i\hbar}{m} \dot{x}_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k}\right)_s$$

O primeiro termo é nulo. Para o segundo, percebemos que $B_m \sim \epsilon_{mki}[\dot{x}_k, \dot{x}_i] \implies [\dot{x}_k, \dot{x}_i] \sim \epsilon_{mki} B_m$, portanto $([\dot{x}_k, \dot{x}_i] B_k)_s \sim \epsilon_{mki}(B_m B_k)_s$. Mas $(B_m B_k)_s$ é simétrico, o resultado é nulo.

Logo, juntando todos os termos:

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \left(\dot{x}_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n}\right)_s = \frac{m}{i\hbar}\left(\epsilon_{ijk}\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{i\hbar}{m}\dot{x}_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k}\right) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial x_k} \implies \frac{\partial B_i}{\partial t} + \epsilon_{kji}\partial_k E_j = 0$$

Obtemos assim duas equações de Maxwell:

$$\partial_i B_i = 0 \qquad \frac{\partial B_k}{\partial t} + \epsilon_{ijk}\partial_i E_j = 0 \tag{9}$$

As outras duas equações:

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_j} = 4\pi\rho \qquad \partial_t E_k = \epsilon_{ijk}\partial_i B_j + 4\pi j_k \tag{10}$$

são tomadas no artigo original [1] apenas como as definições de ρ a densidade de carga e $\vec{j}$ a corrente externa.

Esta prova é interessante pela simplicidade das hipóteses (1), e pelo resultado inesperado. Pois além de termos obtido duas equações de Maxwell a partir de regras básicas da física quântica, aparentemente obtemos uma teoria que é invariante por transformações de Lorentz. Por outro lado, (1) apresenta hipóteses invariantes por transformações de Galileu; isto é:

$$x_i \mapsto x_i' = x_i + V_i t \qquad\qquad \dot{x}_i \mapsto \dot{x}_i' = \dot{x}_i + V_i. \tag{11}$$

Como resolver esta questão? A resposta é que as equações obtidas (9) de fato são invariantes por transformações de Galileu. Admitindo que os campos **B** e **E** são dados pelas equações (5) e (7), vejamos como isto é feito. As novas coordenadas x_i' e $\dot{x}_i'$ são dadas por (11). Assim:

$$[\dot{x}_i', \dot{x}_j'] = [\dot{x}_i + V_i, \dot{x}_j + V_j] = [\dot{x}_i, \dot{x}_j] + [\dot{x}_i, V_j] + [V_i, \dot{x}_j] + [V_i, V_j] = [\dot{x}_i, \dot{x}_j]$$

e portanto $B' = B$. Como sabemos, $F' = F$, portanto:

$$E_i' = F_i' - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\dot{x}_j' B_k')_s = E_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\dot{x}_j B_k)_s - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}((\dot{x}_j + V_j)B_k)_s = E_i - \epsilon_{ijk} V_j B_k$$

As derivadas das coordenadas mudam com:

$$\partial_{t'} = \partial_t - V_i \partial_i \qquad\qquad \partial_{i'} = \partial_i$$

portanto tem-se imediatamente $\partial_i B_i = \partial_{i'} B_i' = 0$. Para a equação de Faraday:

$$\frac{\partial B_k'}{\partial t'} + \epsilon_{ijk}\frac{\partial E_j'}{\partial x_i'} = \frac{\partial B_k}{\partial t} - V_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i} + \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(E_j - \epsilon_{jpq} V_p B_q\right) = \frac{\partial B_k}{\partial t} + \epsilon_{ijk}\frac{\partial E_j}{\partial x_i} = 0$$

Que as duas equações que obtivemos são invariantes por Galileu pode ser visto dentro do contexto do eletromagnetismo clássico, sem admitir a forma (5) para **B**[4]. O que acontece, [3, 4] é que as duas outras equações (10), ignoráveis a princípio, não são compatíveis com transformações de Galileu, dando origens a termos indesejáveis. Assim, não há inconsistência no truque de Feynman com a relatividade.

Referências

[1] F. J. Dyson, ”Feynman’s proof of the Maxwell equations,” Am. J. Phys.58, 209-211 (1990).

[2] Z. K. Silagadze "Feynman’s derivation of Maxwell equations and extra dimensions"arXiv:hep-ph/0106235 2001

[3] A. Vaidya and C. Farina, ”Can Galilean mechanics and full Maxwell equations coexist peacefully?” Phys. Lett. A 153, 265-267 (1991).

[4] physics.stackexchange.com/questions/378861/what-does-a-galilean-transformation-of-maxwells-equations-look-like, (visto em 05/05/2020, prova da invariância de Galileu)

[5] youtu.be/Z5fKBacxCk4?t=75 (Entrevista com Dyson em que ele comenta sobre a prova)