Problema 1 - Aproximação WKB

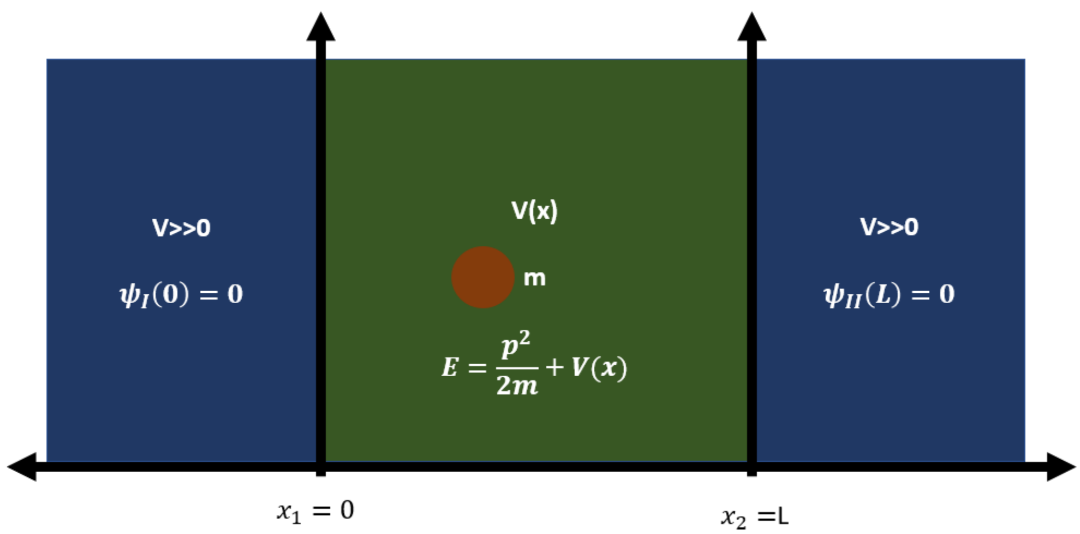
April 22, 2020

1 Use a aproximação WKB para calcular os níveis de energia de uma partícula sem spin de massa m movendo em uma caixa com paredes rígidas em x = 0 e x = L.

Dica: usamos as funções de Airy para acertar a aproximação nos pontos de retorno clásico. Faça algo semelhante, lembrando que a expressão correta da função de onda na parede rígida é $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

1.0.1 Solução

O potencial V(x) é infinito para $x < 0$ e $x > L$, para $0 < x < L$ sera uma função da posição. A partícula pode-se movimentar apenas na região verde, como é mostrado na figura abaixo.



Para calcular os niveis de energia, primeiro é necessario obter a regra de quantização para as condições do problema.

A função de onda WKB possui uma forma oscilatória em $0 < x < L$ e desaparece em $x < 0$ e $x > L$. Quando o potencial é infitito num extremo, o phase factor é zero em aquele extremo.

*) Nas proximidades de $x = 0$, a função de onda WKB é:

$$\psi_I(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} sen\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx'\right), \, para \, 0 < x < L$$

*) Nas proximidades de $x = L$, a função de onda WKB é:

$$\psi_{II}(x) = \frac{B}{\sqrt{p(x)}} sen\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^L p(x')dx'\right), \, para \, 0 < x < L$$

É evidente que $\psi_I(0) = \psi_{II}(L) = 0$.

Como as equações $\psi_I(x)$ e $\psi_{II}(x)$ representam a mesma função de onda na mesma região, temos que satisfacer:

$$\psi_I(x) = \pm\psi_{II}(x)$$

aquelo é possivel se fazemos $A = (-1)^n B$ e com a soma dos argumentos igual a $(n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, ..$

Agora, desenvolvemos a soma dos argumentos.

$$\frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx' + \frac{1}{\hbar}\int_x^L p(x')dx' = (n+1)\pi$$
$$\frac{1}{\hbar}\left(\int_0^x p(x')dx' + \int_x^L p(x')dx'\right) = (n+1)\pi$$
$$\frac{1}{\hbar}\left(\int_0^L p(x')dx'\right) = (n+1)\pi$$

para $n = 0, 1, 2, 3, ..$ ou

$$\int_0^L p(x')dx' = n\pi\hbar$$

para $n = 1, 2, 3, ...$

Nas condições de nosso problema, $p(x) = \sqrt{2mE}$ onde o potencial é considerado zero e claramente observa-se que o momento não depende da posição, portanto

$$\int_0^L p(x)dx = \int_0^L \sqrt{2mE}dx = \sqrt{2mE}\int_0^L dx = \sqrt{2mE}L \tag{1}$$

finalmente, a energia pela aproximação WKB é:

$$\int_0^L p(x)dx = n\pi\hbar \tag{2}$$

$$\sqrt{2mE_n^{WKB}}L = n\pi\hbar \tag{3}$$

$$E_n^{WKB} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 \tag{4}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$

Observação: a expressão calculada é o valor exato da energia de uma partícula em um poço infinito.

```
[ ]:
```