



Partículas Livres

Pacote de onda

Aluno: Willian Vieira dos Santos RA: 086202

Professor: Dr. Marco Aurélio Pinheiro Lima

FI001 – Mecânica Quântica

Função de onda plana

- Uma função de onda gaussiana para partícula livre é dada por:

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} e^{-ax^2} .$$

- Pela transformada de Fourier, temos:

$$\phi(k) \equiv \Phi(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \Psi(x, 0) e^{-ikx}$$

Evolução no tempo

- Substituindo a função de onda parametrizada pelo número de onda a função de onda evolui no tempo com:

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) e^{ikx} e^{-iE_k t/\hbar} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a}} e^{-iE_k t/\hbar} e^{ikx}\end{aligned}$$

- A energia é dada por:

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Densidade de probabilidade

- Da integração da função de onda, obtemos:

$$|\Psi(x, t)|^2 = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\hbar at}{m}\right)^2}} e^{-\frac{2ax^2}{1 + \left(\frac{2\hbar at}{m}\right)^2}}$$

- Com valor esperado para x^2 calculado em:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{4a} \left[1 + \left(\frac{2\hbar at}{m} \right)^2 \right]$$

Largura do pacote de onda

- Assim como obtido pela representação de Heisenberg para $x(t)$, o pacote de onda evoluído no tempo possui largura dada por:

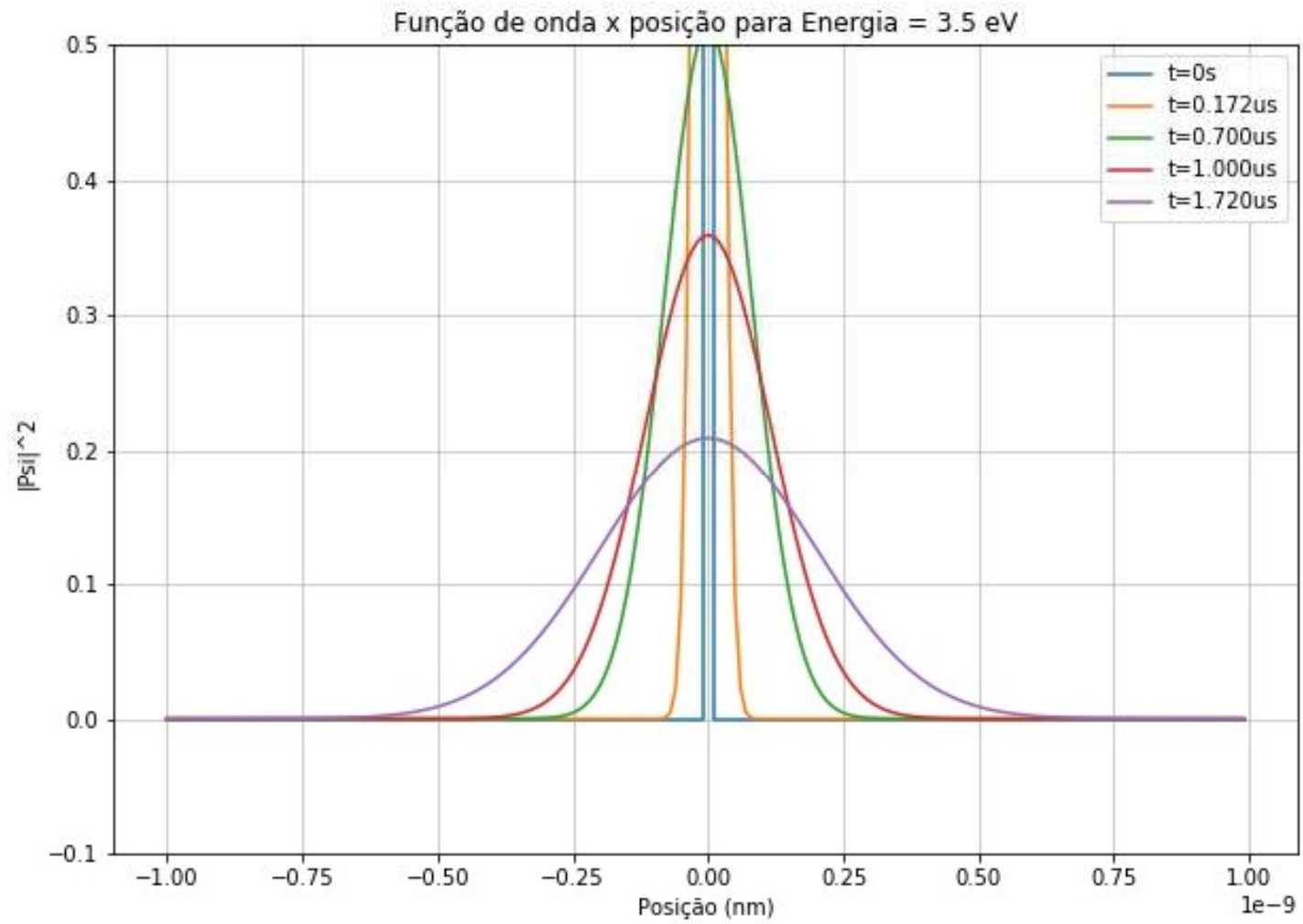
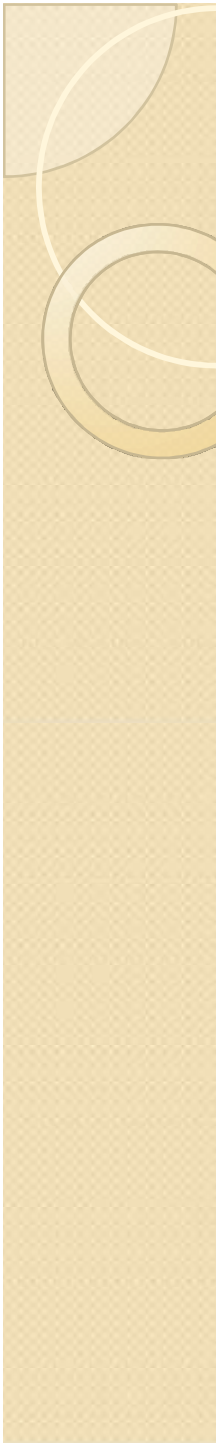
$$\langle x^2 \rangle_t \equiv \sigma_x^2(t) = \sigma_0^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma_0^2}$$

