Operadores Tensoriais

- Dois tipos de ação da rotação no sistema

Ação ativa (“tipo Schrödinger”)

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = D(R)|\Psi\rangle$$

$$A_i \to A_i$$

$$\langle\Psi|A_i|\Psi\rangle \to \langle\Psi'|A_i|\Psi\rangle = \langle\Psi|D^\dagger A_i D(R)|\Psi\rangle$$

Ação passiva (“tipo Heisenberg”)

$$|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle$$

$$A_i \to A_i'$$

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle \to \langle\Psi|A'|\Psi\rangle$$

- Operadores vetoriais:

$$\langle A_i\rangle \to \langle A_i'\rangle = R_{ij}\langle A_j\rangle \qquad \Rightarrow \qquad D^\dagger(R) V_i D(R) = R_{ij} V_j$$

Operadores Tensoriais

- Dois tipos de ação da rotação no sistema

Ação ativa (“tipo Schrödinger”)

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = D(R)|\Psi\rangle$$
$$T_{i_1 \ldots i_n} \to T_{i_1 \ldots i_n}$$
$$\langle\Psi|T_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle \to \langle\Psi'|T_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle = \langle\Psi|D^\dagger T_{i_1 \ldots i_n} D(R)|\Psi\rangle$$

Ação passiva (“tipo Heisenberg”)

$$|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle$$
$$T_{i_1 \ldots i_n} \to T'_{i_1 \ldots i_n}$$
$$\langle\Psi|T_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle \to \langle\Psi|T'_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle$$

- Operadores tensoriais (cartesianos):

$$\langle T_{i_1 \ldots i_n}\rangle \to \langle T'_{i_1 \ldots i_n}\rangle = R_{i_1 j_1} \ldots R_{i_n j_n} \langle T_{j_1 \ldots j_n}\rangle$$

$$\Rightarrow \qquad D^\dagger(R) T_{i_1 \ldots i_n} D(R) = R_{i_1 j_1} \ldots R_{i_n j_n} T_{i_1 \ldots i_n}$$

Operadores Tensoriais

- Dois tipos de ação da rotação no sistema

Ação ativa ("tipo Schrödinger")

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = D(R)|\Psi\rangle$$
$$T_{i_1 \ldots i_n} \to T_{i_1 \ldots i_n}$$
$$\langle\Psi|T_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle \to \langle\Psi'|T_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle = \langle\Psi|D^\dagger T_{i_1 \ldots i_n} D(R)|\Psi\rangle$$

Ação passiva ("tipo Heisenberg")

$$|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle$$
$$T_{i_1 \ldots i_n} \to T'_{i_1 \ldots i_n}$$
$$\langle\Psi|T_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle \to \langle\Psi|T'_{i_1 \ldots i_n}|\Psi\rangle$$

- Operadores tensoriais (cartesianos):

$$\langle T_{i_1 \ldots i_n}\rangle \to \langle T'_{i_1 \ldots i_n}\rangle = R_{i_1 j_1} \ldots R_{i_n j_n} \langle T_{j_1 \ldots j_n}\rangle$$

Representação
redutível

$$\Rightarrow \qquad D^\dagger(R) T_{i_1 \ldots i_n} D(R) = R_{i_1 j_1} \ldots R_{i_n j_n} T_{i_1 \ldots i_n}$$

Operadores Tensoriais

- Harmônicos esféricos como “protótipos” dos operadores esféricos

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{n}}) = Y_l^m(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \xrightarrow[\cos\theta \to V_z]{\substack{\sin\theta\cos\phi \to V_x \\ \sin\theta\sin\phi \to V_y}} Y_l^m(\mathbf{V})$$

- Isso implica a lei de transformação

$$\mathrm{D}^\dagger(R) Y_l^m(\mathbf{V}) D(R) = Y_l^{m'}(\mathbf{V}) D_{mm'}^{l*}(R)$$

- Por outro lado, Y_l^m é função do operador $\mathbf{V}$, cuja lei de transformação é conhecida, logo por consistência devemos ter

$$D^\dagger(R) Y_l^m(\mathbf{V}) D(R) \stackrel{?}{=} Y_l^m(\mathbf{V}')$$

Transformação dos harmônicos esféricos

- Exemplos:

$$Y_1^{\pm 1}(\mathbf{V}) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} D^\dagger(R)Y_1^{\pm 1}(\mathbf{V})D(R) &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{D^\dagger(R)V_xD(R) \pm iD^\dagger(R)V_yD(R)}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{3}{4\pi}\frac{V'_x \pm iV'_y}{\sqrt{2}} \\ &= Y_1^{\pm 1}(\mathbf{V}') \end{aligned}$$

Transformação dos harmônicos esféricos

- Exemplos:

$$Y_2^{\pm 2}(\mathbf{V}) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,(V_x \pm iV_y)^2$$

$$\begin{aligned} D^\dagger(R)Y_2^{\pm 2}(\mathbf{V})D(R) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} D^\dagger(R)\,(V_x \pm iV_y)^2\,D(R) \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} D^\dagger(R)\,(V_x \pm iV_y)\,D(R)D^\dagger(R)\,(V_x \pm iV_y)\,D(R) \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\left(V'_x \pm iV'_y\right)^2 \\ &= Y_2^{\pm 2}(\mathbf{V}') \end{aligned}$$

Transformação dos harmônicos esféricos

- Como

$$D^\dagger(R)V_x^n D(R) = D^\dagger(R)V_x D(R)D^\dagger(R)V_x...V_x D(R)$$
$$= V_x'^n$$

$$\Rightarrow D^\dagger(R)V_x^n V_y^m V_z^p D(R) = V_x'^n V_y'^m V_z'^p$$

- A essa altura é claro que, se

$$Y_l^m(\mathbf{V}) = \sum a_i V_x^{n_i} V_y^{m_i} V_z^{p_i}$$

- Teremos $D^\dagger(R)Y_l^m(\mathbf{V})D(R) = Y_l^m(\mathbf{V}')$

Transformação dos harmônicos esféricos

- Podemos mostrar isso abrindo

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta,\phi) &\propto P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \\ &\propto (1-\cos^2\theta)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\Big|_{x=\cos\theta}(\cos\phi + i\sin\phi)^m \\ &\propto \frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\Big|_{x=\cos\theta}(\sin\theta\cos\phi + i\sin\theta\sin\phi)^m \end{aligned}$$

- E, fazendo a substituição $\sin\theta\cos\phi \to V_x, \sin\theta\sin\phi \to V_y, \cos\theta \to V_z$

$$Y_l^m(\mathbf{V}) \propto \frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\Big|_{x=V_z}(V_x + iV_y)^m$$

- Vemos que Y_l^m necessariamente é um polinômio em V_i, portanto segue o resultado.