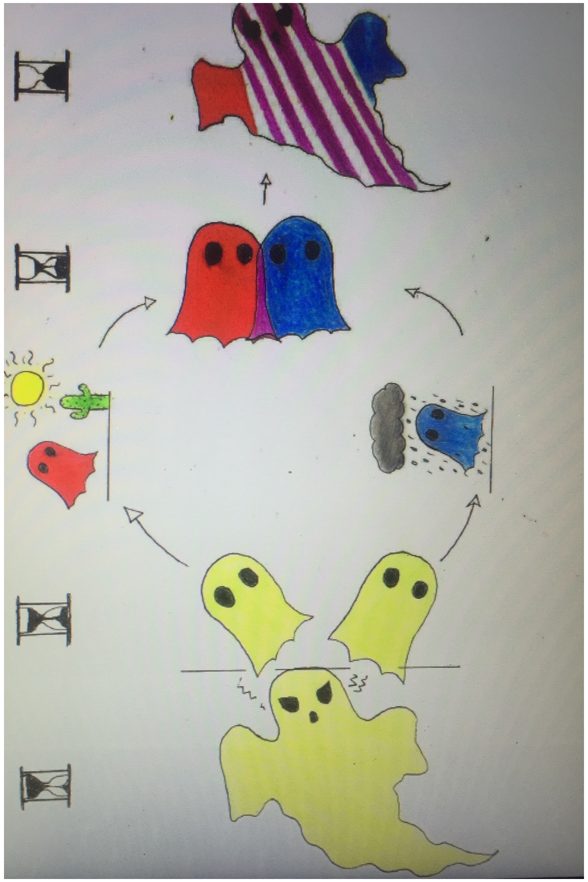
FI001 - 1º Semestre de 2021

Figura do artigo, Gabriela M. Amaral, David Q. Aruquipa, Ludwing F. M. Camacho, Luiz F. C. Faria, Sofía I. C. Guzmán, Damaris T. Maimone, Melissa Mendes, Marco A. P. Lima, "Quantum 'Ghosts'", Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, no 3, e3309 (2016). DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0052



As informações sobre a disciplina estão em:

https://sites.ifi.unicamp.br/maplima/ensino/fi-001/

Conceitos Fundamentais

1) Início do Século 20: limitações severas da física clássica.

2) A maneira convencional de estudar Mecânica Quântica é seguir o desenvolvimento histórico:

- Lei de Radiação de Planck: corpo negro;
- Teoria de calor específico Einstein-Debye;
- Átomo de Bohr;
- Ondas de matéria de de Broglie;
- Efeito Compton (espalhamento de fótons por elétrons – transferência de momento linear);
- Experiência de Franck-Hertz (espectro via espalhamento de elétrons);
- Experimento de Davidson-Germer-Thompson de difração de elétrons.

Tudo isso faz com que abandonemos a Mecânica Clássica para o mundo de Heisenberg, Schrödinger, Dirac e outros. Nós faremos aqui o tratamento de choque: Experimento de Stern-Gerlach

