Translações finitas

Murilo B. Alves

FI-001 - Mecânica Quântica 1

Revisão

- Operador de translação infinitesimal

$$\mathcal{T}(d\mathbf{x})|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x} + d\mathbf{x}\rangle$$

- Vimos em aula que o operador pode ser expandido como

$$\mathcal{T}(d\mathbf{x}) = 1 - \frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{dx}}{\hbar}$$

- Por simplicidade, seja $d\mathbf{x} = \Delta x \hat{\mathbf{x}}$, então $\mathbf{p} \cdot \mathbf{dx} = p_x \Delta x$.
- Pergunta: se Δx não for infinitesimal, como aplicar $\mathcal{T}(\Delta x \hat{\mathbf{x}})$?
- Se Δx é grande, dividimos em N parcelas e aplicamos o operador N vezes, fazendo $N \to \infty$.

$$\mathcal{T}(\Delta x \hat{\mathbf{x}}) = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{ip_x}{\hbar} \frac{\Delta x}{N}\right)^N$$

- Lembrete: 1 e p_x são operadores, $i\Delta x / \hbar N$ é um escalar.

Ferramentas

Teorema binominal

- Para escalares:

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k$$

- $+$ e $\times$ de operadores é bem definida, podemos aplicar o teorema.
- Caso que $A = 1 \rightarrow (1+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k$.

Exponencial de um operador

Se P é um operador, podemos definir a exponencial de P pela expansão de Taylor:

$$\exp P = 1 + P + \frac{P^2}{2!} + \frac{P^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k}{k!}$$

Demonstração

- Aplicamos o teorema binominal na expressão do operador.
- Defina $P = -\frac{ip_x \Delta x}{\hbar}$, então

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{P}{N}\right)^N &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{P}{N}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!k!} \left(\frac{P}{N}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{N(N-1)\cdots(N-(k-1))\cancel{(N-k)!}}{\cancel{(N-k)!}\,k!} \left(\frac{P}{N}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{\cancel{N^k}(1-1/N)\cdots(1-(k-1)/N)}{k!} \frac{P^k}{\cancel{N^k}}
\end{aligned}
$$

Demonstração

- Defina $\gamma = (1 - 1/N) \cdots (1 - (k-1)/N)$

$$\left(1 + \frac{P}{N}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \gamma \frac{P^k}{k!}$$

- Vemos que $\lim_{N\to\infty} \gamma = 1$. Logo:

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{P}{N}\right)^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k}{k!} = \exp P$$

- Lembrando a definição de P e $\mathcal{T}(\Delta x \hat{\mathbf{x}})$, temos:

$$\boxed{\mathcal{T}(\Delta x \hat{\mathbf{x}}) = \exp\left(-\frac{i p_x \Delta x}{\hbar}\right)} \qquad \square$$