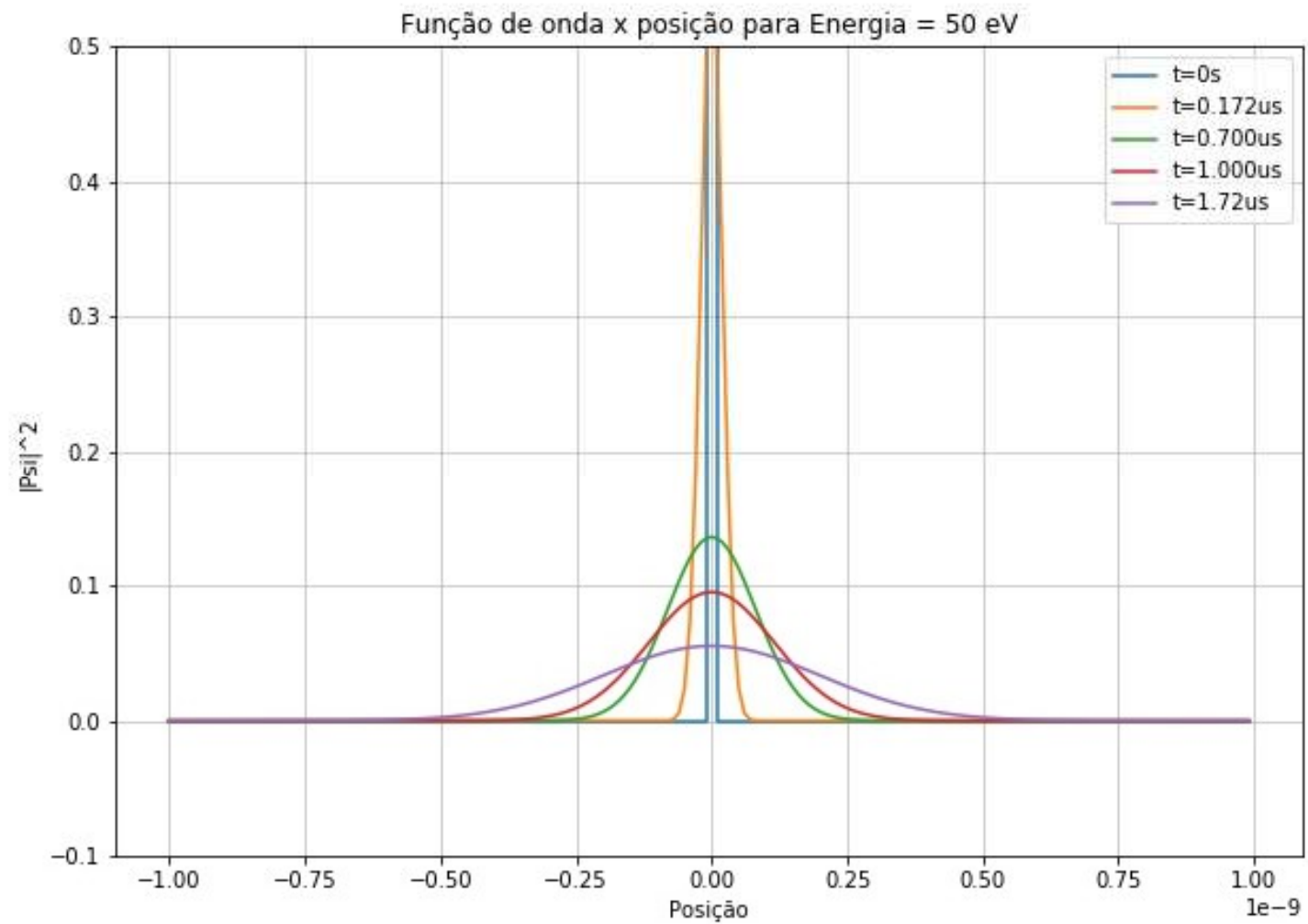
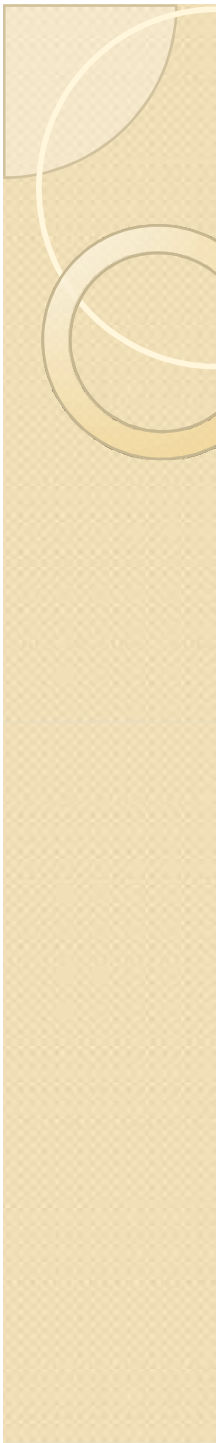
- Por simetria, temos $\langle x \rangle = 0$ e em $t = 0$, $\langle x^2 \rangle = 1/(4.a)$
- Como a função de onda é uma gaussiana, escrevemos:

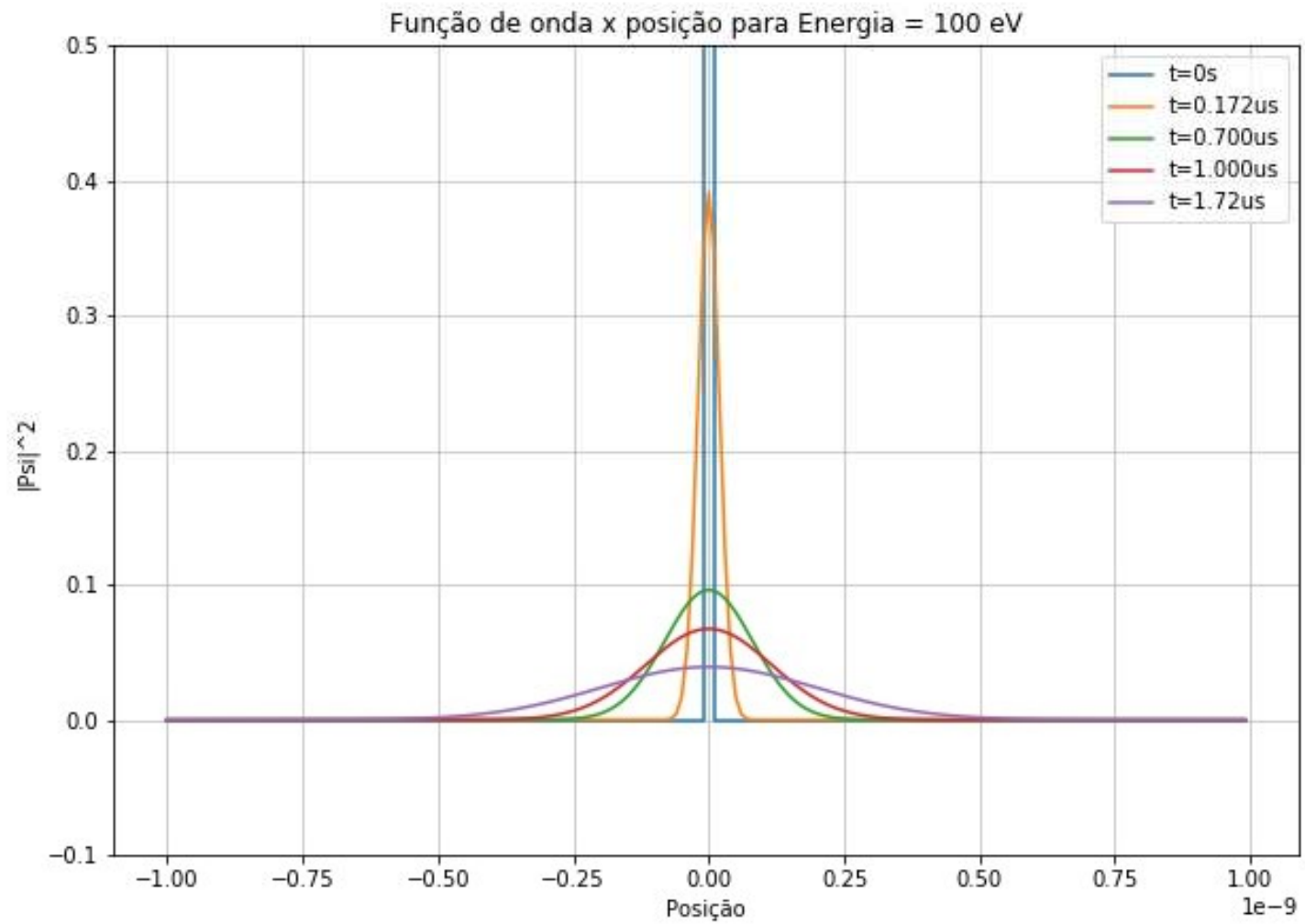
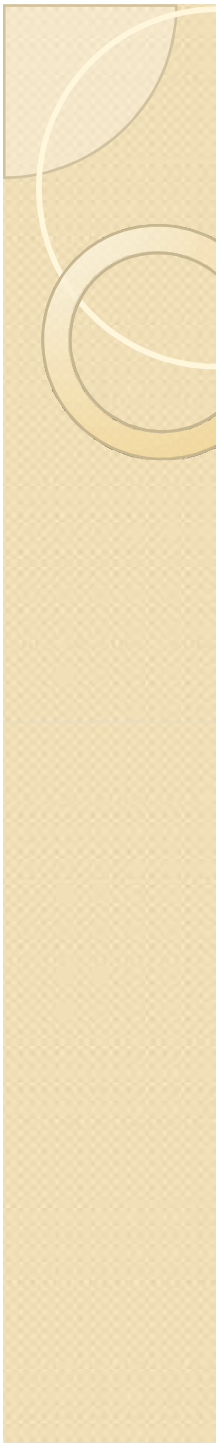
$$\langle k^2 \rangle = a \quad \longrightarrow \quad \sigma_p^2 = \hbar^2 a = \frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2}$$

Análise quantitativa

- Ao criar uma função, podemos avaliar como a largura da gaussiana se comporta durante evolução no tempo.
- Vamos avaliar as energias:
 - 3.5eV
 - 50eV
 - 100eV
- Verificar em:
 - $t = 0$
 - $t = 0.172\text{us}$
 - $t = 0.700\text{us}$
 - $t = 1.000\text{us}$
 - $t = 1.720\text{us}$
- Programa em Python / Jupyter Notebook para simular







Referências

- J. J. Sakurai, J. Napolitano, “Modern Quantum Mechanics”, 2nd Edition
- <https://github.com/Zokalyx/gaussian-wave-packet/blob/master/README.md>
- <https://physicspages.com/pdf/Griffiths%20QM/Griffiths%20Problems%2002.22.pdf>
- <https://www.asc.ohio-state.edu/jayaprakash.1/631/freegauss.pdf>