Planejado por Stern in 1921 e realizado com Gerlach in 1922

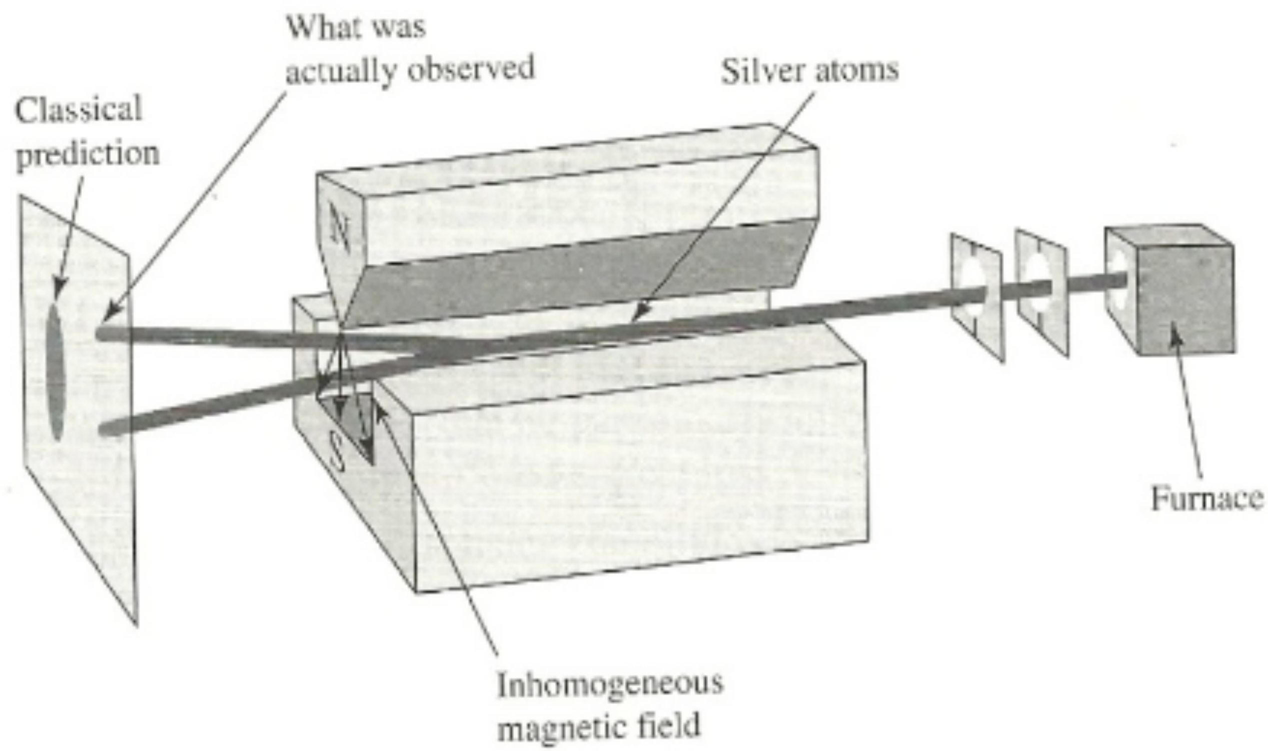
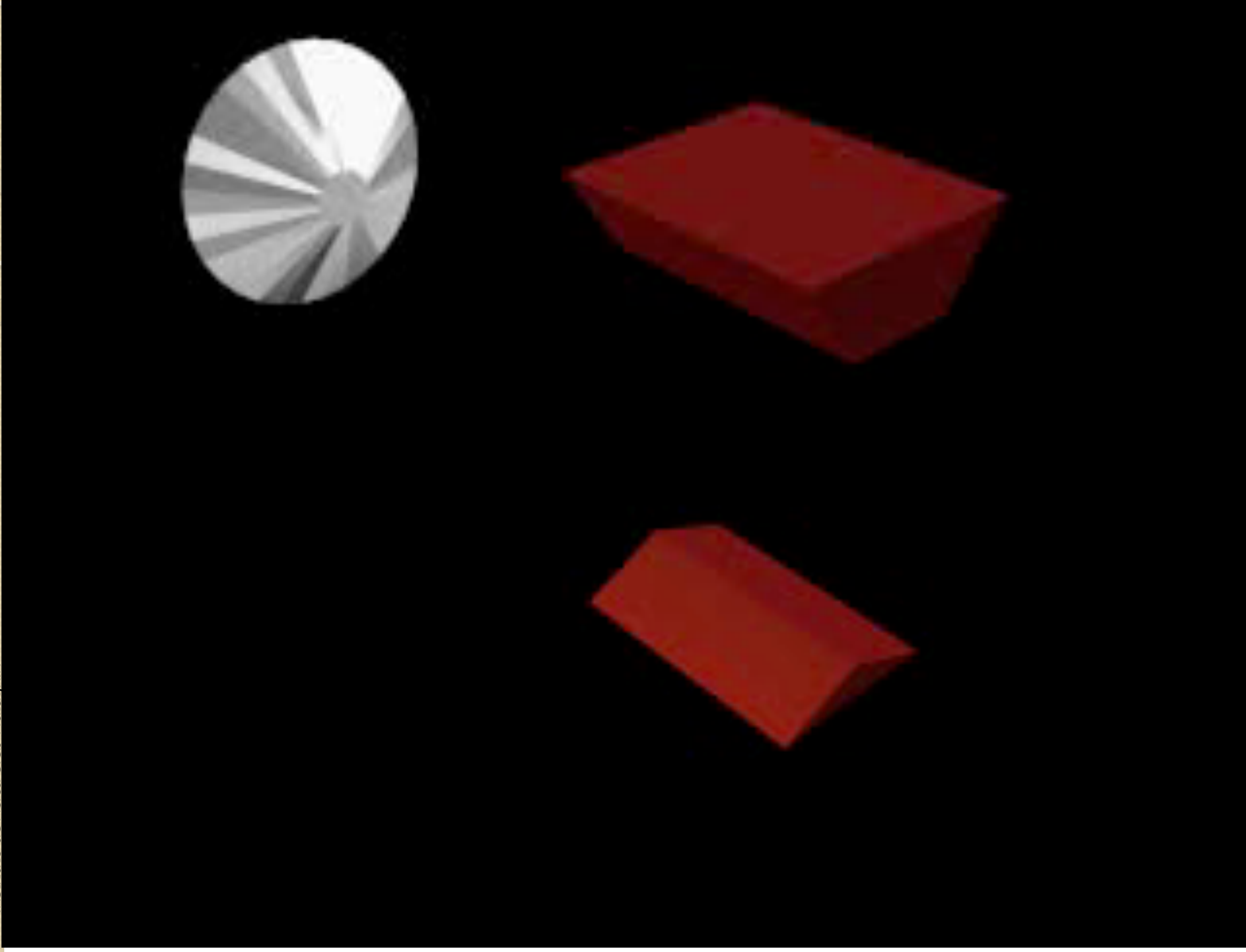


