Diagonalização de matrizes

Definição 1: uma matriz é diagonalizável se vale a relação

$$D = P^{-1} A P$$

onde D é a matriz diagonal resultante, P uma matriz auxiliar e A a matriz que se quer diagonalizar.

→ Esta relação pode ser usada para verificar o procedimento de diagonalização.

→ Obs: As matrizes identidade são, por definição, diagonais.

Definição 2: equação de auto-valor

$$A|\alpha\rangle = \lambda |\alpha\rangle$$

onde λ é um dos autovalores de A e $|\alpha\rangle$ é um autovetor ($n \times 1$ para uma matriz A $n \times n$).

Rearranjando os termos, temos $(A - \lambda I)|\alpha\rangle = 0$ (1), que só terá soluções não triviais se valer $\det(A - \lambda I) = 0$ (2)

Vamos agora tomar um exemplo. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando (2), vamos ter

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$$

$\therefore$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ são os autovalores de A. A matriz diagonal equivalente seria então

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora, resta encontrar os autovetores correspondentes.

a) $\underline{\lambda_1 = 2}$: Aplicando (1), $(A - I\lambda_1)|\alpha_1\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Perceba que somente duas das três equações do sistema anterior são linearmente independentes. Podemos, neste caso, tomar uma solução da forma

$$|\alpha_1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que nos diz que todo vetor neste subespaço é autovetor com autovalor 2 (o subespaço é a linha (1, 1, 1)). Um valor de α que nos dará uma solução normalizada é obtido através de $\alpha = \dfrac{1}{||\alpha_1\rangle|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{|\alpha_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) $\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = -1}$. Novamente aplicando (1),

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

onde temos três quantidades desconhecidas. Aqui, o subespaço em questão é um plano que passa pela origem, e qualquer vetor neste subespaço será então autovetor com autovalor $\lambda = -1$.

Tomando então as soluções

$$|\alpha_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |\alpha_3\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que são linearmente independentes, porém não ortogonais, temos os autovetores. Porém, é sempre mais interessante ter soluções ortogonais e normalizadas (ortonormais). Para isto, usaremos o procedimento de Gram-Schmidt:

$$|\alpha_2'\rangle = \frac{|\alpha_2\rangle}{||\alpha_2\rangle|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{|\alpha_2\rangle \rightarrow |\alpha_2\rangle = |\alpha_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$|\alpha_3'\rangle = |\alpha_3\rangle - \frac{|\alpha_2\rangle (|\alpha_2\rangle)^T}{(|\alpha_2\rangle)^T |\alpha_2\rangle} |\alpha_3\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalizando este resultado,

$$\boxed{|\alpha_3\rangle \rightarrow |\alpha_3\rangle = \frac{|\alpha_3'\rangle}{(|\alpha_3'\rangle)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$