FIGURE 1.1 The Stern-Gerlach experiment.

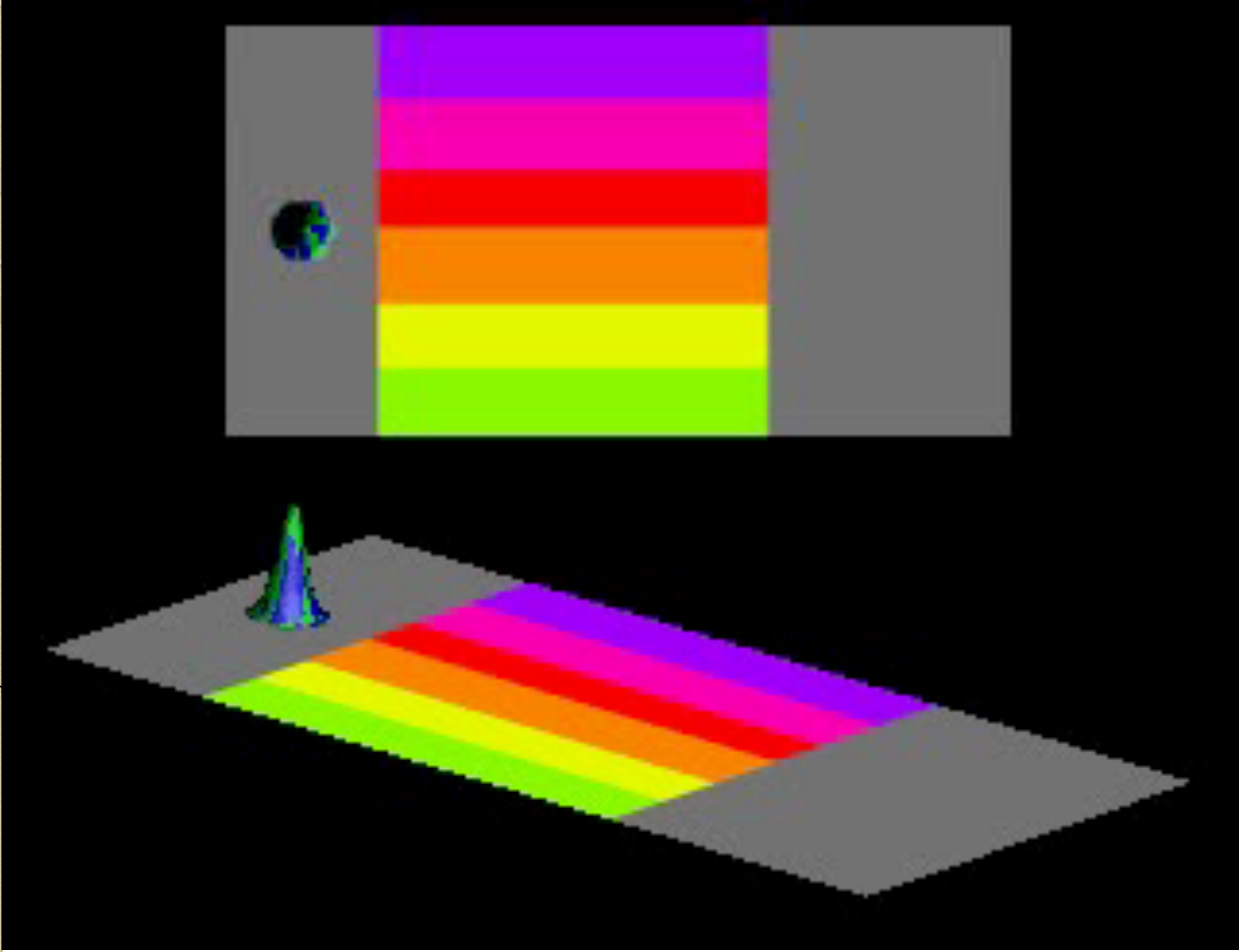
Energia potencial de interação entre momento magnético e campo $-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) \approx \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

$\boldsymbol{\mu} \propto \mathbf{S} \Rightarrow \dfrac{e}{m_e c}$ ($e < 0$ neste livro) é a constante de proporcionalidade



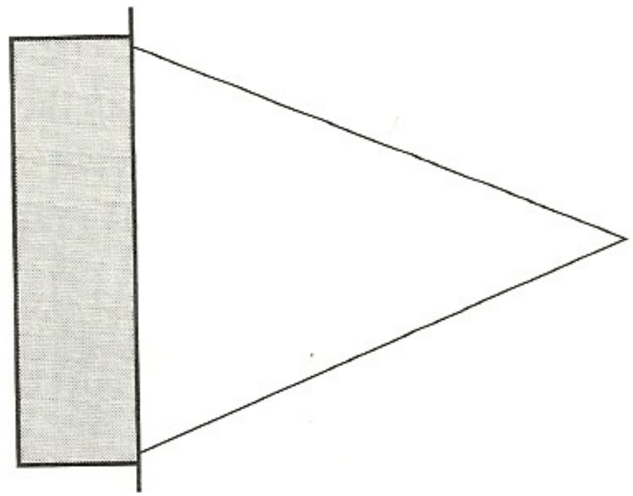
Visão Clássica



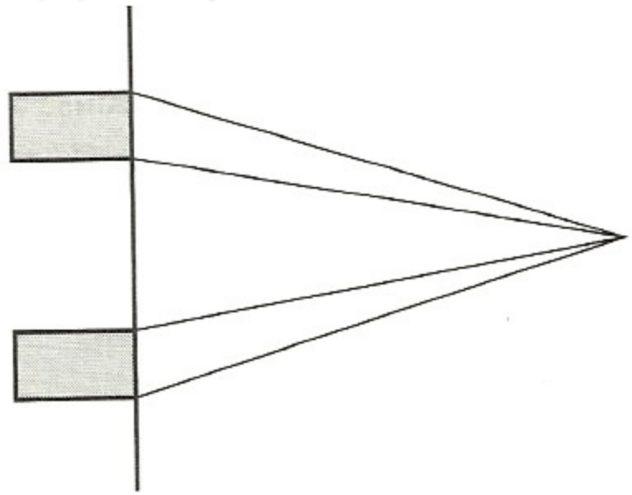
Visão Quântica

(a) O que esperar?

(b) O que se viu?



(a)



(b)

Para um momento de dipolo arbitrariamente orientado, quanto vale μ_z? Que tal $\forall$ valor entre $-\mu \leq \mu_z \leq \mu$

Dois valores de μ_z, correspondentes à: $S_z = \hbar/2$ e $-\hbar/2$,

$$\hbar = 1,0546 \times 10^{-27}\text{erg.s}$$
$$= 6,5822 \times 10^{-16}\text{eV.s.}$$

Nada especial com a direção z. Poderia ser $x, y,$ ou u.

Uma sequência de experimentos de Stern-Gerlach

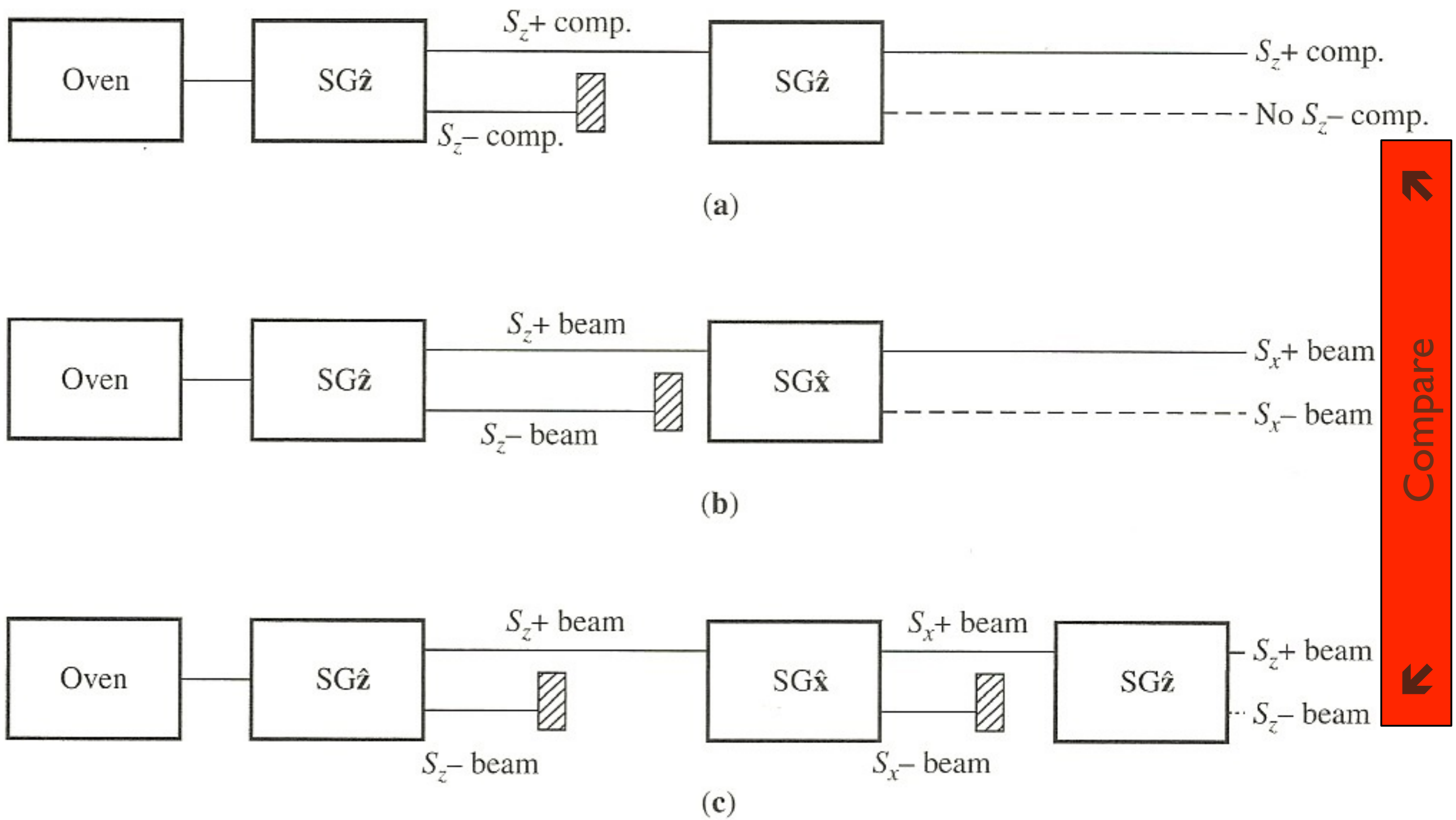


FIGURE 1.3 Sequential Stern-Gerlach experiments.

O que esperar de momento angular clássico?

$$L = I\omega$$

Instituto de Física Gleb Wataghin

Analogia com luz polarizada

Luz polarizada na direção $\hat{\mathbf{x}} \Longrightarrow \mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t)$

Luz polarizada na direção $\hat{\mathbf{y}} \Longrightarrow \mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(kz - \omega t)$

Se a polarização fosse em $\hat{\mathbf{x}}'$ e $\hat{\mathbf{y}}'$(rodados de 45^ono sentido anti-horário, com respeito à $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$), poderíamos escrever:

$$\hat{\mathbf{x}}' \Rightarrow E_0 \hat{\mathbf{x}}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{y}} \cos(kz - \omega t) \Big],$$

$$\hat{\mathbf{y}}' \Rightarrow E_0 \hat{\mathbf{y}}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \Big[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{y}} \cos(kz - \omega t) \Big].$$

E, assim, sugerir a analogia:

- átomos do experimento de Stern-Gerlach $S_{z\pm}$ com luz polarizada nas direções $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$

- átomos do experimento de Stern-Gerlach $S_{x\pm}$ com luz polarizada nas direções $\hat{\mathbf{x}}'$ e $\hat{\mathbf{y}}'$.

Analogia com luz polarizada

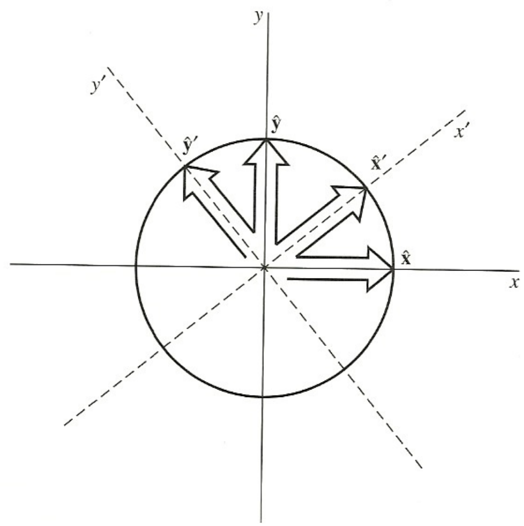


FIGURE 1.5 Orientations of the x'- and y'-axes.

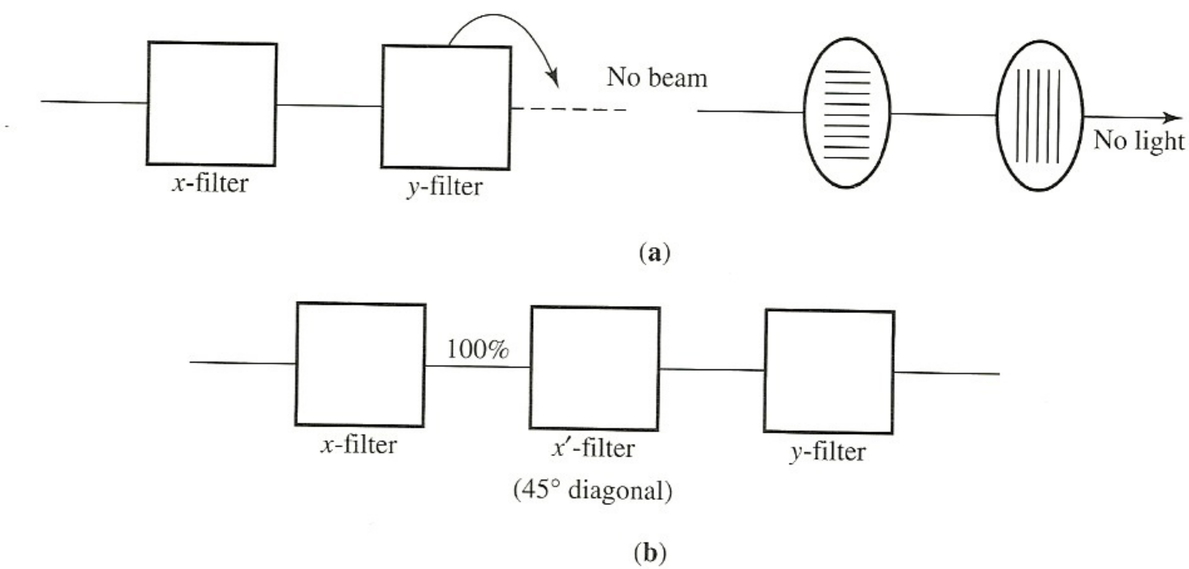


FIGURE 1.4 Light beams subjected to Polaroid filters.

Analogia com luz polarizada

Nossa analogia permite escrever "estados" $|S_x;\pm\rangle$ em função de "estados" $|S_z;\pm\rangle$, isto é

$$\begin{cases} |S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle \\ \\ |S_x;-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle \end{cases}$$

E os $|S_y;\pm\rangle$? Recorremos à luz circularmente polarizada a favor (direita) e contra (esquerda) o movimento do relógio

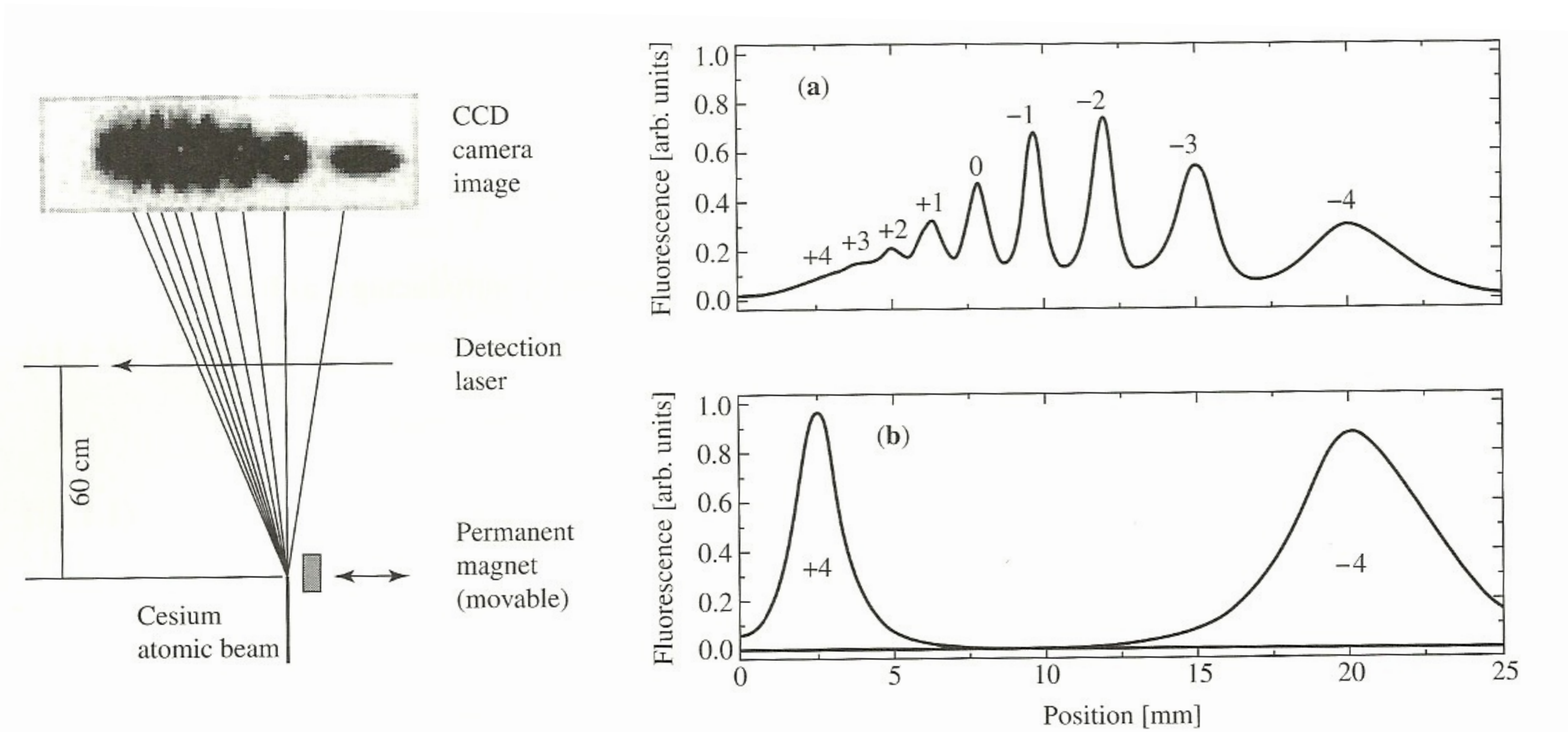
$\mathbf{E}_\pm = E_0\Big[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}}\cos(kz-\omega t) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{y}}\cos(kz-\omega t \pm \dfrac{\pi}{2})\Big]$, ou ainda, usando variáveis complexas $\boldsymbol{\epsilon}_\pm = \Big[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-\omega t)} \pm \dfrac{i}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{y}}e^{i(kz-\omega t)}\Big]$, com $i = e^{i\pi/2}$ e $\mathbf{E} = E_0\mathrm{Re}(\boldsymbol{\epsilon})$ e com isso completar a analogia entre átomos e luz polarizada,

- Átomo $S_{y+} \leftrightarrow$ feixe circularmente polarizado pela regra da mão direita
- Átomo $S_{y-} \leftrightarrow$ feixe circularmente polarizado pela regra da mão esquerda

e escrever

$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle$$

Um experimento moderno de Stern-Gerlach



Um aparato moderno de Stern-Gerlach, usado para separar estados de spin do átomo de Césio, tirado de F. Lison *et al.* Phys. Rev. A **61** (1999) 013405. O aparato é mostrado na esquerda, enquanto que os dados mostram nove componentes do átomo de spin 4 (acoplamento do elétron mais externo com o spin nuclear I=7/2).

voluntário?

Kets, bras e operadores

$|\alpha\rangle$ contém toda a informação.

$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$ soma de kets é ket

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c \Rightarrow \begin{cases} \text{ket vezes número complexo é ket.} \\ \text{Se } c = 0, \text{ o resultado é o ket nulo.} \\ |\alpha\rangle \text{ e } c|\alpha\rangle, \text{ com } c \neq 0, \text{ contém a mesma física.} \end{cases}$$

Uma observável é representada por um operador. Operador vezes ket é ket

$$A.(|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle$$

Normalmente $A|\alpha\rangle \neq c|\alpha\rangle$, mas existem kets interessantes, os autokets de A:

$|a'\rangle,\ |a''\rangle,\ |a'''\rangle,\ \ldots \Longrightarrow A|a'\rangle = a'|a'\rangle;\ A|a''\rangle = a''|a''\rangle;\ A|a'''\rangle = a'''|a'''\rangle; \ldots$

Os números $a',\ a'',\ a''', \ldots$ formam o conjunto de autovalores de A.

$$\text{Vimos exemplos: } \begin{cases} S_z|S_z;\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S_z;\pm\rangle \\ \\ S_x|S_x;\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S_x;\pm\rangle \\ \\ S_y|S_y;\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S_y;\pm\rangle \end{cases}$$

Espaços dos bras e produtos internos

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle \Rightarrow \begin{cases}\text{Um ket pode ser escrito como uma}\\ \text{combinação de autokets de } A.\end{cases}$$

Correspondência dual (CD). Para cada ket existe um bra no espaço dual (e vice-versa). Assim, existe uma correspondência um-a-um entre eles:

$$|\alpha\rangle \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} \langle\alpha|$$

$$|a'\rangle,\ |a''\rangle,\ \ldots \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} \langle a'|,\ \langle a''|,\ \ldots$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} \langle\alpha| + \langle\beta|$$

importante

$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|$$

O espaço dos bras é uma espécie de espelho do espaço dos kets.

Produtos internos

- Defini-se $\langle\beta|\alpha\rangle = (\langle\beta|).(|\alpha\rangle) \rightarrow$ uma espécie de produto escalar.
- Postulamos $\begin{cases} \langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle \text{ real.} \\ \langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0 \Rightarrow \text{Postulado da métrica positivamente definida.} \end{cases}$
- kets são ortogonais, se $\langle\alpha|\beta\rangle = 0 \Rightarrow \langle\beta|\alpha\rangle = 0$.
- $|\tilde{\alpha}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}|\alpha\rangle \longrightarrow \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = 1 \rightarrow$ É possível normalizar um ket.

Operadores

- Os operadores atuam nos kets pela esquerda $X(|\alpha\rangle) = X|\alpha\rangle$
- Se $X|\alpha\rangle = Y|\alpha\rangle,\ \forall|\alpha\rangle \Rightarrow X = Y \begin{cases} \text{Os dois operadores} \\ \text{são ditos iguais.} \end{cases}$
- O operador é o operador nulo, se $\rightarrow X|\alpha\rangle = 0,\ \forall|\alpha\rangle$.
- Os operadores podem ser somados. As operações de adição de operadores são comutativas e associativas, isto é:

$$X + Y = Y + X \quad \text{e} \quad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

- Todos os operadores neste curso, exceto o de evolução temporal, são lineares,

$$X(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha X|\alpha\rangle + c_\beta X|\beta\rangle$$

Operadores

- Os operadores atuam nos bras pela direita $(\langle\alpha|)X = \langle\alpha|X$.
- Correspondência dual $X|\alpha\rangle \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} \langle\alpha|X^\dagger$ (onde $X^\dagger$ é o adjunto Hermiteano de X).
- O operador é dito Hermiteano se $X^\dagger = X$.

Multiplicações

- Muitas vezes não comutam $XY \neq YX$.
- Vale a associativa $X(YZ) = (XY)Z = XYZ$.
- Vale $\begin{cases} X(Y|\alpha\rangle) = (XY)|\alpha\rangle = XY|\alpha\rangle. \\ (\langle\beta|X)Y = \langle\beta|(XY) = \langle\beta|XY. \end{cases}$
- Note que $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$, pois $XY|\alpha\rangle = X(Y|\alpha\rangle) \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} (\langle\alpha|Y^\dagger)X^\dagger = \langle\alpha|Y^\dagger X^\dagger$
- Produto externo: $(|\alpha\rangle).(\langle\beta|) = |\alpha\rangle\langle\beta|$
- $\exists$ produtos ilegais: $|\alpha\rangle X$ ou $X\langle\beta|$ ou $|\beta\rangle|\alpha\rangle$
- Mais tarde definiremos $|\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$.
- Todos os produtos legais são associativos. Para ilustrar, tome $(|\beta\rangle\langle\alpha|).|\gamma\rangle$ $(|\beta\rangle\langle\alpha|).|\gamma\rangle = |\beta\rangle(\langle\alpha|.|\gamma\rangle) = |\beta\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle$. Como $\langle\alpha|\gamma\rangle$ é apenas um número, temos que o produto externo vezes um ket dá outro ket. Logo, o produto externo é um operador.

Multiplicações

- Note que se $X = |\beta\rangle\langle\alpha| \rightarrow X^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|,$ pois

$$X|\gamma\rangle = |\beta\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle \overset{\text{CD}}{\Longleftrightarrow} (\langle\beta|).\langle\gamma|\alpha\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle.\langle\beta| = \langle\gamma|(\overbrace{|\alpha\rangle\langle\beta|})$$

- Outra ilustração do axioma associativo $(\langle\beta|).(X|\alpha\rangle) = (\langle\beta|X).|\alpha\rangle)$
  Como são iguais, usaremos $\langle\beta|X|\alpha\rangle$. Note que

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\beta|(X|\alpha\rangle) = \{(\langle\alpha|X^\dagger)|\beta\rangle\}^* = \langle\alpha|X^\dagger|\beta\rangle^*$$

- Se X é Hermiteano $\Longrightarrow \langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X|\beta\rangle^*$